جدید الجبرا و مثلثات

BANDIL NO-9
Book

مصنف

ایلبرج پی۔ وینس

مترجم

ایس۔ اے۔ ایل شیروانی

ترقی اُردو بورڈ۔ نئی دہلی

جدید الجبرا و مثلثات

مصنف

ایلبرج پی۔ وینس

مترجم

ایس۔ اے۔ ایل شیروانی

ترقی اُردو بورڈ۔ نئی دہلی

پہلا اُردو ایڈیشن 1000

1979 (شک) 1900

© انگریزی : ایڈی سن ویسلی پبلشنگ کمپنی۔
اُردو : ترقیِ اردو بورڈ، مرکزی وزارتِ تعلیم، حکومت ہند۔

قیمت : 15 روپے

پرنسپل پبلی کیشن آفیسر، بیورو فار پروموشن آف اردو، ویسٹ بلاک 8، آر۔ کے پورم،
نئی دہلی 110022 نے اے جے پرنٹرز بہادر شاہ ظفر مارگ نئی دہلی سے چھپوا کر ترقی
اردو بورڈ وزارتِ تعلیم اور سماجی بہبود، نئی دہلی کے لیے شائع کیا۔

پیش لفظ

کسی بھی زبان کی ترقی کے لیے یہ ضروری ہے کہ اس میں مختلف سائنسی، علمی اور ادبی کتابیں لکھی جائیں اور دوسری زبانوں کی اہم کتابوں کے ترجمے شائع کیے جائیں۔ یہ نہ صرف زبان کی ترقی کے لیے بلکہ قوموں کی معاشی اور سماجی ترقی کے لیے بھی ضروری ہے۔ اُردو میں اسکولوں اور کالجوں کی نصابی کتابوں، بچوں کے ادب، لغات اور سائنسی کتابوں کی ہمیشہ کمی محسوس کی جاتی رہی ہے۔ حکومتِ ہند نے کتابوں کی اس کمی کو دور کرنے اور اردو کو فروغ دینے کے لیے ترقی اردو بورڈ قائم کرکے اعلا پیمانے پر معیاری کتابوں کی اشاعت کا ایک جامع پروگرام مرتب کیا ہے، جس کے تحت مختلف سائنسی و سماجی علوم کی کتابوں کے ترجمے اور اشاعت کے ساتھ لغات، انسائکلوپیڈیا، اصطلاحات سازی اور بنیادی متن کی تحقیق و تیاری کا کام ہو رہا ہے۔

ترقی اردو بورڈ اب تک بچوں کے ادب کے علاوہ بہت سی نصابی، علمی، ادبی اور سائنسی کتابیں شائع کر چکا ہے جنھیں اردو دنیا میں بے حد مقبولیت حاصل ہوئی ہے، یہاں تک کہ بعض کتابوں کے دوسرے اور تیسرے ایڈیشن بھی شائع ہو رہے ہیں۔ زیرِ نظر کتاب بھی اسی اشاعتی پروگرام کا ایک حصہ ہے۔ مجھے امید ہے کہ اسے بھی علمی اور ادبی حلقوں میں پسند کیا جائے گا۔

(ڈاکٹر ایس۔ ایم۔ عباس شارب)
پرنسپل پبلی کیشن آفیسر، بیورو فار پروموشن آف اردو،
وزارتِ تعلیم اور سماجی بہبود، حکومتِ ہند

فہرست مضامین

باب 1	سٹ اور اعداد :	13
1-1	سٹ اور بنیادی ترسیلِ ارقام	13
1-2	تحت (ذیلی) سٹ	18
1-3	سٹوں پر عمل	22
1-4	اعداد صحیح	27
1-5	ناطق اور غیر ناطق اعداد	32
1-6	تساوی	36
باب 2	اعداد کا الجبرا بہ حیثیت ایک منطقی نظام کے :	39
2-1	استنباطی نظام	39
2-2	حقیقی اعداد	40
2-	کچھ بنیادی مسئلے	48
2-4	مزید مسئلے	53
باب 3	الجبرا کے استدلال کی توسیع :	58
3-1	الجبرائی ارقام کا جوڑ	58
- -	الجبرائی ارقام کا ضرب	61
-3	الجبرائی عبارات کی تقسیم	

3-4	خصوصی حاصل ضرب	70
3-5	اجزاءِ ضربی اور اجزاءِ ضربی کا نکالنا	71
3-6	کسور کا مفرد شکل میں لانا	75
3-7	کسور کو جوڑنا	77
3-8	کسور کا ضرب اور تقسیم	80
3-9	صفر و عددِ صحیح قوت نما	82
3-10	ناطق قوت نما	84
3-11	علاماتِ جذر	86
3-12	علامتِ جذر کے جوڑ اور باقی	88
3-13	جذر کا ضرب اور تقسیم	89
باب 4	۔ غیر مساوات، مطلق قیمتیں اور نظامِ مختصات :	92
4-1	حقیقی اعداد کے لیے ترتیبی (آرڈر) موضوعات	92
4-2	یک ابعادی نظامِ مختصات	97
4-3	تکمیلی خصوصیت	104
4-4	دو سمتی نظامِ مختصات	108
4-5	ضابطۂ فاصلہ	113
4-6	دائرہ اور اُس کی قوسی لمبائی	116
باب 5	۔ تفاعل اور اُن کی گرافی تعبیر :	123
5-1	تفاعل اور تعلق	123
5-2	تفاعل اور تعلق کی گرافی تعبیر	131
5-3	سادہ اعداد و شمار (آنکڑوں) کی گرافی تعبیر	136
باب 6	۔ دائری تفاعل :	138
6-1	مثلثات	138

6-2	دائری تفاعل کی تعریفیں	130
6-3	سائن اور کوسائن تفاعل کا طریق عمل	148
6-4	مخصوص حقیقی اعداد کے لیے دائری تفاعل کی قیمتیں	156
6-5	$\theta = \pi/5$ کے لیے دائری تفاعل کی ٹھیک ٹھیک قیمتیں	159
6-6	بُنیادی دائری تفاعل متماثلہ	162
6-7	$\cos(\alpha - \beta)$ کے ضابطہ کا ثبوت	166
6-8	مخصوص تحویلی ضابطہ	168
6-9	عام جمعی ضابطہ	170
6-10	عام تحویلی ضابطے	173
6-11	عام متماثلہ	178
6-12	ضرب اور جوڑ کا مبادلہ	185
6-13	کسی عدد کی تفاعلی قیمتیں	187
6-14	چھوٹے اعداد کی تفاعلی قیمتوں کے تقربات	191
باب 7.	خطّی اور دو درجی تفاعل :	194
7-1	خطّی تفاعل	194
7-2	سلسلۂ حسابیہ	200
7-3	دو درجی تفاعل	205
7-4	دو درجی مساوات کا حل	208
7-5	متماثلہ	214
7-6	دو درجی تفاعل کے ضریب اور اُن کے صفروں کے درمیان تعلق	221
7-7	دو درجی قسم کی مساوات	226
7-8	مساوات جن میں علامات حذر شامل ہوں	227
7-9	نسبت	229

فہرست مضامین

7-10	دو خطی مساوات کا حل	234
7-11	تین خطی مساوات کا الجبرائی حل	242
7-12	ایک خطی اور ایک دو درجی مساوات کا حل	246
باب 8	تعین گر :	250
8-1	دو ترتیبی اور سہ ترتیبی تعین گر	250
8-2	ترتیبی تعین گر	256
8-3	تعین گر کا پھیلاؤ بذریعہ صغائر	262
8-4	تعین گر کے ذریعے مفرد مساوات کے نظام کا حل	266
باب 9	کثیر رکنی تفاعل :	270
9-1	چند مسائل	270
9-2	کثیر رکنی تفاعل کا گراف کھینچنا	276
9-3	صفروں اور قیمتوں (جذروں) پر عمومی تصریحات	278
9-4	ناطق جذر (قیمتیں)	279
9-5	غیر ناطق جذر (قیمتیں)	282
باب 10	معکوس تفاعل :	288
10-1	معکوس تفاعل	288
10-2	چند رشتوں کے گراف کھینچنا	293
10-3	معکوس دائری تفاعل	295
10-4	معکوس دائری تفاعل پر مشتمل عملیات	301
باب 11	ترتیب، اجتماعات اور روزگنی مسئلہ :	305
11-1	بنیادی اصول	305
11-2	ترتیب	309
11-3	اجتماعات	313

11-4	دوڑکنی مسئلہ	318
11-5	$(1+x)^n$ کا پھیلاؤ	323
باب 12	- ریاضیاتی استقرا	326
12-1	ریاضیاتی استقرا	326
12-2	دوڑکنی مسئلہ کا متبادل ثبوت	333
باب 13	- قوت نما اور لوگارتمی تفاعل :	336
12-1	قوت نما تفاعل a^x	336
13-2	سلسلۂ جیومیٹریہ	338
13-3	لاتعداد ارکان والے سلسلۂ جیومیٹریہ	343
13-4	لوگارتمی تفاعل	346
13-5	عام لوگارتم	351
13-6	تخمینہ بذریعہ لوگارتم	355
13-7	سود مرکب اور اُس کی تعمیم	356
13-8	قوت نما تفاعل کے اطلاق	360
باب 14	- دائری تفاعل کا اطلاق :	365
14-1	خمیدہ $y = a \sin kx$ کے گراف	365
14-2	خمیدہ $y = a \sin (kx + b)$ کے گراف	368
14-3	تعین گر کو جوڑ کر گراف کھینچنا	369
14-4	خطی موسیقی حرکت	371
14-5	دو عمومی سائن تفاعل کا جوڑ	375
14-6	موسیقیہ تجزیہ اور ترکیب	379
باب 15	دائری تفاعلوں کا زاویوں پر اطلاق :	381
15-1	زاویہ	381

فہرست مضامین

15-2	زاویوں کے دائری تفاعل	388
15-3	مثلثات کے حل پر عام بحث	397
15-4	کلیہ سائن	398
15-5	قائم الزاویہ مثلثات کا حل	398
15-6	کلیۂ کوسائن	402
15-7	غیر قائمہ مثلثات پر اطلاق	408
باب 16	اعدادِ ملتف :	416
16-1	مرتب جوڑوں کا الجبرا	416
16-2	ملتف اعداد	422
16-3	مساوات کے ملتف جذر (قیمتیں)	426
16-4	ملتف اعداد کی گرافی نمائندگی	427
16-5	ملتف اعداد کی قوتیں اور جذر (قیمتیں)	428
	جدول اوّل: مثلثاتی تفاعل کی قیمتیں	437
	جدول دوم: اعداد کے لوگارتم	442
	جدول سوم: مثلثاتی تفاعل کے لوگارتم	444
	جدول چہارم: قوتیں اور جذر	440
	طاق نمبر شمار والے منتخب سوالوں کے جوابات	450

دیباچہ

حالیہ سالوں میں ریاضیات کے مطالعے کے بارے میں پورا نقطۂ نظر برابر بدلتا رہا ہے۔ اگرچہ بعض حضرات نے ایسے مضامین کو اکٹھا کر کے اور یکجائی طور پر پڑھانے کے حالیہ رجحان پر اعتراض کیا ہے جو کہ پہلے الگ الگ پڑھائے جاتے تھے۔ پھر بھی مجھے کامل یقین ہے کہ ایسے نظام سے سب سے بہتر نتائج حاصل ہو سکتے ہیں۔ اس طریقے سے طالب علم کو ریاضیات کے سارے شعبوں میں مشترک ریاضیاتی فکر و عمل کا صحیح احساس ہوتا ہے اور ساتھ ہی ساتھ خود بنیادی مواد میں بھی صحیح اشتراک پیدا ہوتا ہے۔ یہ بھی یقین کامل تھا جس کے تحت میں نے اپنی کتاب "یونیفائڈ الجبرا اینڈ ٹرگنامیٹری" لکھی تھی۔

لیکن اس کتاب کے لکھنے کے بعد سے ثانوی اور کالج کے درجات دونوں کے لیے ریاضیات کے جن پہلوؤں پر زور دیا گیا ہے اُن میں بڑی تبدیلی واقع ہوئی ہے۔ چنانچہ اس کتاب پر نظر ثانی کر کے ایک نیا ایڈیشن تیار کرتے ہوئے میں نے یہ محسوس کیا کہ میری کوششوں کے نتیجہ میں خاصی نمایاں مقدار میں نیا مواد یکجا ہو گیا ہے اور وہ ایک بالکل نئے نقطۂ نظر کا مظہر ہے۔ اس وجہ سے یہ مناسب معلوم ہوتا ہے کہ اس کو بالکل نئی کتاب سمجھا جائے اور اس کو "ماڈرن الجبرا اینڈ ٹرگنامیٹری" سے موسوم کیا جائے۔

اس کتاب کے مقاصد میں سے ایک یہ ہے کہ طالب علم کو یہ بتایا جا سکے کہ ریاضیات کی ہیئت ایک منطقی نظام کے مثل ہے۔ وہ اس حقیقت کو سمجھے کہ جامع تعریفات اہم ہیں، واضح طور پر بیان کیے ہوئے مفروضات ضروری ہیں اور ریاضیات کا ہر نظام ایسی ہی تعریفیں، مفروضات اور منطقی استدلال کے ذریعے اخذ کیے ہوئے نتائج پر مشتمل ہے۔ اس کتاب کا دوسرا مقصد جو زیادہ خصوصی ہے، اس میں

الجبرا اور مثلثیات کے بُنیادی نظریوں کو دونوں علوم کی خاصی ٹھوس بُنیاد کے ساتھ، یکجائی طور پر پیش کیا گیا ہے۔ ایسا مواد ہر طالب علم کی تربیت کے لیے بُنیادی اہمیت کا مالک ہے خواہ وہ ریاضیات کا مطالعہ جاری رکھنا چاہتا ہو یا فطری علوم اور انجینیرنگ کا یا اُس کی دلچسپی سماجی علوم اور اقتصادیات میں ہو۔ اِس کتاب میں جو مواد پیش کیا گیا ہے، اس پر مہارت کے ساتھ طالب علم ریاضیاتی منطق، متناہی ریاضیات، شماریات اور احتمال کے مطالعہ کے لیے پوری طرح تیار ہو جائے گا، یا تحلیلی جیومیٹری اور احصا کے مطالعے کو جاری رکھ سکے گا۔

اِس کتاب کے لکھنے میں امریکی ریاضیاتی انجمن کے انڈر گریجویٹ ریاضیاتی پروگرام کی کمیٹی، کالج انٹرنس بورڈ کے ریاضی کے کمیشن اور اسکول کے ریاضی کے تحقیقاتی گروپ کی تحریروں سے میں متاثر ہوا ہوں۔ حالانکہ اِس کتاب میں شامل بہت سے مواد پر یہ اثر پایا جائیگا پھر بھی اس میں شامل موضوعات کا بُنیادی خاکہ میرا اپنا ہے۔

میرا یہ مقصد تھا کہ میں ایک ایسی جامع کتاب تحریر کروں جو کہ ایک سمسٹر کے نصاب کی بُنیادی ضرورتوں سے لے کر پورے سال کے نصاب تک کے کسی بھی مقصد کے لیے استعمال کی جاسکے۔ اوسط درجے کی اچھی تیاری والے ثانوی اسکول کے طالب علم کو اِس کے مواد میں کوئی دقّت محسوس نہیں کرنا چاہیے اور اگر طالب علم کی تیاری پُختہ ہو تو نصاب کے لیے ضروری تعلیمی گھنٹوں کی تعداد کو بہ آسانی کم کیا جاسکتا ہے۔

موضوعات کے انتخاب کے ذریعے اور جہاں فطری معلوم ہوا ہے وہاں الجبرا اور مثلثیات کو یکجا کر کے، ان میں سے ہر ایک کو متناسب وقت دے کر اور منطقی طریقے کی مدد سے پوری کتاب میں جدید نقطۂ نظر پر زور دینے کی کوشش کی گئی ہے۔ ہر مسئلہ کے اختتام پر جو سوالات دیے گئے ہیں وہ اِس کتاب کے لاینفک اجزا ہیں۔ یہ سوالات نہ صرف مواد کو ہم رشتہ کرنے میں مدد دیتے ہیں بلکہ اکثر انھیں ایسے ضروری نظریات اور مسائل کو متعارف کرنے کے لیے استعمال کیا گیا ہے جن پر بعد میں بحث کی گئی ہے۔ ایسے سوالات جو کہ بحث کو جاری رکھنے کے لیے ضروری ہیں ان پر تارے کا نشان لگا دیا گیا ہے، انھیں حل کرنا ضروری ہے۔ طاق نمبر شمار والے سوالات کے جوابات کتاب کے آخر میں دیے گئے ہیں۔

اِس کتاب کی کئی غیر معمولی خصوصیات ہیں۔ سِٹ کے نظریے سے شروع میں ہی متعارف کرایا گیا ہے اور پوری کتاب میں استعمال ہوا ہے۔ میدان کے بدیہیات واضح طور پر بیان کیے گئے ہیں ساتھ ہی ترتیبی بدیہیات، تکمیلی خصوصیت اور حقیقی اعداد کی جملہ اہم خصوصیات وضاحت کے ساتھ بیان اور ثابت کی گئی ہیں۔ مُلتف اعداد (complex numbers) پر کسی قدر تفصیلی بحث کی گئی ہے۔ تفاعل اور تعلق کے درمیان فرق کو نمایاں کیا گیا ہے اور دونوں کو سٹ کے تصوّر کے تحت متعارف کر دیا گیا ہے۔ یک سمتی مختصاتی نظام پر مختصر بحث قدرتی طور پر عام مستطیلی مختصاتی نظام کی طرف رہنمائی کرتی ہے۔ اِس نظام کے تحت دائری تفاعلوں کی تعریف، مثلثات اور تحلیلی جیومیٹری کو آپس میں جوڑنے والی ایک بُنیادی کڑی کا کام کرتی ہے اور متعدد زیادہ آسان اور براہ راست طریقوں کے استعمال کے لیے امکان پیدا کرتی ہے۔ ان تفاعلوں کی پہلے کسی بھی حقیقی عدد کے لحاظ سے تعریف کی جاتی ہے اور بعد میں انھیں ایسی حالت میں استعمال کیا جاتا ہے جہاں حقیقی عدد کو کسی زاویہ کے ناپ کی حیثیت سے اختیار کیا گیا ہے۔ مثلثات کے تحلیلی حصّے پر تخمینی حصّہ کی بہ نسبت زیادہ زور دیا گیا ہے۔ حالانکہ تخمینی حصّہ کو بھی شامل کیا گیا ہے۔ گراف کھینچنے پر زور دینا، بہت سے دوری مظہر پر دائری تفاعل کے اطلاق پر بصیرت افروز نظر اور مقطعات پر تفصیلی بحث اور عام مقلوب تفاعل پر مواد اور ریاضیاتی درجوں کا تعارف اور بہ کثرت استعمال اِس کتاب کی دوسری نمایاں خصوصیات ہیں۔ ہر نئے نظریے پر مفصّل اور باقاعدگی کے ساتھ بحث سے پہلے اُس کو وجدانی طور پر پیش کرنے کی کوشش کی گئی ہے۔ ضمیمہ میں قوت نما اور جذر کے جدول، دائری تفاعل کے چار مقام تک کے جدول، لوگارتم اور دائری تفاعل کے لوگارتم شامل ہیں۔

ای۔ بی۔ وینس

باب 1

سٹ اور اعداد

سائنس کے بنیادی مقداری ضابطوں میں خواہ وہ طبعی ہوں یا سماجی، شمار کرنا اور پیمائش کرنا ہوتا ہے۔ شمار کرنے کے طریقے میں کسی ذخیرے یا اشیا کے سٹ کو ایک عدد سے مخصوص کرتے ہیں پیمائش میں کسی شے کی کسی خصوصیت کے لیے ایک عدد مقرر کرتے ہیں۔ شمار کرنا اور پیمائش، سٹ کے نظریے کی طرح مشکل تصور ہیں اور سائنسی طریقوں کے میدان میں دونوں ہی گہرے مطالعے کے موضوع رہے ہیں ہمارے موجودہ مطالعے میں اہم بات یہ ہے کہ شمار کرنا اور پیمائش دونوں ہی اعداد اور سٹ کی طرف رہنمائی کرتے ہیں۔ اور ان اعداد اور سٹ کے استعمال سے ہمارے لیے نظامِ قدرت کی بصیرت حاصل کرنا ممکن ہے۔ ہم پہلے مختصر بحث سٹوں پر شروع کریں گے پھر مختلف قسم کے اعداد کی ترتیب دیں گے اور پھر اُن بنیادی عمل اور ترقیم جو کہ اعداد اور سٹ پر ہوتی ہے کا بیان کریں گے جو سائنس اور ریاضی کے میدان میں بنیادی سمجھے جاتے ہیں۔

1-1 سٹ اور بنیادی ترسیلِ ارقام :

ریاضی میں سٹ کے بنیادی نظریے کی اہمیت پر سب سے پہلے جارج کینٹر G. Georg Cantor (1845–1918) نے غور و فکر کی تھی اور وہ اس مضمون کی مختلف شاخوں کے لیے اس قدر بنیادی ہے کہ اُس کی تعریف اس سے بھی زیادہ بنیادی نظریہ میں کرنا ناممکن ہے۔ بہرحال ہماری ٹکاوت میں وہ اس قدر گہرا بیٹھا ہوا ہے کہ ہم کو سٹ کے نظریے کے لیے اپنے تجربے پر ہی بھروسہ کرنا چاہیے۔ سٹ کو ہم کسی قسم کی اشیا کا ایک مجموعہ سمجھیں اور اُن میں صرف اُن چیزوں کو شامل کریں جو صریحاً واضح ہوں، جس سے ہمارے لیے یہ جاننے میں کوئی دشواری نہ ہو کہ اُن میں کی کوئی شے اُس سٹ سے

تعلق رکھتی ہے یا نہیں۔ مثلاً مندرجہ ذیل کو ہم سٹ سمجھیں :

(a) ادبیرون کالج کے نوآمدہ طلبا کے درجے کا سٹ۔

(b) اِس درجے میں اُن طلبا کا سٹ جن کے آخری نام حرف V سے شروع ہوتے ہیں۔

(c) اُن مثبت صحیح اعداد (شمار کرنے والے اعداد میں) کا سٹ جو 5 سے کم ہیں۔

(d) اِس کتاب کے مصنّفین کے ناموں کا سٹ۔

(e) امریکہ کے اُن تمام صوبوں کا سٹ جن کی آبادی دس ہزار سے کم ہے۔

(f) اُن تمام خطوط مستقیم کا سٹ (ایک ہی سطح میں) جو ایک ہی نقطے سے گزرتی ہیں۔

(g) ایک دیے ہوئے خط پر کے تمام نقاط کا سٹ۔

(h) دُنیا کی تمام معدنی اشیا (fossils) کا سٹ۔

(i) لفظ "Mississippi" کے تمام حروف کا سٹ۔

اگر ایک شے کسی سٹ میں شامل ہے تو وہ اُس سٹ کی ممبر یا جُز کہلاتی ہے۔ لیکن اگر وہ اُس سٹ میں شامل نہیں ہے تو وہ اُس سٹ کا جزو نہیں ہے۔ سٹ کی رکنیت ظاہر کرنے کے لیے $\in$ علامت استعمال ہوتی ہے۔ عام طور پر بڑے حروف سٹ کا نام ظاہر کرتے ہیں اور چھوٹے حروف اُس سٹ کے اجزا کے نام۔ اگر A ایک سٹ ہے جس کا جُز a ہے تو یہ مختصر طور پر لکھنے کے لیے کہ "a سٹ A کا جز ہے" تو یوں لکھیں گے $a \in A$۔ اس کو اس طرح بھی پڑھا جا سکتا ہے کہ "a سٹ A میں شامل ہے" یا "a سٹ A سے متعلق ہے"۔ اسی طرح اگر ہم یہ لکھنا چاہیں کہ a سٹ A کا جزو نہیں ہے تو لکھیں گے $a \notin A$

مندرجہ بالا مثالوں سے صاف طور پر ظاہر ہے کہ سٹ مختلف قسم اور مختلف جسامت کے ہوتے ہیں۔ مندرجہ بالا تمام مثالیں ایک دوسرے سے مختلف ہیں اگرچہ اُن میں سے کچھ کی جسامت یکساں ہو سکتی ہے۔ مثال (a)، (b)، (c)، (d)، (e)، (h) اور (i) محدود ہیں جبکہ (f) اور (g) لامحدود ہیں۔ اگر ایک سٹ کے اجزا کو کسی ترتیب سے لکھنے کے بعد اس طرح شمار کیا جائے کہ آخر تک پہنچ سکیں تو اس سٹ

شماری اعداد کی ذکاوتی واقفیت کو ہم مان کر چلتے ہیں۔ $1, 2, 3, \ldots$ اس میں نقطوں سے مراد ہے کہ ہم 3 پر نہیں رُکے بلکہ غیر محدود حد تک جاری رکھتے ہیں۔

کے اجزا کی تعداد عام طور پر محدود کہلاتی ہے۔ کوئی سٹ محدود اُس وقت کہلاتا ہے جبکہ اُس کے اجزا کی تعداد محدود ہو ورنہ وہ لامحدود کہلاتا ہے۔

غور کریں کہ مثال نمبر (i) میں اجزا کی تعداد چار ہے۔ حالانکہ لفظ "Mississippi" میں گیارہ حروف ہیں۔ اس طرح اجزائی تعداد مثال نمبر (c) میں اور اس میں ایک ہی ہے۔ مثال (d) کی طرح ایک سٹ میں ایک جزو بھی ہو سکتا ہے اور درحقیقت مثال (e) کی طرح سٹ میں کوئی بھی جزو نہ ہو۔ مثال (h) کی طرح سٹ خواہ کتنا ہی بڑا ہو پھر بھی محدود ہو سکتا ہے۔ اجزا کے شمار کی ترتیب کا سٹ پر کوئی اثر نہیں پڑتا۔

ابتدائی ریاضیات میں سٹ کا استعمال کچھ مخصوص تصورات کی وضاحت میں مددگار ثابت ہوتا ہے۔ کچھ مخصوص پیچیدہ نظریوں کو مختصر بنا دیتا ہے اور مختلف مگر متعلق نظریات کے مطالعہ کو یکجا کرتا ہے۔ اس خیال کو مدنظر رکھتے ہوئے سٹ کی تعریف کے لیے ہم دو عام طریقے اختیار کرتے ہیں۔ اوّل طریقہ جدول بندی (روسٹر یا ٹیبولیشن طریقہ) اور دوئم اُصول یا تعمیر خواص کا طریقہ کہلاتا ہے۔

جدول بندی کا طریقہ:

سٹ کے اجزائی فہرست کو قوسین میں لکھنا۔

اصول تعمیری: ہم سٹ کا اظہار ایک تشریحی جملہ کو قوسین میں لکھ کر کر سکتے ہیں اور پھر یہ مانیں کہ صرف وہی اجزا جو دی ہوئی تعریف کے مطابق خصوصیت رکھتے ہیں اُس سٹ کے جزو ہو سکتے ہیں۔

مثال 1: سٹ $V = \{a, e, i, o, u\}$ ۔ یہ وہ سٹ ہے جس کے اجزا انگریزی تہجی کے حروف علت ہیں۔ یہ سٹ اس طرح بھی لکھا جا سکتا ہے:

$V = \{x \mid x$ انگریزی تہجی کا حرف علت ہے$\}$

ایک زیادہ موثر اور مختصر طریقہ یہ ہوگا: $V = \{x \mid x$ انگریزی تہجی کا حرف علت ہے$\}$

جس میں طول خط کا مطلب ہے "جہاں کہ"۔

یہ خیال رکھیں کہ ان مثالوں میں x انگریزی حرف تہجی کی حیثیت سے نہیں بلکہ سٹ کے ایک اختیاری جزو کی علامت کی حیثیت سے استعمال کیا گیا ہے۔

مثال 2 : اگر ہم یاد رکھیں کہ جفت عددِ صحیح وہ عدد ہے جو دو سے کٹ جائے تو سٹ $E = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ کو اس طرح بھی لکھ سکتے ہیں :

$E = \{x | x$ ایک ایسا مثبت جفت عدد صحیح ہے جو 12 سے کم ہو$\}$

مثال 3 : مندرجہ ذیل سٹ کو جدولی طریقہ سے لکھنا بہت مشکل ہے :

$N = \{x | x$ ایک ایسی مثباتی کسر ہے جو 1 اور 2 کے درمیان ہے$\}$

مثال 4 : تصریحی اُصول سے اس سٹ کی تصریح بھی مشکل ہے۔

$Z = \{$ آپ کی بلّی، میرے پیر برنارڈ، زمین، پیٹر، ایملی $\}$

سٹ کے کسی بھی مطالعے میں ایک بُنیادی تقاضہ یہ ہے کہ مختلف اشیا کے مجموعوں کی جسامت کے موازنہ کی قابلیت ہو۔ اس ضرورت کو ریاضی کے اِس اہم نظریے کے ذریعے مکمل کر سکتے ہیں "ایک کا ایک کے ساتھ تطابق"

تعریف 1-1 : A اور B دو سٹوں کے درمیان ایک کا ایک کے ساتھ تطابق اُس وقت ہوتا ہے جب یہ ممکن ہو کہ A کے اجزا کا B کے اجزا کے ساتھ تعلق اس طرح پیدا کیا جا سکے کہ ہر ایک سٹ کا ہر ایک جزو دوسرے سٹ کے بعینہٖ ویسے ہی جزو کے ساتھ متعلق ہو۔

مثلاً کوئی بھی معمولی انسان اپنے ہاتھ کی اُنگلیوں کو اپنے پاؤں کی اُنگلیوں کے ساتھ ایسے متعلق کر سکتا ہے کہ ایک ہاتھ کی اُنگلی ایک پاؤں کی اُنگلی کے ساتھ متعلق ہو۔ کسی بھی دیے ہوئے شادی شدہ جوڑوں کے گروہ میں ظاہری طور پر کس قسم کی مطابقت ہے، پچھلی مثالوں میں اِس قسم کی "ایک کی ایک کے ساتھ مطابقت" V اور E، E اور Z یا Z اور V میں ہے۔ اگر ایسا ہو تو دو سٹ ایک ہی جسامت کے کہلاتے ہیں، حالانکہ وہ برابر نہیں ہیں۔

تعریف 1-2 : A اور B دو سٹ ایک ہی جسامت کے کہلاتے ہیں اگر اُن کے اجزا کے درمیان ایک کی ایک کے ساتھ مطابقت ہو۔

سوالات

1 سے 5 تک کے سوالوں میں سٹ کے لکھنے کے دونوں ہی طریقے جدولی و تصریحی استعمال کیجیے:

آپ کے اپنے خاندان کے افراد۔

2. 10 سے کم کے شماری اعداد۔

3. وہ کسور جن کا شمار کنندہ 1 اور جن کا نسب نما 10 سے کم شماری عدد ہو۔

4. وہ منفرد ہندسے جن کا استعمال ہمارے اعشاری طریقے میں ہوتا ہے۔

5. وہ اعداد جو 6 کے مضرب ہوں لیکن 50 سے کم۔

6 سے 10 تک کے سوالات کے سٹ جن کے جزو ذیل میں لکھے ہیں تصریحی اُصول کے تحت لکھیے:

6. $E = \{2, 4, 6, 8\}$
7. $S = \{1, 4, 9, 16, 25\}$
8. $N = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\}$
9. $P = \{1, 4, 7, 10, 13\}$
10. $T = \{10, 100, 1000, 10000\}$

سوال 11 سے 15 تک کے سٹ کے تعین کرنے کے لیے تصریحی اُصول استعمال کیجیے اور بتائیے کہ اِس میں جدول بندی کا طریقہ مشکل یا ناممکن کیوں ہے؟

11. وہ شماری اعداد جو 100 سے بڑے ہوں۔

12. آپ کے اسکول کے وہ طلبا جو بدیس گئے ہوں۔

13. امریکہ کے وہ شہری جنھوں نے اپنے ملک کا دستور العمل پڑھا ہو۔

14. اوبرلن کالج کی لائبریری کی کتابیں۔

15. اُن تمام مثلثوں کا سٹ جن کا رقبہ تین سے کم ہو۔

16. ایسے سٹ کی مثال لکھیے جس میں صرف دو جزو ہوں، کوئی جزو نہ ہو، اور لامحدود جزو ہوں۔

17. دو سٹ A اور B برابر کہلاتے ہیں اگر A کا ہر ایک جزو B کا جزو ہو اور B کا ہر ایک جزو A کا جزو ہو اور اُس کو لکھتے ہیں $A = B$۔ بتائیے کہ ذیل کے سٹ A اور B ایک ہی جسامت کے ہیں اور اگر ایسا ہے تو کیا $A = B$ کے

(a) $A = \{1, 3, 5\}, B = \{3, 5, 1\}$

(b) $A = \{1, 3, 5\}, B = \{a, b, c\}$

(c) $A = \{x | x^2 = 1\}, B = \{1, -1\}$

(d) $A = \{1\}, B = \{x | x^2 = 1\}$

(e) $A = \{1\}, B = \{x | (x-1)^2 = 0\}$

(f) $A = \{1\}, B = \{x | x^2 - x = 0\}$

ان لوکہ x کی قیمت ہے 1 یا 0 یا -1

18. ذیل کے سٹوں کی فہرست میں بتائیے کون سے محدود اور کون سے لامحدود سٹ ہیں۔ محدود سٹوں میں سے کون کون سے ایک ہی جسامت کے ہیں اور کون کون سے برابر ہیں؟

(a) پہلے دو طاق شماری اعداد کے سٹ۔

(b) اُن تمام شماری طاق اعداد کے سٹ جو 5 سے کم ہوں۔

(c) تمام طاق شماری اعداد کے سٹ۔

(d) لفظ "Canadian" کے تمام حروف کے سٹ۔

(e) اُن تمام نقطوں کا سٹ جو ایک ایسے خط پر ہوں جس کی لمبائی اُسی خط کے کسی نقطہ سے ایک اکائی لی گئی ہو۔

(f) ایک ایسی سطح کے تمام نقطوں کا سٹ جو دیے ہوئے سطح کے کسی بھی نقطہ سے ایک اکائی ہو۔

(g) وہ سٹ جن کے اجزا 1 اور 3 اعداد ہوں۔

1-2 تحت (ذیلی) سٹ : انگریزی تہجی کا ہر ایک حرف علت اس تہجی کا ایک حرف ہے۔ اگر ہم A کو انگریزی تہجی کے ہر ایک حرف کا ایک سٹ کہیں تو سٹ V اُس میں شامل ہے۔ اسی طرح دفعہ 1-1 کے مثال نمبر 2 میں سٹ E شماری جفت اعداد کے سٹ میں شامل ہے۔ ہم اِس نظریے کی عام وضاحت کرنا چاہتے ہیں۔

تعریف 1-3 : اگر سٹ A کا ہر ایک جزو، B کا جزو ہو تو سٹ A، B کا تحت سٹ کہلاتا ہے۔ اگر B میں ایسے جزو ہوں جو A کے جزو نہیں ہیں تو A سٹ B کا واجب تحت سٹ کہلائے گا۔

کیوں کہ یہ نظریہ اکثر استعمال ہوتا ہے اس لیے اس کو علامتی طور پر لکھنا مناسب رہے گا $A \subset B$ جس کو پڑھیں گے "A تحت سٹ ہے B کا" یا "A شامل ہے B میں" اس لیے :

$A \subset B$ اگر اور صرف اگر $x \in A$ سے مراد ہے کہ $x \in B$ *

---

* ریاضی میں "اگر اور صرف اگر" بہت ہی اہم بیان ہے۔ اس کا مطلب ہے (1) اگر $x \in A$ سے مُراد ہے $x \in B$ تو $A \subset B$ اور (2) اگر $A \subset B$ تب $x \in A$ سے مراد ہے $x \in B$۔ عموماً ایسے بیان سے دو حقیقتیں مراد ہوتی ہیں۔ یہ دونوں بہ حیثیت ایک مسئلہ اور اُس کے برعکس کی جا سکتی ہیں۔ کوئی بھی تعریف ہمیشہ ایک "اگر اور صرف اگر" کے بیان کی حیثیت سے لی جا سکتی ہے۔

یہ خیال رہے کہ ہر ایک سٹ اپنا خود کا تحت سٹ مانا جا سکتا ہے یعنی تمام A کے لیے $A \subset A$
ہم پھر اپنے سٹ A کو لیتے ہیں جس میں سٹ V انگریزی تہجی کا ایک حرف ہے یا $A = V$
ہم نے کہا تھا کہ V، A کا تحت سٹ ہے۔ اگر C انگریزی تہجی کا حرف صحیح ہے یا $C = V$
تو C بھی A کا تحت سٹ ہے۔

اس بحث میں سٹ A ہی ہماری بحث کے سب اجزا کا تمامی (مجموعی) سٹ لیا گیا ہے۔ کسی بھی بحث میں ایسے مقرر شدہ سٹ کو آفاقی سٹ کہتے ہیں اور اس کو ہمیشہ U سے تعبیر کرتے ہیں۔ مختلف نظریات کے لیے مختلف آفاقی سٹ لیے جا سکتے ہیں۔ کسی ایک بحث میں U تمام حقیقی اعداد کا سٹ ہوگا تو کسی دوسری بحث میں کسی سطح کے تمام لفظوں کا سٹ ہوگا وغیرہ۔ پہلے گریڈ کے حساب میں U تمام شماری اعداد کا سٹ تھا۔

تعریف 1-4 : کسی بھی بحث میں آفاقی سٹ اُن اعداد کی مجموعیت یا کُلیت ہے جو بہ حیثیت کسی سٹ کے اجزا کے زیر بحث ہیں۔ V کا کوئی جزو C کا جزو نہیں اور اس کے برعکس۔ ایسے متعلق سٹ عام طور پر آتے ہیں اور ایسے دو سٹ کو ہم غیر مشترک سٹ کہتے ہیں۔ دفعہ 1-1 کی مثال 2، کے سٹ ایسے دو غیر مشترک سٹ کی دوسری مثال ہیں۔

تعریف 1-5 : دو سٹ A اور B غیر مشترک ہوں گے اگر اور صرف اگر A اور B میں کوئی بھی جزو مشترک نہ ہو۔ ایک سٹ ایک خاص اہمیت کا ہے۔ خالی سٹ جس کی علامت $\emptyset$ ہے۔ یہ وہ سٹ ہے جس میں کوئی جزو نہیں ہوتا۔ مثلاً وہ سٹ جس کے اجزا وہ ہیں جو V اور C دونوں میں ہوں $\emptyset$ (خالی سٹ) ہے۔ اسی طرح اُن شماری اعداد کا سٹ جو مربع کامل ہوں اور $\frac{1}{2}$ پر ختم ہوتے ہوں خالی سٹ $\emptyset$ کہلاتا ہے۔ یہ کہنا کہ خالی سٹ اُن اجزا پر مشتمل ہے جو مخصوص شرائط کو پورا کرتے ہیں، اس بیان کے مترادف ہے کہ ایسے کوئی اجزا نہیں جو اُن شرائط کو پورا کریں۔ خالی سٹ اپنی تعریف کی بنا پر ہی ہر سٹ کا تحت سٹ ہوگا۔ ایک اور تعریف یہ ہے۔

تعریف 1-6 : دو سٹ A اور B برابر ہوں گے ($A = B$) اگر اور صرف اگر $A \subset B$ اور $B \subset A$۔ اس تعریف کی بنا پر اگر ایک سٹ میں وہ جزو ہے جو دوسرے میں نہیں ہے تو دونوں غیر مساوی ہیں اور ہم اس کو لکھتے ہیں $A \neq B$

مثالیں :

set X = {ایسے اعداد جو 0 اور 10 کے درمیان شماری عدد ہے} = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

set Y = {ایسے اعداد جو 7 سے کم جفت شماری عدد ہے} = {2, 4, 6}

set Z = {ایسے اعداد وہ شماری عدد ہے جس کا مربع مکمل 3 اور 40 کے درمیان ہوگا} = {2, 3, 4, 5, 6}

ان حالات میں کہہ سکتے ہیں کہ $Y \subset Z$، $Y \subset X$ اور $Z \subset X$۔ Z ، X کا واجب تحت سٹ اس طرح ہے کہ $Z \neq X$ مزید $\{3\} \subset X$، $\{3\} \subset Z$ اور $3 \in X$ لیکن ہم یہ نہیں کہہ سکتے کہ $3 \subset X$ (کیوں ؟)

سوالات

سوال نمبر 1 سے 4 تک کے ہر ایک سٹ کی تصریحی اصول سے صراحت کیجیے اور ہر سوال میں آفاقی سٹ لکھیے۔

1. اُن مضامین کا سٹ جو آپ کریڈٹ کے لیے لے رہے ہوں۔
2. آپ کے خاندان کے افراد کی عمریں سالوں میں ۔
3. وہ شماری اعداد جو 100 سے کم ہوں اور 7 کے مثبت ضعف صحیح ہوں۔
4. آپ کے ٹیلی فون نمبر کے مفرد اعداد۔
5. اگر $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ، $B = \{2, 3, 4\}$ اور $C = \{2, 4, 5\}$

تو بتائیے کہ مندرجہ ذیل میں سے کون سے صحیح ہیں :

(a)	$A \subset B$?	(b)	$A \subset C$?	(c)	$B \subset A$?
(d)	$B \subset C$?	(e)	$C \subset A$?	(f)	$C \subset B$?
(g)	$C \subset C$?	(h)	$\emptyset \subset B$?	(i)	$B = C$?

6. سوال نمبر 5 کے سٹ کے لیے :

(a) وہ سٹ کیا ہوگا جس میں B اور C دونوں کے اجزا ہوں۔

(b) وہ سٹ کیا ہوگا جس میں B کے جز ہوں اور $\{1, 5\}$ بھی۔

(c) وہ سٹ کیا ہے جس میں C کے اجزا ہوں اور $\{1, 5\}$ بھی۔

7. اگر $X = \{1, 2, 3\}$ تو Y سٹ بتائیے کہ جس میں $\{1\} \subset Y$ ، $Y \subset X$ اور $X \neq Y$۔

8. (a) سٹ $\{a, b\}$ کے تحت سٹوں کی فہرست بنائیے۔ یاد رکھیے $2^2 = 2 \times 2$ تحت

سٹ ہوں گے۔

(b) سٹ $\{a, b, c\}$ کے تحت سٹوں کی فہرست تیار کیجیے۔ نوٹ کرو کہ اس میں $2^3 = 2 \times 2 \times 2$ تحت سٹ ہوں گے۔

9. سٹ $\{a, b, c, d\}$ کے وہ ممکن تحت سٹ بنائیے جن میں :

(a) چار جزو ہوں (b) تین جزو ہوں (c) دو جزو ہوں (d) ایک جزو ہو (e) کوئی جزو نہ ہو۔

10. سوال 9 میں (a) سے (e) تک کے تحت سٹوں کی مجموعی تعداد کتنی ہوگی ؟ کیا یہ سوال 8 میں دیے گئے نوٹ کے مطابق ہے ؟

11. اگر $D = \{0, 4, 7\}$ ہو تو ہم کہتے ہیں کہ $7 \in D$ یا $\{7\} \subset D$ لیکن یہ نہیں کہہ سکتے کہ $7 \subset D$ کیوں کہ 7 سٹ نہیں ہے۔ مندرجہ ذیل میں سے کون سا صحیح ہے۔

(a) $4 \in D$	(b) $4 \subset D$	(c) $0 \in D$
(d) $\emptyset \in D$	(e) $\emptyset \subset D$	(f) $0 \subset D$
(g) $4 = \{4\}$	(h) $4 \in \{4\}$	(i) $0 = \emptyset$
(j) $0 \in \emptyset$		

12. اگر $a \in X$، $b \in Y$، $X \subset Z$ اور $Y \subset Z$ تو کیا

(a) $a \in Z$ (b) $b \in Z$ (c) $a \in Y$

(d) کیا وہ جزو جو دونوں X اور Y میں ہو Z کا جزو ہو سکتا ہے؟

(e) کیا وہ جزو جو X میں ہو اور Y میں نہ ہو Z کا جزو ہو سکتا ہے؟

(f) کیا Z میں ایسا جزو ہو سکتا ہے جو نہ X کا جزو ہو اور نہ Y کا؟

13. دفعہ 1-5 کی تعریف (A اور B کے غیر مشترک ہونے کی تعریف) ایسے بھی لکھی جا سکتی ہے اگر $a \in A$ تو $a \notin B$ اور اگر $b \in B$ تو $b \notin A$۔

اس قسم کی ترقیم میں $A = B$ کی تعریف کے لیے (تعریف 1-6)۔

*14 دفعہ 1-4 کی تعریف کو استعمال کرتے ہوئے سٹوں کی برابری کی مندرجہ ذیل خصوصیات ثابت کرو :

(a) سٹوں کی برابری معکوس (reflexive) ہوتی ہے۔ کسی بھی سٹ A کے لیے $A = A$

(b) سٹوں کی برابری متشاکل (symmetric) ہے۔ کنہیں دو سٹوں A اور B کے لیے اگر $A = B$ تو $B = A$

(c) سٹوں کی برابری متعدّی (transitive) ہے۔ کنہیں سٹ A ، B اور C کے لیے اگر $A = B$ اور $B = C$ تب $A = C$ کے۔

1-3 سٹوں پر عمل : ایک دفعہ پھر ہم اُس مثال پر آتے ہیں جس میں آفاقی سٹ U انگریزی تہجّی کے تمام حروف کا سٹ ہے، اگر $V = \{a, e, i, o, u\}$ پھر وہی سٹ مانا جائے جس کے اجزا حروف علّت ہوں تو باقی حروف بھی ایک سٹ بنائیں گے (یہاں سٹ C جس کے اجزا تمام حروف صحیح ہیں)۔ عام طور پر ایسا سٹ اصل سٹ کا تتمّہ کہلاتا ہے۔ لہٰذا سٹ C سٹ V کا تتمّہ ہے۔

تعریف 1-7 : کسی بھی سٹ A کا تتمّہ بہ لحاظ کسی دیے ہوئے یا کسی سمجھے ہوئے آفاقی سٹ کے اُن اجزا کا سٹ ہے جو A میں نہ ہوں۔

تتمّہ کے لیے A' لکھتے ہیں اور علامتی طور پر اس طرح لکھا جاتا ہے :

$$A' = \{x | x \in U \text{ اور } x \notin A\}$$

یا اکثر ایسے

$$\boxed{A' = \{x | x \notin A\}.}$$

کیوں کہ یہ مان لیا گیا ہے کہ $x \in U$

اگر $B = \{a, b, c, d, e\}$ جہاں کہ B تحت سٹ ہے اُس سٹ کا جو انگریزی تہجّی کے تمام حروف کا سٹ ہے تو وہ سٹ جس کے اجزا یا تو اس سٹ B میں ہیں یا V میں یا دونوں میں، یہ ہے $D = \{a, b, c, d, e, i, o, u\}$ - ایسا سٹ B اور V کا **اجماع** کہلاتا ہے۔ وہ سٹ جس کے اجزا دونوں B اور V میں ہیں، سٹ $E = \{a, e\}$ ہے۔ سٹ E، سٹ B اور V کا **تقاطع** کہلاتا ہے۔

تعریف 1-8 A اور B دو سٹوں کا اجماع اُن اجزا کا سٹ ہے جو کم از کم ایک سٹ A یا B سے متعلق ہوں*۔

---

* ہماری روزمرّہ زبان میں کلمہ "p یا q" میں لفظ یا کا مفہوم بعض اوقات "p یا q" ہوتا ہے یا دونوں ہی" p اور q "اور بعض دفعہ صرف" یا q "لیکن دونوں" p اور q " نہیں۔ ریاضی میں اس کے مفہوم میں دونوں ہی شامل ہیں جیسا کہ ضابطہ میں استعمال ہوتا ہے " اور/ یا"۔ لہٰذا A یا B کا مطلب ہے "A یا B " یا دونوں ہی " A اور B "۔

† بد قسمتی کی وجہ سے p اور q صحیح اعداد ہوں گے اور درحقیقت p ایک بعد ج

اِس اجماع کو علامتی طور پر لکھتے ہیں $A \cup B$ (پڑھا جاتا ہے " A اجماع B ")

اور لکھتے ہیں $$A \cup B = \{x | x \in A \text{ یا } x \in B\}.$$

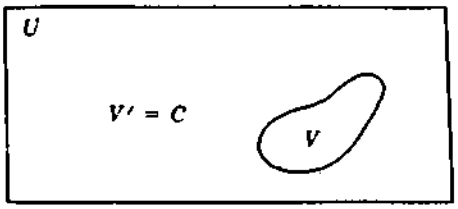
تعریف 1-9 : دو سٹ A اور B کا تقاطع وہ سٹ ہے جو A اور B دونوں میں ہوں۔

تقاطع کو علامتی طور پر لکھتے ہیں $A \cap B$ (پڑھتے ہیں " A تقاطع B ") اور لکھتے ہیں :

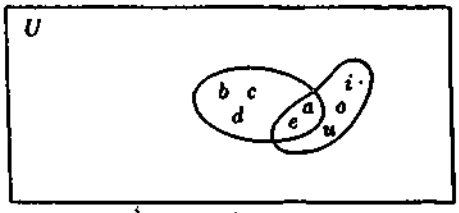
$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ اور } x \in B\}.$$

تحت سٹوں کے آپس کے تعلق کی وضاحت ہم اکثر تصویری نمائندگی سے بہتر طرح کر سکتے ہیں۔

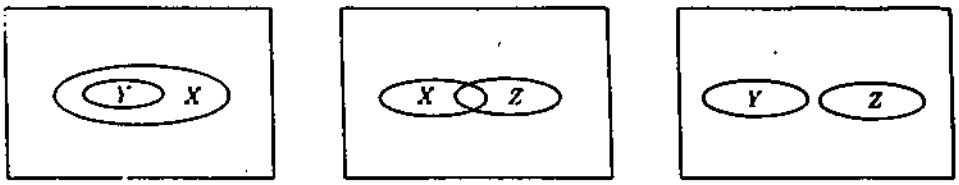
اگر ہم کائنات کو ایک مستطیل سے دکھائیں تو کوئی بھی تحت سٹ A اُس مستطیل میں ایک بند حلقہ سے دکھایا جا سکتا ہے۔ تو A' جو سٹ A کا تتمہ ہے وہ بند حلقہ ہو گا جو مستطیل میں تو ہے لیکن سٹ A کے باہر ہے۔ ایسے خاکے جو انگریز منطقی جان وین (1834–1883) کے نام سے وین خاکے کہلاتے ہیں اُن تمام مسائل کے لیے استعمال کیے جا سکتے ہیں جس میں کتنے ہی سٹوں کی تعداد محدود ہو۔ شکل 1-1 انگریزی تہجی کے تمام حروف کی کائنات کی نمائندگی کرتی ہے۔ V حروف علت کا سٹ ہے اور اُس کا تتمہ $V' = C$ حروف صحیح کا سٹ ہے۔ شکل 1-2 سٹ V اور سٹ B جس میں حروف a اور e مشترک ہیں، کی مثال ہے۔



شکل 1-1



شکل 1-2



شکل 1-3

4. اگر $\frac{1}{17}$ کو اعشاریہ میں ظاہر کیا جائے تو

(a) اِس میں کون سے اعداد کا دوری بلاک بار بار دوہراتا ہے ؟

(b) اعداد کے اِس بلاک میں کتنے ہندسے ہیں ؟

مثال : فرض کرو $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. 8\}$ ایک کائنات ہے، اور $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$، $Y = \{1, 2, 3\}$ اور $Z = \{4, 6, 8\}$ تحت سٹ ہیں۔ اگر ہم اس حصّہ کی تعریفوں کا اطلاق کریں تو

$$X \cup Y = \{1, 2, 3, 4, 5\},$$
$$Y \cup Z = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\},$$
$$Z \cup X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\},$$
$$X \cap Y = \{1, 2, 3\}, \quad Y \cap Z = \emptyset, \quad Z \cap X = \{4\}.$$

ہم اِن سٹوں کے تتمے، تتموں کا اجماع اور تقاطع وغیرہ بھی بنا سکتے ہیں۔ مثلاً

$$X' = \{6, 7, 8\}, \quad Y' = \{4, 5, 6, 7, 8\}, \quad Z' = \{1, 2, 3, 5, 7\},$$
$$(X \cup Y)' = \{6, 7, 8\}, \quad (Y \cap Z)' = \emptyset' = U,$$
$$X' \cup Y' = \{4, 5, 6, 7, 8\}, \quad X' \cap Y' = \{6, 7. 8\}.$$

شکل 1-3 میں سٹ X، Y، Z کے جوڑے بنا کر وین خاکوں سے دکھایا گیا ہے۔

سوالات

اگر $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ہمارے اعشاری طریقہ کے اعدادِ مفرد کا سٹ اور

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}, \quad C = \{4, 5, 6, 7\},$$
$$B = \{2, 3, 4, 5\}, \quad D = \{6, 7, 8, 9\},$$

تو مندرجہ ذیل کو معلوم کیجیے اور فہرست بھی بنائیے :

(a) $A \cup B$, (b) $B \cup C$, (c) $C \cap D$,
(d) $D \cup A$, (e) $B \cap D$, (f) $B \cap C$,
(g) $A \cup \emptyset$, (h) $B \cap \emptyset$, (i) $C \cup U$,
(j) $D \cap U$, (k) B', (l) C',
(m) $(A \cup B)'$, (n) $(B \cap D)'$, (o) $(U \cup \emptyset)'$.

اگر $U = \{ \quad x|x \quad \}$ انگریزی تہجی کا حرف ہے

$A = \{ \quad x|x \quad \}$ یا انگریزی تہجی کے اگلے چار حرفوں میں سے کوئی ایک ہے $= \{a, b, c, d, e\}$

$E = \{ \quad x|x \quad \}$ یا انگریزی تہجی کے اگلے چار حرفوں میں سے کوئی ایک ہے.

$I = \{ \quad x|x \quad \}$ یا انگریزی تہجی کے اگلے چار حرفوں میں سے کوئی ایک ہے

تو معلوم کرو :

(a) $A \cap E$, (b) $E \cap I$, (c) $I \cap \emptyset$,
(d) $\emptyset \cup A$, (e) $A \cup \emptyset$, (f) $E \cap U$.

3. اگر X کسی کائنات U کا تحت سٹ ہو تو ذیل میں دیے گئے بیانات مکمل کیجیے:

(a) $X \cup U$ (b) $X \cap U$ (c) $X \cup \emptyset$
(d) $X \cap \emptyset$ (e) $X \cap X$ (f) $X \cup X$
(g) $X \cup X'$ (h) $X \cap X'$ (i) $\emptyset \cap U$

*4 کسی سٹ A کے لیے، A کے تحت سٹوں کا سٹ جامع و مانع کہلاتا ہے اگر ان تحت سٹوں کا اجتماع A ہو اور غیر مشترک (یاد رکھیے تعریف 1-5) کہلاتا ہے اگر کسی بھی دو تحت سٹوں میں کوئی بھی جزو مشترک نہ ہو۔ اگر $A = \{a, b, c\}$ تو بتائیے مندرجہ ذیل تحت سٹوں کے سٹ جامع و مانع ہوں گے یا غیر مشترک۔

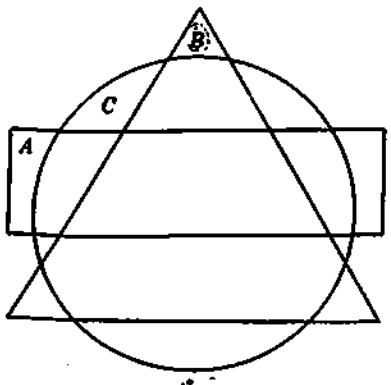
(a) $\{a\}, \{b\}$ (b) $\{a\}, \{b, c\}$ (c) $\{a, b\}, \{b, c\}$
(d) $\{a\}, \{a, b\}$ (e) $\{a\}, \{b\}, \{c\}$

شکل 1-4 کے خاکے میں مستطیل کا داخلی رقبہ سٹ A کی نمائندگی کرتا ہے۔ مثلث سٹ B کی اور دائرہ سٹ C کی۔ تو مندرجہ ذیل کس رقبے کو بتاتے ہیں:

(a) $A \cup B$, (b) $A \cap B$,

(c) $A \cap C$, (d) $B \cup C$,

(e) $(A \cup B) \cap C'$, (f) $(A \cup B)' \cap C$.



شکل 1-4

6. وین (Venn) خاکوں کی مدد سے ثابت کرو کہ

(a) $A \cup B = B \cup A$,
(b) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$,
(c) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
(d) $(A \cup B)' = A' \cap B'$.

7. وین خاکوں کے ذریعے ثابت کرو کہ

(a) $A \cap B = B \cap A$,
(b) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$,
(c) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,
(d) $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

8. وین خاکوں کی مدد سے ثابت کرو کہ

(a) $A \cup B = A$، اگر اور صرف اگر $B \subset A$

(b) $A \cap B = B$، اگر اور صرف اگر $B \subset A$

(c) $B \subset A$، اگر اور صرف اگر $A' \subset B'$

(d) $(A')' = A$

9. A اور B سٹ پر مندرجہ ذیل عمل کن شرائط پر ہوگا؟

(a) $A \cap B = \emptyset$ (b) $A \cap B = U$ (c) $A \cup B = U$
(d) $A \cup B = \emptyset$ (e) $A \cap B = A$ (f) $A \cup B = A$
(g) $A \cap \emptyset = \emptyset$ (h) $A \cap U = A$ (i) $A \cup U = U$
(j) $A \cup U = A$ (k) $A \cup \emptyset = U$ (l) $A \cup \emptyset = \emptyset$

*10. اگر $n(A)$ سٹ A کے اجزا کا شمار بتاتا ہے تو سوال 4 میں $n(A) = 3$ کے۔ ایسے دو محدود سٹ A اور B کی ایک مثال دیجیے جس میں

(a) $n(A \cup B) = n(a) + n(b)$, (b) $n(A \cup B) \neq n(A) + n(B)$.

A اور B پر کیا پابندی لگائی جائے کہ (a) ہمیشہ صحیح ہو۔

*11 وین خاکہ کی مدد سے کہیں دو محدود سٹ A اور B کے لیے ثابت کیجیے

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

*12. بعض اوقات یہ مناسب معلوم ہوتا ہے کہ سٹ کے اجزا کے درجے کو ملحوظ رکھا جائے۔ اجزا کے جوڑوں میں جن میں سے ایک کو امتیازی طور پر پہلا درجہ دیتے ہیں اور دوسرے کو (خواہ وہ

مختلف نہ بھی ہوں) دوسرا درجہ' اور اس کو ہم مرتّب جوڑا کہتے ہیں۔ ہم ایسے مرتب جوڑے کو (x, y) سے تعبیر کرتے ہیں جہاں x پہلا اور y دوسرا جزو ہے۔ یہ $\{x, y\} = \{y, x\}$ سے قطعی مختلف ہے۔ کیوں کہ سٹ کے اجزا کو مرتّب کرتے وقت اُن کی درجہ وار ترتیب غیر اہم ہے۔ ہم (x, y) اور (y, x) میں امتیاز کرنا چاہتے ہیں اور اس بات کو ہم دو مرتّب جوڑوں کی مساوات کی تعریف سے ظاہر کرنا چاہتے ہیں۔ دو مرتّب جوڑے (x_1, y_1) اور (x_2, y_2) برابر ہوں گے اگر اور صرف اگر $x_1 = x_2$ اور $y_1 = y_2$ ہو۔

اگر X اور Y سٹ ہوں تو ایسے مرتّب جوڑوں (x, y) کے سٹ کو جس میں $x \in X$ اور $y \in Y$ ہوں ضربی سٹ کہتے ہیں۔ یا X اور Y کا کارتیزی ضرب، اور اُس کو $X \times Y$ سے ظاہر کرتے ہیں۔ علامات میں:

$$X \times Y = \{(x, y) | x \in X \text{ اور } y \in Y\}$$

مثال کے طور پر اگر $X = \{a, b\}$ اور $Y = \{1, 2\}$ تب $X \times Y$ اِن مرتب جوڑوں کا سٹ ہوگا $(1, a)$، $(1, b)$، $(2, a)$، $(2, b)$ حالانکہ $Y \times X$ مرتب جوڑوں کا سٹ ہے $(a, 1)$، $(b, 1)$، $(a, 2)$، $(b, 2)$

اس لیے $X \times Y \neq Y \times X$

مرتب جوڑوں کے وہ تمام سٹ اِن ضربی سطحوں کے لیے معلوم کرو:

اگر $X \times X$، $X \times Y$، $Y \times X$ اور $Y \times Y$

(a) $X = \{a\}$, $Y = \{b\}$,
(b) $X = \{a, b\}$, $Y = \{c\}$,
(c) $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$.

1-4. اعداد صحیح:

سب سے پہلے اعداد کے جس سٹ سے ہر شخص دوچار ہوتا ہے وہ اِن شماری اعداد $1, 2, 3, \ldots$ کا سٹ ہے جن کے بارے میں سٹ کے متعلق

اِس نام کی وجہ تسمیہ باب چہارم کی بحث سے معلوم ہوگی۔

بحث میں ہم نے اکثر حوالہ دیا ہے۔ ریاضی داں اعداد کے اِس سٹ کو **خصوصی مثبت، صحیح اعداد یا طبیعی اعداد کا سٹ** کہتے ہیں اور اس کو اپنے تمام اعدادی نظام کی بُنیاد مان کر استعمال کرتے ہیں۔ اعداد کا یہ سٹ معہ منفی صحیح اعداد $\ldots -3, -2, -1$ اور صفر صحیح عدد کے صحیح اعداد کا مکمّل سٹ بناتا ہے جس کو ہم صرف I سے تعبیر کریں گے۔

کسی بھی اعدادی نظام کے مطالعے میں مثلاً صحیح اعداد کے سٹ معہ اعداد کے، ہم اپنے آپ کو اِن اعداد پر چند بُنیادی عمل سے ہی متعلق کریں گے۔ دو سب سے زیادہ بُنیادی عمل، جوڑ اور ضرب کے ہیں۔

تعریف 1-10 : اگر A اعداد کا ایک سٹ ہے تو A جوڑ کے عمل کے تحت بند کہلائے گا خواہ A کے کسی بھی دو اعداد کا جوڑ A میں ہی ہو۔

یہ جوڑ کی بند والی خصوصیت کہلاتی ہے۔ اسی طرح کی تعریف ضرب کے لیے بھی دی جا سکتی ہے اور درحقیقت کسی بھی عمل کے لیے صحیح اعداد کے سٹ کی ایک بہت ہی مشہور خصوصیت یہ ہے کہ اگر کوئی دو صحیح اعداد جوڑے جائیں یا آپس میں ضرب کیے جائیں تو حاصل بھی صحیح عدد ہوگا۔ مندرجہ بالا تعریف کے تحت ہم کہتے ہیں کہ I جوڑ اور ضرب کے تحت بند ہے۔ درحقیقت بہت سے ایسے سٹ بھی ہیں جن کے اجزا صحیح عدد ہیں مگر جوڑ یا ضرب کے تحت بند نہیں ہیں۔ $\{1, 2, 3\}$ کا سٹ ایک ایسا ہی سٹ ہے۔ نہ ہی عدد 5 جو 2 اور 3 کا جوڑ ہے اور نہ عدد 6 جو اِن کا حاصل ضرب ہے سٹ میں ہیں۔ سٹ $\{-1, 0, 1\}$ جوڑ کے تحت بند نہیں ہے لیکن ضرب کے تحت بند ہے۔

سوالات

1. ہم نے دیکھا کہ صحیح اعداد I کا سٹ جوڑ اور ضرب کے تحت بند ہے۔ کیا وہ :
   (a) تفریق (گھٹانا) (b) تقسیم کے تحت بھی بند ہے ؟

• خصوصی مثبت صحیح اعداد کے سٹ اور کوئی بھی مثبت صحیح اعداد کے سٹ کے فرق کو نوٹ کیجیے۔ خصوصی سٹ سے مراد ہے تمام صحیح اعداد کے سٹ۔ جبکہ کسی بھی مثبت صحیح اعداد کے سٹ سے مطلب صرف یہی ہے کہ اس کے اجزا صحیح اعداد ہیں لیکن یہ ضروری نہیں ہے کہ لازمی طور پر اس میں سبھی صحیح اعداد شامل کر لیے گئے ہیں۔

2. کیا طبعی اعداد کا سٹ ذیل کے عمل کے تحت بند ہے ؟
(a) جوڑ (b) ضرب (c) تفریق (d) تقسیم

3. ذیل کے سٹ کا مطالعہ جوڑ اور ضرب کے تحت بند ہونے والی خصوصیت کے حوالے سے کیجیے :

(a) {1}, (b) {1, 2, 3, 4, 5, 6}, (c) {1, 0}.

4*. ایک جفت طبعی عدد کوئی سا بھی طبعی عدد ہے جس کو ہم $2k$ سے ظاہر کر سکتے ہیں جہاں k ایک طبعی عدد ہے ۔ کیا جفت طبعی اعداد کا خصوصی سٹ (a) جوڑ (b) ضرب کے تحت بند ہوگا؟

5*. طاق طبعی عدد کی تعریف لکھیے۔ کیا طاق طبعی اعداد کا خصوصی سٹ (a) جوڑ (b) ضرب کے تحت بند ہوگا؟

تعریف 1-11 : اگر a ، b اور c ایسے صحیح اعداد ہیں $a \cdot b = c$ کے تو a یا b ، c کے اجزا یا قاسم کہلائیں گے اور c ، a یا b کا مضرب کہلائے گا۔

اس طرح 2 ، 3 اور 5 ، 30 کے اجزا ہیں جیسا کہ 6— یا 15— یاد رکھیے (سوال 4)۔

ایک جفت صحیح عدد وہ ہے جس کا جزو 2 ہو (یا 2 کا ضعف ہو)۔ اگر ہم طاق صحیح عدد کی یہ تعریف کریں کہ کوئی بھی صحیح عدد جو جفت نہ ہو تو کسی بھی طاق عدد کو $2k + 1$ سے ظاہر کیا جا سکتا ہے جہاں k کوئی صحیح عدد ہے۔ عدد 8— جفت ہوگا کیوں کہ $-8 = 2 \cdot -4$ جب کہ 9 طاق ہوگا کیوں کہ $9 = 2 \cdot 4 + 1$

تمام مثبت صحیح اعداد کو سوائے عدد 1 کے دو حصّوں میں بانٹا جا سکتا ہے یا تو مخلوط اعداد یا مفرد اعداد۔ ایک مثبت صحیح عدد مخلوط عدد کہلاتا ہے۔ اگر وہ 1 سے مختلف ہو اور اُس کو 2 یا اُس سے زیادہ مثبت صحیح اعداد کے حاصل ضرب سے ظاہر کیا جائے جو اُس کے اجزا ہوں۔ کچھ عددوں میں یہ اجزا برابر بھی ہو سکتے ہیں۔ مثلاً 4 ، 6 ، 9 اور 12 مخلوط اعداد ہیں کیونکہ $4 = 2 \cdot 2$ ، $6 = 3 \cdot 2$ ، $9 = 3 \cdot 3$ اور $12 = 3 \cdot 2 \cdot 2$ ۔ درحقیقت ہر وہ جفت عدد جو 2 سے بڑا ہے مخلوط عدد ہوگا۔

مفرد عدد اُس مثبت صحیح عدد کو کہتے ہیں جو 1 سے مختلف ہو اور مخلوط عدد نہ ہو۔ دوسرے الفاظ میں اس کو آسان ترین طریقے سے دو مثبت صحیح اعداد کے ایسے حاصل ضرب سے ظاہر کیا جا سکتا ہے جس میں وہ صحیح عدد خود ایک جزو ہو اور دوسرا جزو صحیح عدد 1 ہو۔ مفرد اعداد کی مثالیں 2 ، 3 ، 5 ، 7

کسی بھی مخلوط عدد کے حصّوں کی تحویل یعنی ایسے عدد کو دو مفرد اعداد کے حاصل ضرب سے ظاہر کرنا اہم ترین ہے۔ ایسے مرکّب کے حصوں کی تحویل ہمیشہ ممکن ہے کیوں کہ ہر وہ جزو جو مخلوط ہو اپنے چھوٹے اجزا کے حاصل ضرب سے ظاہر کیا جا سکتا ہے یہاں تک کہ تمام اجزا مفرد ہوں گے۔ مثلاً :

$60 = 12 \cdot 5 = 4 \cdot 3 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$. اس کے علاوہ مرکّب حصّوں کی تفریق یکتا[*] ہے حالانکہ اس کا ثبوت ہماری بحث سے بالاتر ہے۔ خاص طور سے ایک مخلوط عدد کو اُس کے مفرد اجزا کے حاصل ضرب سے ایک اور صرف ایک ہی طریقے سے ظاہر کیا جا سکتا ہے سوائے اُن اجزا کی ترکیب کے۔ پس 60 کو اس طرح ظاہر کر سکتے ہیں $15 \cdot 4 = 5 \cdot 3 \cdot 4 = 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2$. دو اعداد صحیح متباین یا ایک دوسرے کے مفرد کہلاتے ہیں اگر اُن میں کوئی مفرد جزو مشترک نہ ہو۔ دفعہ 5-3 میں اجزا کے متعلق پھر تفصیل سے بحث کریں گے۔

سوالات

1. 12 اور 120 کے تمام اجزا کی فہرست بنائیے۔
2. 30 اور 50 کے مشترک مقسوم علیہ کی فہرست بنائیے۔
3. اگر E تمام جفت صحیح اعداد کا سٹ ہو اور O تمام طاق صحیح اعداد کا سٹ ہو تو غور کرو کہ $E \subset I$ اور $O \subset I$ تو مندرجہ ذیل کے متعلق کیا کہا جا سکتا ہے :

(a) $E \cup O$ (b) $E \cap O$

4. اگر E تمام جفت اعدادِ صحیح کا سٹ ہو (2 کے صحیح ضعف) اور T، 3 کے تمام ضعفِ صحیح کا سٹ تو $E \cap T$ کے متعلق کیا کہا جا سکتا ہے ؟
5. اگر S سٹ ہو 6 کے تمام ضعف صحیح کا اور T سٹ ہو 10 کے تمام ضعفِ صحیح کا

---

[*] اس بیان کے ثبوت کے لیے اور مفرد اعداد کی تفصیلی بحث کے لیے دیکھیے آر۔ کورانٹ (R. Courant) اور ایچ۔ رابنس (H. Robbins) کی کتاب "ریاضی کیا ہے ؟" نیویارک؛ آکسفورڈ یونیورسٹی پریس، 1941 ؛ اور ہیریٹ گریفن (Harriet Griffin) کی کتاب *Elementary Theory of Numbers* ، نیویارک، میک گرا۔ ہل بک کمپنی، 1954 ۔

ہے۔ جس میں وہ صحیح عدد خود ایک جزو ہو اور دوسرا جزو صحیح عدد 1 ہو۔ مفرد اعداد کی مثالیں 2 ، 3 ، 5 ، 7 ۔

تو $S \cap T$ کے متعلق کیا کہا جا سکتا ہے؟ سوال 4 اور اس سوال کے نتیجے کے طور پر آپ کوئی تعمیم کر سکتے ہیں۔

6. 1 اور 100 کے درمیان مفرد اعداد کی فہرست بنائیے۔

7. اُقلیدس (تیسری صدی قبل مسیح) نے اپنی نویں کتاب 'اجزا' (*Elements*) میں ثابت کیا ہے کہ سٹ $\{p \mid p$ ایک مفرد عدد ہے$\}$ ایک لامتناہی سٹ ہے۔ کیا یہ سٹ (a) جوڑ (b) ضرب کے تحت بند ہے؟

8. بہت سے مفرد ایسے جوڑوں میں آتے ہیں جن میں ایک صحیح عدد کا فرق ہوتا ہے۔ ایسے جوڑے ہیں 3 اور 5، 5 اور 7، 11 اور 13، اور 17 اور 19 درحقیقت صرف یہ قیاس کر لیا گیا ہے لیکن ثابت کبھی نہیں کیا گیا کہ ایسے جوڑوں کی تعداد لامتناہی ہے۔ 100 سے کم والے ایسے جوڑوں کی فہرست بنائیے۔

9. بہت سے ریاضی داں ایک ایسی رقم (جملہ) معلوم کرنے کی ناکام کوشش کر چکے ہیں جس کا نتیجہ ایک مفرد عدد ہو۔ مندرجہ ذیل جملہ پر غور کرو:

$$p = n^2 - n + 41^*$$

(a) اگر $n = 1, 2, 3, 4, 5$ کے لیے p کی کیا قیمت ہوگی؟

(b) اگر $n = 9, 10, 11$ کے لیے اس کی قیمت کیا ہوگی؟

(c) کیا p کی (a) اور (b) کی قیمتیں مفرد اعداد ہیں؟

(d) اگر $n = 41$ تو p کی قیمت کیا ہوگی؟ کیا یہ مفرد عدد ہوگا؟

10. یاد کرو کہ کوئی بھی جفت صحیح عدد n کو $n = 2k$ سے ظاہر کر سکتے ہیں جہاں k کوئی بھی صحیح عدد ہو۔ اس تعریف کے مدِّ نظر یہ ثابت کرو کہ

$E = \{x \mid x$ ایک جفت صحیح عدد ہے$\}$

(a) جوڑ (b) ضرب کے تحت بند ہوگا۔

---

* n^2 کے معنی ہیں n مرتبہ n۔

11. ثابت کرو کہ سٹ $\{\ \}$ ایک طاق عدد صحیح ہے $|\ | = 0$ ضرب کے تحت بند ہوگا۔

12. ثابت کرو کہ ایک جفت صحیح عدد کا مربع جفت اور طاق صحیح عدد کا مربع طاق ہوتا ہے۔

*13. ثابت کرو کہ اگر کسی بھی عدد صحیح کا مربع جفت ہے تو عدد صحیح خود جفت عدد ہوگا (یاد کرو کہ کوئی بھی عدد صحیح جفت یا طاق ہوگا اور سوال 14 استعمال کرو)۔

14. ثابت کرو کہ اگر ایک صحیح عدد، صحیح عدد a کا ضعف ہے تو اس کا مربع بھی a کا ضعف ہوگا۔

1-5. ناطق اور غیر ناطق اعداد: اعداد کی بہ حیثیت ناطق درجہ بندی میں ایک صحیح عدد سے دوسرے صحیح عدد کو تقسیم کر کے خارج قسمت* بنانا شامل ہے۔ اگر a ایک صحیح عدد ہے اور b بھی ایک ایسا صحیح عدد ہے جو صفر سے مختلف ہے تو $\frac{a}{b}$ کو ہم عدد c سے تعبیر کر سکتے ہیں جہاں c کو اگر b سے ضرب دیں تو a کے برابر ہو یعنی c ایک خارج قسمت ہے اور اُس کو مساوات $cb = a$ سے ظاہر کر سکتے ہیں۔ $\frac{a}{0}$ قسم کی کسر کی تصریح نہیں کی گئی ہے، اس لیے ہم کہتے ہیں کہ $\frac{a}{0}$ قسم کی کسر کا وجود نہیں ہے اور صفر سے تقسیم کی اجازت نہیں ہے۔

تعریف 1-12: ناطق عدد وہ عدد ہے جس کو ہم دو صحیح اعداد کے خارج قسمت یا دو صحیح اعداد کی نسبت سے ظاہر کر سکتے ہیں (اس میں صفر سے تقسیم کرنے کی اجازت نہیں ہے)۔

اس قسم کے اعداد کے کُل سٹ کو ناطق اعداد کا سٹ کہتے ہیں اور اُس کو F سے ظاہر کرتے ہیں۔ اعداد $\frac{5}{9}$، $-1\frac{1}{2}$ اور 1.414 ناطق اعداد ہیں۔ عدد 1.414 جو $\sqrt{2}$* کی تقریب ہے، ایک ناطق عدد ہے کیوں کہ $1.414 = \frac{1414}{1000}$

کوئی بھی ناطق عدد بہ حیثیت اعشاریہ کے لکھا جا سکتا ہے۔ مثلاً: $1.75 = \frac{7}{4}$ یا $0.1818\ldots = \frac{2}{11}$ کسر اعشاریہ 1.75 مختتم کہلاتا ہے۔ جبکہ 0.1818... دوری*

* لفظ خارج قسمت کی تعریف دفعہ 2-4 میں کی گئی ہے۔

* وہ عدد جو اپنے آپ سے ہی ضرب دیا جائے تو حاصل ضرب 2 ہو۔

* دوری اعشاریہ سے ہمارا مطلب اُس ہندسہ یا ہندسے کے گروہ سے ہے جو یا تو اپنے آپ کو اعشاریہ سے دوہراتے ہیں (0.161616...) یا کسی خاص منزل کے بعد سے (3.2454545...)

یا دوری اعشاریہ۔ کیوں کہ دو ہندسہ 18 اپنے آپ کو دوہراتے ہیں۔ یقیناً ایک ناطق عدد اِس حقیقت سے پہچانا جاسکتا ہے کہ اس کا اعشاریائی پھیلاؤ یا تو ختم ہوجاتا ہے اور اگر ختم نہ ہونے والا ہو تو دوری ہوتا ہے۔ اعداد جو بہ حیثیت اعشاریہ کے ظاہر کیے گئے ہیں اگر غیر دوری اور غیر مختتم ہوں تو ناطق نہیں ہوتے۔ مثلاً اعداد $\sqrt{2}$ ، π (کسی دائرے کے محیطی دائرہ اور اُس کے قطر کا تناسب) اور e (جو احصا میں بہ حیثیت لوکارتم کے اساس کے استعمال ہوتا ہے) جو کہ دو اعداد صحیح کے خارج قسمت کی حیثیت سے ظاہر نہیں کیا جاسکتا، کو مختتم یا نہ ختم ہونے والے دوری اعشاریہ کی حیثیت سے لکھ سکتے ہیں۔

اس بات کا ثبوت کہ π اور e ناطق نہیں ہیں، کافی مشکل ہے اور اس میں اس قدر علم ریاضی کی ضرورت ہے جو ہمارے احاطہ میں نہیں ہے، پھر بھی نسبتاً ایک آسان ثبوت کہ $\sqrt{2}$ ناطق نہیں ہے، ممکن ہے۔ ہمارا طریقۂ ثبوت یہ مان کر ہوگا کہ مسئلہ کا بیان جو ہم ثابت کرنا چاہتے ہیں، غلط ہے۔ اس مفروضہ پر ہم اپنے علم کے لحاظ سے مدلل طور پر کام کریں اور ترتیبی نتیجہ پر پہنچ جائیں۔ اِس تردید کی بنا پر ہم یہ خود محسوس کریں گے کہ ہمارا مفروضہ غلط تھا اور نتیجے کے طور پر مسئلہ کا بیان یقیناً صحیح ہوگا۔ ایسے دلائل کو عام طور پر ثبوت بالواسطہ یا *reductio ad absurdum* کہتے ہیں۔

مسئلہ 1-1 : عدد $\sqrt{2}$ ناطق عدد نہیں ہے۔

ثبوت : کیوں کہ ہم یہ ثابت کرنا چاہتے ہیں کہ کوئی بھی ایسے اعداد صحیح p اور q موجود نہیں ہیں $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$ کے تو ہم مان کر چلیں کہ ایسے دو صحیح اعداد موجود ہیں۔ مزید یہ کہ اگر ایسے دو صحیح اعداد موجود ہیں تو ہم اپنی کسر $\frac{p}{q}$ کو کسی مشترک ضعف سے تقسیم کرکے اُس کی کمترین ارکان میں حل کریں۔ اس لیے

$$\frac{p}{q} = \sqrt{2}, \qquad (1\text{-}1)$$

جہاں p اور q متباین ہیں۔ اگر ہم اِس مساوات کے ہر جزو کو q سے ضرب دیں اور اُس کا مربع کریں تو ہمیں حاصل ہوگا

$$p^2 = 2q^2. \qquad (1\text{-}2)$$

I کی بند خصوصیت کی وجہ سے p^2 اور q^2 صحیح اعداد ہوں گے اور درحقیقت p^2 ایک جفت صحیح

عدد ہوگا۔ سوال 13 کے نتیجے کے طور پر p ایک جفت صحیح عدد ہے اور ہم اس کو $2r$ کے برابر رکھتے ہیں جہاں r ایک صحیح عدد ہے۔ اس لیے $p = 2r$ ۔ اگر p کی اس قیمت کو مساوات (1-2) میں رکھ دیں تو $4r^2 = 2q^2$ یا $2r^2 = q^2$ اور اس لیے q^2 ایک جفت عدد صحیح ہوگا۔ اس سے ثابت ہوتا ہے کہ q ایک صحیح عدد ہے۔ اب ہم اپنے مفروضہ کی ضد پر آگئے یعنی یہ کہ دو متباین صحیح اعداد p اور q دونوں میں 2 بہ حیثیت جزو کے مشترک ہے۔ اس لیے ہمارا اصل مفروضہ ناممکن ہے اور کوئی بھی ایسے دو صحیح اعداد p اور q موجود نہیں ہیں جہاں $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$ کے یعنی $\sqrt{2}$ ناطق نہیں ہے۔

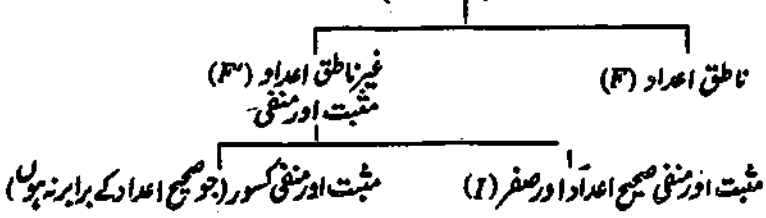
اگر ہم کسور کو جوڑنے یا ضرب کرنے کے اُس طریقے کو جانتے ہوں جس سے دفعہ 7-3 یا دفعہ 8-3 میں بحث کی گئی ہے تو یہ ثابت کرنا مشکل نہ ہوگا کہ F جوڑنے یا ضرب دینے کے تحت بند ہوگا۔ F بہ نسبت I کے زیادہ مفید ہے کیوں کہ درحقیقت F چاروں ابتدائی عمل کے تحت بند ہوگا جس میں تفریق کرنا اور تقسیم دینا (علاوہ صفر کے) بھی شامل ہے۔ پھر بھی یہ نظام وہ نہیں ہے جو قطعی طور پر تسلی بخش ہو کیوں کہ یہ اعداد جن کو اگر اعشاریہ میں لکھا جائے تو اُن کو بغیر دور کے لاانتہا تک جاری رہنے کی اجازت دے۔ مثلاً عدد $0.1010010001\ldots$ کی اجازت نہیں ہے۔

اُن اعداد کا پورا سٹ جس کو اعشاریہ میں ظاہر کیا جا سکتا ہے (مختتم یا غیر مختتم) حقیقی اعداد کا سٹ کہلاتا ہے۔ اور وہ اعداد جو اس سٹ میں ناطق نہیں ہیں، غیر ناطق اعداد کا سٹ بناتے ہیں۔ اگر ہم تمام حقیقی اعداد کے سٹ کو R کہیں تو $I \subset F \subset R$۔ مزید برآں R جو آفاقی سٹ ہو۔ F' "تتمہ" ہو F کا تو اس سے تمام غیر ناطق اعداد کے سٹ کو ظاہر کر سکتے ہیں۔ بدقسمتی سے F' جوڑ کے تحت بند نہیں ہے کیوں کہ مثلاً $\sqrt{2}$ اور $-\sqrt{2}$ کا جوڑ (یہ وہ عدد ہے جس کو ہم آسانی سے غیر ناطق ثابت کر سکتے ہیں۔ دیکھیے سوال 10) صفر ہے جو کہ ناطق عدد ہے۔ نہ ہی F' ضرب کے تحت بند ہے کیوں کہ $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$ کے۔ بہرحال کوئی بھی غیر ناطق عدد ناطق عدد کے

• اگر کوئی بیان یا مسئلہ ثابت کیا جائے تو وہ تمام ممکن حالات کے لیے ثابت ہو۔ اگر دوسری طرف کسی بیان کو غلط ثابت کرنا ہو تو ایک ہی مثال جس کے لیے بیان غلط ہو کافی ہے۔

تقریباً برابر رکھا جاسکتا ہے۔ مثلاً وہ ناطق عدد جو $\sqrt{2}$ کے اعشاریہ کے تین مقام تک صحیح ہو، تقریباً برابر رکھا جاسکتا ہے 1.414 ہے۔ ناطق عدد $\frac{22}{7}$ ، π کا ایک عام تقریب ہے جبکہ 3.1410 زیادہ صحیح ہے۔

تمام حقیقی اعداد کے سٹ کی مندرجہ ذیل طریقے پر درجہ بندی کی جاسکتی ہے :


حقیقی اعداد (R)
ناطق اعداد (F)
غیر ناطق اعداد (F')
مثبت اور منفی
مثبت اور منفی صحیح اعداد اور صفر (I)
مثبت اور منفی کسور (جو صحیح اعداد کے برابر نہ ہوں)

ہم اِس کتاب میں ابتدائی طور پر حقیقی اعداد سے بحث کریں گے لیکن ان کی توسیع یا تعمیم سے دوسرے قسم کے اعداد بھی پیدا ہوں گے۔ مثلاً باب 16 میں ہم ملتف اعداد کے سٹ سے بحث کریں گے جس میں حقیقی اور غیر حقیقی اعداد دونوں ہی شامل ہیں۔ پھر بھی جب تک اس کے خلاف نہ کہا جائے تمام اعداد حقیقی اعداد کے سٹ میں شامل سمجھے جائیں گے اور R ہمارا آفاقی سٹ ہوگا۔

سوالات

1. ثابت کرو کہ تعریف 1-12 کے تحت مندرجہ ذیل اعداد ناطق ہیں :

(a) 0.6 (b) $4\frac{3}{7}$ (c) -14.73 (d) 0

2. ثابت کرو کہ مندرجہ ذیل ناطق اعداد ہیں :

(a) $-6 + \frac{3}{4}$ (b) $(2/3)/(5/2)$
(c) $(2 + \sqrt{5}) + (7 - \sqrt{5})$

3. ثابت کرو کہ مندرجہ ذیل اعداد بہ حیثیت مختتم یا دوری اعشاریہ کے ظاہر کیے جاسکتے ہیں اور اس لیے ناطق ہوں گے :

(a) $\frac{3}{8}$ (b) $\frac{4}{7}$ (c) $\frac{1}{3\frac{1}{3}}$ (d) $\frac{1}{17}$

اگر $\frac{1}{17}$ کو اعشاریہ میں ظاہر کیا جائے تو

(a) اِس میں کون سے اعداد کا دوری بلاک بار بار دوہراتا ہے ؟

(b) اعداد کے اِس بلاک میں کتنے ہندسے ہیں ؟

(c) عملِ تقسیم کی ہر منزل میں جو اس بلاک کو حاصل کرنے کے لیے عمل میں لایا جائے باقی کیا کیا ہیں؟

(d) اگر p کو q سے تقسیم کیا جائے جس میں صحیح عدد p صحیح عدد q سے کم ہو تو اس کا نتیجہ ہمیشہ مختتم یا دوری اعشاریہ کیوں ہوگا؟ واضح کرو۔ اس کی وضاحت کس مسئلہ کے ثبوت کا خلاصہ ہے؟

5 ثابت کرو کہ مندرجہ ذیل اعداد کو دو صحیح اعداد کے خارج قسمت کی حیثیت سے ظاہر کیا جا سکتا ہے:

(a) $3.242424\ldots$ [اگر ہم فرض کریں کہ $x = 3.242424\ldots$ تو اگر ہم ان دونوں مساوات کے مطابق تفریق کریں تو حاصل ہوگا $99x = 321$ یا $x = \frac{107}{33}$]

(b) $6.272727\ldots$ (c) $5.818181\ldots$

(d) $0.555\ldots$ (e) $0.142857142857\ldots$

6. (a) ایک ایسے طریقے کا خلاصہ لکھیے جو نتیجے کے طور پر سوال 5 کا حل ہو۔

(b) یہ طریقہ کون سے مسئلے کے ثبوت کا خاکہ ہے؟

7. ثابت کرو کہ سٹ F بند ہے (a) جوڑ کے تحت [اشارہ: اگر $a = \frac{p}{q}$ اور $b = \frac{r}{s}$ تو کیا $a + b$ کو دو صحیح اعداد کے مقسوم علیہ کی حیثیت سے ظاہر کر سکتے ہیں؟] (b) ضرب کے تحت (c) تفریق کے تحت (d) تقسیم کے تحت۔

8. R کو آفاق مان کر ایک وِین (Venn) کا خاکہ کھینچیے اور اُس میں تحت سٹ F، F' اور I ظاہر کرو۔

9. اگر ہم یہ مان لیں کہ $\sqrt{3}$ ناطق نہیں ہے تو ثابت کرو کہ $5 + \sqrt{3}$ بھی ناطق نہ ہوگا۔

10. ثابت کرو کہ $-\sqrt{2}$ ناطق نہیں ہوگا۔

11. ثابت کرو کہ $\frac{a + b\sqrt{2}}{c}$ ناطق نہیں ہے جہاں a، b اور c صحیح اعداد ہیں اور c صفر نہیں ہے۔

12. ثابت کرو کہ ایسا کوئی ناطق عدد موجود نہیں ہے جس کا مکعب 2 ہو۔

1–6 تساوی:

ہم دو سٹ کے مساوی ہونے کے متعلق تعریف کو یاد کریں۔ ہم کو ماننا چاہیے کہ عام طور سے تساوی تعلق معکوس، متشاکل اور متعدّی ہوتا ہے

(دیکھیے سوال 14 ، دفعہ 2-1) ۔خصوصی طور پر R کے تمام عنصر a ، b ، c کے لیے :

مسلّمہ 1 : برابری کے لیے معکوس خصوصیت : $a = a$

مسلّمہ 2 : برابری کے لیے متشاکل خصوصیت : اگر $a = b$ تو $b = a$ کے۔

مسلّمہ 3 : برابری کے لیے متعدّی خصوصیت : اگر $a = b$ کے اور $b = c$ کے تو $a = c$ کے۔

اِن کے ساتھ ہی ہمیں جوڑنے اور ضرب دینے کی خصوصیات بھی مان لینی چاہئیں۔

مسلّمہ 4 : برابری کی جوڑ کی خصوصیت : اگر $a = b$ کے اور $c = d$ کے تو $a + c = b + d$ کے۔

مسلّمہ 5 : برابری کے ضرب کی خصوصیت : اگر $a = b$ کے اور $c = d$ کے تو $a \cdot c = b \cdot d$ کے۔

نتیجے کے طور پر ہمیں مان لینا چاہیے کہ کسی بھی رقم یا جملہ میں کسی بھی مقدار کی جگہ برابر کی مقدار رکھی جاسکتی ہے۔

تساوی کے بُنیادی تخیّل کو ہم مشکل ترین بنانا نہیں چاہتے بلکہ ہم واضح طور پر بتانا چاہتے ہیں کہ ہم درحقیقت کیا مفروضات بنانا چاہتے ہیں اور ہم اُن کو عموماً بغیر کسی مخصوص تنقید کے استعمال کریں گے۔

ریاضی میں دو اہم قسم کی مساوات ہوتی ہیں متماثلہ اور مشروط مساوات ۔ اِن دونوں کی بہت سی خصوصیات یکساں ہیں لیکن مطلب میں فرق ہے۔ ہم کو اِن میں امتیاز کرنا چاہیے۔

تعریف 1-13 : ذاتی مساوات برابری کا وہ بیان ہے جو کہ تمام اُس میں شامل حروف کی جائز قیمت* کے لیے سچ ہو۔

ایسی ہر ذاتی مساوات کو اُس کی فطرت کی اہمیت پر زور دینے کے لیے ہم اُس کو اس نشان سے ظاہر کریں گے۔ مندرجہ ذیل آسان تمثیلات اس خیال کو واضح کردیں گی :

---

* جائز قیمتیں وہ تمام قیمتیں ہیں جن کے لیے مساوات کی دونوں جانب (طرفین) صحیح ہوں۔

تمثیل 1 : $x + 2 + 5 - 4 - x \equiv 3$ یہ x کی تمام قیمتوں کے لیے صحیح ہے۔

تمثیل 2 : $x^2 - 4 \equiv (x + 2)(x - 2)$ جہاں x^2 کے معنی ہیں x مرتبہ x - یہ بھی x کی ہر قیمت کے لیے صحیح ہے۔ اِس ذاتی مساوات (متماثلہ) کی دونوں جانب x کی کوئی بھی قیمت رکھ کر امتحان کیا جاسکتا ہے۔ اِس کو دفعہ 4-3 میں ثابت کیا گیا ہے۔

مشروط مساوات کا استعمال زیادہ عام ہے۔

تعریف 1-14 : مشروط مساوات برابری کا وہ بیان ہے جو کہ اُن میں شامل حروف کی تمام جائز قیمتوں میں سے کچھ قیمتوں کے لیے صحیح ہو۔

ایسی مساوات کو عام طور پر حل کرنا ہوتا ہے یعنی وہ تمام ممکن قیمتیں (حل) نکالنی ہوتی ہیں جن کے لیے مساوات صحیح ہو۔ بعد میں ہم مساوات کے حل کرنے پر بحث کریں گے لیکن فی الحال ہم ذیل کی تمثیلوں پر غور کریں :

تمثیل 3 : $x + 2 = 4$ ایک مشروط مساوات ہے کیوں کہ یہ صرف $x = 2$ کے لیے صحیح ہے۔

تمثیل 4 : $x^2 - 7x + 12 = 0$ ایک مشروط مساوات ہے، کیوں کہ یہ صرف x کی دو قیمتوں 3 یا 4 کے لیے ہی صحیح ہے۔ x کی جگہ کوئی بھی دوسری قیمت رکھنے سے یہ مساوات مطمئن نہ ہوگی۔

دونوں قسم کی مساوات کا فرق موثر طور پر ظاہر کرنے کے لیے ذاتی مساوات (متماثلہ) کے لیے $\equiv$ کا نشان اور مشروط مساوات کے لیے $=$ کا نشان استعمال ہوگا۔

باب 2

اعداد کا الجبرا بہ حیثیت ایک منطقی نظام کے

ہم اعداد کے مختلف سٹ پر مختصراً بحث کر چکے ہیں۔ اِس باب میں ہمارا ارادہ حقیقی اعداد کے نظام کو بہ حیثیت استنباطی منطقی نظام کے پیش کرنے کا ہے جس سے کہ نہ ہم صرف اعداد کی فطرت کا ہی کچھ تصوّر پیش کر سکیں بلکہ اُن اعداد پر عمل اور اُن میں جو خصوصیات ہیں اُن کا اندازہ بھی ہو سکے۔ جیسا کہ کسی بھی استنباطی نظام میں ہوتا ہے اسی طرح ہم بھی مفروضات اور تعریفوں کو بیان کر دیں گے اور اُن میں سے اہم ترین مسئلوں کے ثبوت کا خاکہ پیش کر کے دوسری چیزوں کی تکمیل مطالعہ کرنے والوں پر چھوڑ دیں گے۔ اس کے علاوہ ہم یہ بھی مان کر چلیں گے کہ ایسے تمام مسئلے جو بحث کیے گئے مسئلوں کے مطابق ہیں، ثابت کیے جا سکتے ہیں اور نتیجے کے طور پر بغیر ثبوت کے مان لیں گے۔ اس طریقے سے ہم اِس تصوّر کی ذہن نشینی کر سکیں گے کہ ریاضی کے کسی بھی نظام میں ایک خاص قسم کے دلائل ہوتے ہیں اور تمام ریاضی دانوں کے طریقے یکساں ہی ہوتے ہیں خواہ مضمون ابتدائی الجبرا ہو یا ریاضی کا کوئی بہت ہی ترقی یافتہ میدان۔

2-1 . استنباطی نظام : ثانوی مدرسہ کی جیومیٹری میں استعمال کیے گئے ثبوت کے طریقے یا پچھلے باب میں ثابت کیے ہوئے مسئلوں کو یاد کرنے سے ایک بات صاف ہو جائے گی۔ ہر ثبوت میں کچھ دعوے اور نتائج شامل ہوتے ہیں جہاں نتیجہ دعوے سے منطقی طریقِ عمل کے استدلال کی حیثیت سے حاصل ہوتا ہے ـــــ لیکن اپنے نتیجے کی سچائی پر یقین کامل ہونے کے لیے یا تو ہم یہ مانیں کہ ہمارا دعویٰ سچّا ہے اور یا ہم اس کو پہلے ثابت کر چکے ہوں۔ یہ دعویٰ اپنی باری پر حقائق کے استعمال سے پایۂ ثبوت کو پہنچا ہو جو اُس سے پہلے ثابت کیے جا چکے ہوں گے۔

یہ مسئلہ لامتناہی نہیں ہو سکتا، کسی نہ کسی منزل پر اس کا آغاز تو ہوا ہوگا۔ استنباطی نظام یا دلائل میں اسی نقطۂ آغاز پر کہتے ہیں کہ "ہم یہ مان لیتے ہیں کہ کچھ حقائق از خود صحیح ہیں۔" اسی شروعات (آغاز) میں ہی غیر تعریف شدہ الفاظ یا غیر ثابت شدہ بیانات شامل ہیں۔ جب ہم ایک بیان سے دوسرے بیان پر جاتے ہیں تو اسی قسم کے اصول وہاں بھی استعمال کرتے ہیں۔ استدلال کے یہ بنیادی قوانین جو ہم وجدانی طور پر (بے دلیل و فکر) استعمال کرتے ہیں، شاید ہی کبھی بیان کیے گئے ہیں۔ ایسا ایک کلیہ بتاتا ہے کہ کوئی مسئلہ یا تو صحیح ہے یا غلط۔ دوسرا کلیہ بتاتا ہے اگر مسئلہ A مسئلہ B سے ثابت ہوتا ہے اور B مسئلہ C سے تو مسئلہ A مسئلہ C سے ثابت ہوا۔

اس لیے استدلال کا استنباطی طریقہ اُس بحث و مباحثہ کے عمل کا نام ہے جس کا آغاز کچھ غیر معین اصطلاحات اور کچھ اُن مانے ہوئے بیانات جن کو اصول متعارفہ یا اصول موضوعہ کہتے ہیں، سے ہوتی ہے اور وہ ان کو مزید دوسرے تصورات کی تعریف کرنے کے لیے استعمال کرتے ہیں اور ان بیانات اور تعریفوں میں اصول استنباطی منطق مطلوبہ نتائج پر پہنچنے کے لیے لگاتے ہیں۔

در آں حالیکہ ریاضی کی لطافت کے نقطۂ نگاہ سے اس کے کسی بھی نظام کے لیے کم سے کم اصول متعارفہ کی ضرورت ہے ہم اپنے آپ کو قلیل ترین تعداد سے سروکار نہ رکھیں گے بلکہ اُن اصول متعارفہ کو درج کر دیں گے جن کو دوسروں سے ثابت کر سکیں تاکہ ہم اپنے نظام کو زیادہ واضح طور پر پیش کر سکیں۔ ان میں سے کچھ تابع اُصول متعارفہ کو سوالات میں بھی بیان کر دیں گے۔

2-2 حقیقی اعداد : اب ہم اس مقام پر ہیں کہ ایسے اُصول متعارفہ کا مجموعہ پیش کر سکیں جو کسی طرح بھی یکتا نہیں ہیں لیکن جو حقیقی اعداد کے سٹ کی تعریف کرتے ہیں یا اُن کی خاصیت بیان کرتے ہیں، ان اصول متعارفہ پر غور کرنے سے یہ بات واضح ہو جائے گی کہ اُن میں سے بہت سے فرداً فرداً دوسرے نظام سے اور حقیقی اعداد سے بھی مطمئن ہو جاتے ہیں اور اس قسم کے مطالعے سے اُن کے صحیح معنی اور بھی واضح ہو جائیں گے۔ ہم ان اصول متعارفہ کو تین حصوں میں تقسیم کریں گے : پہلا گروپ (اصول متعارفہ 1 سے 6 تک) جن کا ہم اس باب میں مطالعہ کریں گے، ایک میدان کے اُصول متعارفہ کہلاتے ہیں۔ دوسرے دو گروپ مرتب موضوعہ (اصول متعارفہ) اور تکمیلی خصوصیت باب 4 میں پیش کیے جائیں گے اور اُسی وقت اُن پر بحث ہوگی۔

ہم اس لیے مان لیتے ہیں کہ حقیقی اعداد کا نظام R کے اجزا کا ایک سٹ ہے (اور ایک میدان بناتا ہے) - یہ اجزا جو کہ غیر متعارف اصطلاحات ہیں حقیقی اعداد کہلاتے ہیں - ایسے ہی دو عمل "+" اور "·" بھی ہیں جو جوڑ اور ضرب کہلاتے ہیں اور اُن کی اس طرح تعریف کی گئی ہے کہ مندرجہ ذیل موضوعے اُن کے لیے سچ ہیں :

موضوعہ 1 : موضوعہ بندش : کسی بھی ایسے $a \in R$ اور b (بائیں سے دائیں) کے لیے

$$a \cdot b \in R \quad \text{اور} \quad a + b$$

یاد کرو کہ دو صحیح اعداد کا جوڑ یا ضرب ایک صحیح عدد ہوتا ہے اور دو ناطق اعداد کا جوڑ اور ضرب ناطق عدد ہوتا ہے - موضوعہ 1 کن ہی دو حقیقی اعداد کے لیے ہم قدر (مساوی القیمت) بیان ہے -

موضوعہ 2 : تلازمی موضوعات : کسی بھی ایسے $c \in R$ اور $a, b,$ (بائیں سے دائیں) کے لیے

$$(a + b) + c \equiv a + (b + c),$$
$$(a \cdot b) \cdot c \equiv a \cdot (b \cdot c)$$

موضوعہ 2 کے پہلے حصے سے معلوم ہوتا ہے کہ جوڑ میں حقیقی اعداد کے گروپ کرنے کے طریقے کا نتیجہ پر کوئی اثر نہیں پڑتا اور دوسرے حصے سے یہی بات ضرب کے لیے صحیح ہے کیوں کہ جوڑ تلازمی ہے - ہم $a + b + c$ کو بغیر قوسین کے لکھ سکتے ہیں جس کا مطلب $(a + b) + c$ یا $a + (b + c)$ دونوں ہی ہو سکتا ہے - درحقیقت بوجہ خصوصیت بندش اور خصوصیت تلازمہ حقیقی اعداد کے کتنے ہی رقوم کا جوڑ مکمل طور پر واضح ہے اور یہی بات حقیقی اعداد کے کتنے ہی رقوم کے ضرب کے متعلق کہی جا سکتی ہے -

---

* دو یا دو سے زیادہ اعداد کو ایک ہی رقم میں گروپ کرنے کے لیے عام فہم نشانات استعمال کیے جائیں گے یعنی قوسین ( ) ، [ ] یا چہریدار قوس { } جبکہ یہ واضح ہو کہ وہ سٹ کی تصریح کے لیے استعمال نہیں کیے گئے ہیں - ہم $a \cdot b$ کو اِن میں سے کسی ایک طریقے سے لکھیں گے : ab یا $a(b)$ یا $(a)b$ یا $(a)(b)$

موضوعہ 3 : تقلیبی موضوعات : کسی بھی a اور $b \in R$ کے لیے

$$a + b \equiv b + a,$$
$$a \cdot b \equiv b \cdot a.$$

موضوعہ 3 کے مطابق حقیقی اعداد کے جوڑنے اور ضرب دینے کی ترتیب نتیجے پر اثر انداز نہیں ہوتی۔

موضوعہ 4 : تقسیمی موضوعات : کسی بھی a, b اور $c \in R$ کے لیے

$$a \cdot (b + c) \equiv (a \cdot b) + (a \cdot c),$$
$$(b + c) \cdot a \equiv (b \cdot a) + (c \cdot a).$$

اگر ہم کسی حقیقی عدد کو دو حقیقی اعداد کے جوڑ سے ضرب دیں یا اُس عدد کو اُنھیں دو اعداد سے پہلے ضرب دیں اور بعد میں جوڑیں۔ ہر دو عمل میں موضوعہ 4 کے مطابق نتیجہ ایک ہی ہوگا۔ موضوعہ 4 کا پہلا حصّہ بائیں سمت کا قانونِ تقسیم کہلاتا ہے۔ موضوعہ 4 کا کوئی بھی حصّہ متبوع نہیں ہے بلکہ دونوں ہی ایک دوسرے کے، اور گزشتہ موضوعات کی امداد سے ثابت کیے جا سکتے ہیں (ذیل کے سوال 10 کو دیکھیے)۔

یہ چاروں موضوعات ایک ساتھ زیرِ مطالعہ لائے جا سکتے ہیں کیوں کہ ان کا تعلق اُن طریقوں سے ہے جن سے حقیقی اعداد کو بذریعہ بُنیادی عملیات متحد کرتے ہیں۔ یہ اس قدر آسان ہیں کہ آپ نے اُن کو شاید ہمیشہ یہ سوچے بغیر کہ آپ درحقیقت کون سی خصوصیات استعمال کر رہے ہیں، استعمال میں لاتے رہے ہیں۔ تاہم یہ بُنیادی ہیں۔ ذیل کے سوالات ان کو سمجھنے میں مزید مدد دیں گے اور یہ بتائیں گے کہ ہمارے معمولی حساب اور ابتدائی الجبرا میں یہ کہاں استعمال ہوتے ہیں۔

سوالات

1. اس بیان کا کیا مطلب ہے کہ سٹ ذیل کے عمل میں بند ہیں؟
   "$\cup$" میں؟ "$\cap$" میں؟
2. اگر $A, B, C, \ldots$ سٹ کے لیے عمل "$\cup$" کا مطلب "جوڑ" لیا جائے تو موضوعات 2 اور 3 کے مشابہ بیان بہ تعلق جوڑ یہ ہوں گے :

$$A \cup (B \cup C) \equiv (A \cup B) \cup C$$

اور

$$A \cup B \equiv B \cup A$$

وین خاکوں کے ذریعے ثابت کرو کہ یہ تعلق صحیح ہیں۔

3. اگر $A, B, C, \ldots$ سٹوں کے لیے عمل "$\cap$" کا مطلب "ضرب" لیا جائے تو موضوعات 2 اور 3 کا مشابہ بیان بہ تعلق ضرب مندرجہ ذیل ہوگا:

$$A \cap (B \cap C) \equiv (A \cap B) \cap C$$

اور

$$A \cap B \equiv B \cap A$$

وین خاکوں کے ذریعے ثابت کرو کہ یہ تعلق صحیح ہیں۔

4. اس تصریح کے ساتھ جیسا کہ سوال 2 اور 3 میں کی گئی ہے موضوعہ 4 کا کن ہی تین سٹ A, B, C کے لیے مطلب ہوگا:

$$A \cap (B \cup C) \equiv (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

وین خاکہ کی مدد سے ثابت کرو کہ آیا یہ تعلق صحیح ہے۔

5. اگر سوال 4 میں $\cap$ نشان اور $\cup$ نشان آپس میں بدل دیے جائیں تو

$$A \cup (B \cap C) \equiv (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

وین خاکہ کی مدد سے ثابت کرو کہ آیا یہ تعلق صحیح ہے۔ کیا حقیقی اعداد کے لیے اسی کے مشابہ بیان صحیح ہوگا؟

6. حقیقی اعداد پر تمام عمل تلازمی نہیں ہیں (a) $(2 - 3) - 4$ اور $2 - (3 - 4)$ کے متعلق کیا کہا جا سکتا ہے؟ (b) $(2 + 3) + 4$ اور $2 + (3 + 4)$ کے متعلق کیا کہا جا سکتا ہے؟ ایسی عملیات کی اور مثال دیجیے جو تلازمی نہ ہوں۔

7. کیا سٹ R کے لیے عمل "$-$" اور "$+$" تقلیبی ہیں؟ اُن عملیات کی دوسری مثالیں دیجیے جو تقلیبی نہیں ہیں۔

8. ذیل میں خالی جگہوں پر کون کون سے حقیقی اعداد رکھے جائیں کہ بیانات صحیح ہوں؟ بتائیے کون کون سے موضوعہ استعمال ہوئے ہیں؟

(a) $5 \cdot (4 + \_\_\_\_) = 5 \cdot 4 + 5 \cdot 6$

(b) $3 \cdot (\_\_\_\_ + 4) = 3 \cdot 7 + \_\_\_\_ \cdot 4$

(c) $4 \cdot 8 + 3 \cdot \_\_\_ = (\_\_\_ + \_\_\_) \cdot 8$
(d) $\_\_\_ \cdot (3 + 7) = 8 \cdot \_\_\_ + 8 \cdot \_\_\_$

9. ذیل کے ہر حقے میں برابری کے دعوے کے لیے کئی موضوعہ استعمال ہوئے ہیں۔ بتلیئے کون سے کہاں استعمال ہوئے ہیں؟

(a) $(x + 2) + a \equiv 2 + (a + x)$

[اشارہ: موضوعہ 3 سے]

$(x + 2) + a \equiv (2 + x) + a$

[موضوعہ 3 سے]

$\equiv 2 + (x + a)$

[موضوعہ 3 سے]

$\equiv 2 + (a + x)$ *

(b) $(ab)c \equiv (cb)a$

(c) $a(x + 2) + a(x + 3) \equiv a(2x + 5)$ [ہم کو ماننا چاہیے کہ ہم جانتے ہیں کہ

(d) $(x + 1)6 + (x + 1)y \equiv (y + 6)(x + 1)$ $1 + 1 = 2$ اور

(e) $(b + c + d)a \equiv ab + ac + ad$ $2 + 3 = 5$]

°(f) $(x + y)(a + b) \equiv xa + ay + xb + by$

(g) $(x + 2)(x + 3) \equiv x^2 + 5x + 6$ [ہم یہ مانتے ہیں کہ ہم جانتے ہیں کہ

$5 = 3 + 2$ اور $6 = 3 \cdot 2$]

*10. دائیں جانب کے موضوعہ تقسیمی کو $(b + c)a \equiv ba + ca$ میں بائیں جانب کا موضوعہ تقسیمی اور دوسرے ضروری موضوعات کی مدد سے ثابت کرو جو موضوعات مستعمل ہوں اُن کو بیان کرو۔

11. 1 سے لے کر 4 تک کے موضوعات عام مشق میں اس قدر کثرت سے استعمال ہوتے ہیں کہ ہم ہمیشہ یہ سوچ بھی نہیں سکتے کہ وہ کب استعمال کیے گئے۔ اگر 1 سے لے کر 9 تک کے جوڑ کے جدول اور اُن ہندسوں کی مقامی قیمت کی واقفیت فرض کر لیں تو ہم کوئی بھی دو صحیح اعداد جوڑ سکتے ہیں اور اس کے نتیجے کو قطعی طور پر صحیح ثابت کر سکتے ہیں۔ 37 اور 45 کو جوڑو۔ ہر قدم کے وجوہ بتلیئے کیوں کہ $37 = 3 \cdot 10 + 7$ اور $45 = 4 \cdot 10 + 5$ تو ہمیں حاصل ہوگا:

---

* نوٹ کرو کہ موضوعہ 3 مساوات کا تیسرا موضوعہ (دفعہ 1-6) کئی دفعہ استعمال ہوا ہے۔

ہندسوں کی مقامی قیمت

$$\begin{aligned}37 + 45 &= (3 \cdot 10 + 7) + (4 \cdot 10 + 5)\\ &= [(3 \cdot 10 + 7) + 4 \cdot 10] + 5\\ &= [3 \cdot 10 + (7 + 4 \cdot 10)] + 5\\ &= [3 \cdot 10 + (4 \cdot 10 + 7)] + 5\\ &= [(3 \cdot 10 + 4 \cdot 10) + 7] + 5\\ &= (3 \cdot 10 + 4 \cdot 10) + (7 + 5)\\ &= (3 + 4) \cdot 10 + (7 + 5)\\ &= 7 \cdot 10 + 12\end{aligned}$$

جدول جوڑ

$$\begin{aligned}&= 7 \cdot 10 + (1 \cdot 10 + 2)\\ &= (7 \cdot 10 + 1 \cdot 10) + 2\\ &= (7 + 1) \cdot 10 + 2\\ &= 8 \cdot 10 + 2\\ &= 82.\end{aligned}$$

12. مندرجہ ذیل کو بھی اسی طریقے سے حل کرو:

(a) $21 + 36$, (b) $78 + 45$,
(c) 12×16, (d) 23×36.

(صحیح اعداد کی ضربی جدول 1 سے 9 تک کو مان لیجیے اور یہ کہ $10 \cdot 10 = 100$ کو بھی)

13. یکساں ارکان کو مجتمع کرکے اُن کے جوڑ کو حل کرو۔ بتائیے کون کون سے موضوعات استعمال کیے گئے؟ صحیح اعداد کا عام جوڑ اور ضرب فرض کر لیجیے۔

(a) $(x^2 + 2x + 5) + (3x^2 + 5x + 2)$
(b) $3(x^2 + 5x + 6) + 4(2x^2 + 7x + 1)$

14. موضوعہ 4 کے استعمال سے ذیل کے حاصل ضرب کو بہ حیثیت جوڑ ظاہر کرو اور سوال 13 کے قاعدے سے حل کرو۔ بتاؤ کہ ہر قدم کون سے موضوعات استعمال کیے گئے ہیں؟

*15 موضوعہ E4 دفعہ 1-6 کی مساوات کے لیے ایک تعبیر یہ ہے:

اگر $a \equiv b$ اور $c \equiv c$ تو $a + c \equiv b + c$ ۔ دوسرے یہ کہ اگر $a \equiv a$ اور $c \equiv d$ تو $a + c \equiv a + d$ اگر اس میں سے پہلے والی خصوصیت ہمیشہ سچ ہے تو کہیں گے کہ دائیں جانب کے جوڑ کی اجازت ہے۔ اگر دوسری خصوصیت صحیح ہے تو کہیں گے کہ بائیں جانب کا جوڑ جائز ہے۔ خوش قسمتی سے حقیقی اعداد کے لیے دونوں صحیح ہیں۔

کسی بھی نظام میں اگر دائیں جانب کے جوڑ کی اجازت ہو بائیں جانب کے جوڑ کے لیے تو کون سا موضوعہ ہمیں مزید فائدہ اُٹھانے کی اجازت دیتا ہے؟

16. ثابت کرو کہ حقیقی اعداد کے لیے بائیں اور دائیں جانب کے ضرب کی کیوں اجازت ہے؟

اِن چار اُصول متعارفہ کے علاوہ جو ابھی ہمارے زیرِ مطالعہ رہے ہیں، ابھی اور بھی مزید پیچیدہ اُصول متعارفہ ہیں جو خود اِن اعداد اور دوسرے کچھ مخصوص اعداد کی خصوصیات پر مشتمل ہیں۔ اِن میں سے دو عناصر اکائی سے متعلق ہیں۔ ایک ایک ہر ایک عمل کے لیے اور اسی لیے اِس سے قبل کی مانند ہم اُن کو ایک ہی موضوعہ 5 کے تحت بیان کرتے ہیں۔

موضوعہ 5 : موضوعات اکائی : کسی بھی $a \in R$ کے لیے دو نا برابر ایسے اعداد ہوتے ہیں (پڑھیے صفر اور ایک علی الترتیب) کہ :

$$a + 0 \equiv a$$
$$a \cdot 1 \equiv a$$

کیوں کہ 0 اور 1، R کے عنصر ہیں اور موضوعہ $\frac{3}{}$ سے یہ عمل R میں تقلیبی ہیں۔ اس لیے ہم فوراً کہہ سکتے ہیں کہ $a + 0 = 0 + a = a$ اور $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

حقیقی عدد صفر جوڑ کے لیے اکائی یا جوڑ کا عنصر اکائی کہلاتا ہے جبکہ عدد 1 ضرب کا عنصر اکائی کہلاتا ہے۔

دو اور اُصول متعارفہ ایسے ہیں جن کو ایک ساتھ پیش کیا جا سکتا ہے۔ جو کہ حقیقی اعداد کے سٹ میں کچھ اعداد یا عناصر کی موجودگی پر دلالت کرتے ہیں کیوں کہ یہ دونوں اُصول متعارفہ عام طور سے اُن ثبوت میں بھی استعمال ہوتے ہیں جن میں موضوعہ 5 بھی شامل ہو۔ اس لیے ہم اُنھیں یہاں بیان کرتے ہیں۔

موضوعہ 6 : معکوس موضوعات : کسی بھی $a \in R$ کے لیے R کا ایک دوسرا عنصر موجود ہے جس کی نشاندہی $-a$ سے کرتے ہیں (پڑھیے تفریق a یا a کی نفی)۔ اس طرح کہ

$$a + (-a) \equiv 0$$

نیز کسی بھی $a \in R$ کے لیے $(a \neq 0)$ R کا ایک اور عنصر موجود ہے جس کی نشاندہی $\frac{1}{a}$ سے کرتے ہیں (پڑھیے a کا مقلوبی)، اس طرح کہ

$$a \cdot \frac{1}{a} \equiv 1$$

ہر ایک حالت میں کسی بھی عنصر کو اُس کے معکوس سے (دونوں میں سے کسی بھی عمل سے) ملانے کا نتیجہ اُس عمل کا عنصر اکائی ہے۔ اس لیے موضوعہ 6 سے یہ ظاہر کر رہے ہیں کہ دو میں سے کسی بھی عمل کے لیے ہر عدد کا ایک معکوس ہوتا ہے کیوں کہ R میں دونوں ہی عمل جوڑ اور ضرب تقلیبی (استبدالی)

ہیں۔ اس لیے ہمیں ان سے فوراً ہی حاصل ہوگا $-a + a = 0$ اور $a \cdot (\frac{1}{a}) = 1$۔ ہم نے دفعہ 1 سے 5 تک میں یہ کہا تھا کہ صفر سے تقسیم غیر متعین ہے۔ اس لیے $a = 0$ کو ہم نے موضوعہ ⑨ کے دوسرے حصے میں سے خارج کر دیا ہے۔

مثال 1 : ثابت کرو کہ $-b + (a + b) = a$

حل : تقلیبی (استبدالی) اور تلازمی موضوعات استعمال کر کے حاصل ہوگا :

$$-b + (a + b) = -b + (b + a) = (-b + b) + a$$

کیوں کہ $-b + b = 0$ اور $0 + a = a$ ہمیں مطلوبہ نتیجہ حاصل ہوا۔

مثال 2 : جب دی ہوئی خصوصیت کا ایک اور صرف ایک ہی عنصر ہو تو ہم اُس عنصر کو یکتا کہتے ہیں۔ ثابت کرو کہ صفر جو کہ جوڑ کا عنصرِ اکائی ہے یکتا ہوگا۔

حل : اگر ہم یہ فرض کر لیں کہ صفر یکتا نہیں ہے تو ایک دوسرا عنصر $0'$ ایسا ہوگا کہ تمام a کے لیے $a + 0' = a$۔ پس اِس تمام a کے لیے $a + 0' = a$ اور $a + 0 = a$ تاکہ $0 = 0' = a + 0$۔ اگر ہم اِس مساوات میں دونوں ممبروں میں $-a$ جوڑ دیں تو موضوعہ E4 سے ہمیں ملے گا:

$$-a + (a + 0') = -a + (a + 0)$$

اور تلازمی موضوعہ سے

$$(-a + a) + 0' = (-a + a) + 0$$

کیوں کہ موضوعہ 6 سے $-a + a = 0$، $0 + 0' = 0 + 0$ اور اس لیے $0' = 0$ (کیوں؟) واضح کرو کہ یہ کیوں ثبوت کو مکمل کر دیتا ہے؟

یہ ثابت کرنا بھی ممکن ہے کہ ضرب کا عنصرِ اکائی یکتا ہے (دیکھیے ذیل کا سوال 21)۔

سوالات

سوال 1 سے 20 تک کی کیفیت مکمل کرنے کے لیے حقیقی اعداد کے سٹ R کے ایک یا ایک سے زیادہ موضوعات استعمال ہوئے ہیں۔ ہر ایک سوال میں کون سے موضوعہ اور کہاں استعمال ہوئے ہیں، بعینہٖ بتائیے :

1. $3 + 0 = 3$
2. $0 + 2 = 2$
3. $-a + 0 = -a$
4. $1 \cdot 6 = 6$

5. $1 \cdot 1 = 1$
6. $0 + 0 = 0$
7. $-1 \cdot 1 = -1$
8. $\pi + (-\pi) = 0$
9. $-\sqrt{2} + \sqrt{2} = 0$
10. $(-5) + [-(-5)] = 0$
11. $3 \cdot \frac{1}{3} = 1$
12. $\frac{1}{-4}(-4) = 1$
13. $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{1/5} = 1$
14. $1 \cdot \frac{1}{1} = 1$
15. $x + y \equiv x \cdot 1 + y \cdot 1$
16. $0 + 1 \cdot (x + y) \equiv x + y$
17. $-(xy) + xy \equiv 0$
18. $3\sqrt{2x} \cdot \frac{1}{3\sqrt{2x}} \equiv 1, \quad (x \neq 0)$
19. $-(a + 0 + b) + (b + a) \equiv 0$
20. $\frac{1}{2x + 3y}(2x + 3y) \equiv 1, \quad 2x + 3y \neq 0$
21. ثابت کرو کہ ضرب کا عنصرِ اکائی یعنی 1 یکتا ہے۔
22. ثابت کرو کہ کسی حقیقی عدد $a \in R$ کے لیے:
(a) اس کا معکوس جوڑ کے لیے یکتا ہے۔ (b) اِس کا معکوس ضرب کے لیے یکتا ہے۔
23. اگر ہم $A, B, C, \ldots$ سٹ کو بہ حیثیت عنصر اور سٹ $\emptyset$ عمل "$\cup$" کی عنصرِ اکائی اور سٹ U کو عمل "$\cap$" کی عنصرِ اکائی مانیں تو مندرجہ ذیل کن اُصول متعارفہ کے مماثل ہیں:

$$A \cup \emptyset \equiv A? \quad A \cap U \equiv A?$$

اب ہمیں کئی ایسے مسائل ثابت کرنے چاہئیں کہ جو سابق

یہ مواد سوالوں میں اور بعد کے کام کو پڑھنے میں

میں حروف $a, b, c, \ldots$ وغیرہ کو جو سٹ R کے عناصر ہوں گے، بہ حیثیت حقیقی اعداد لے مان کر چلنا چاہیے۔ مزید برآں ہم اِن اعداد کو کوئی بھی حقیقی اعداد مان لیں گے جن سے ہمارا مطلب ادا ہوتا ہو، جب تک کہ اُن اعداد پر کوئی مخصوص عائد کردہ پابندیاں نہ لگائی گئی ہوں۔ ان میں سے بہت سے مسئلے جو جوڑ کے عمل پر مشتمل ہیں، اُن کے مطابق ضرب کے عمل پر مشتمل مسئلہ میں ہیں۔ ہم ایسے مسئلہ کی نشاندہی مسئلہ کے نمبر شمار میں "A" یا "M" لگا کر کریں گے۔

دفعہ 1 سے 6 تک میں موضوعہ E4 کئی دفعہ استعمال ہو چکا ہے۔ اب ہم اس موضوعہ کا دعویٰ معکوس ثابت کر سکتے ہیں یعنی موسومہ بہ خصوصیت جمعی تنسیخ

مسئلہ 2-1A : اگر $a + c \equiv b + c$ تو $a \equiv b$

ثبوت : کیوں کہ c ایک حقیقی عدد ہے موضوعہ 6 سے $-c$ بھی حقیقی عدد ہوگا اور موضوعہ E4 کی مدد سے

$$(a + c) + (-c) \equiv (b + c) + (-c)$$

موضوعہ 2 تلازمی موضوعہ کی رو سے ہمیں حاصل ہوگا

$$a + [c + (-c)] \equiv b + [c + (-c)]$$

اور کیوں کہ $c + (-c) \equiv 0$ (موضوعہ 6) پر ہو جائے گا $a + 0 \equiv b + 0$ اس لیے موضوعہ کی وجہ سے $a \equiv b$ جو کہ ہمارے حسب منشا نتیجہ ہے۔

ضرب کے لیے بھی اس کے مطابق مسئلہ ثابت کیا جا سکتا ہے۔

مسئلہ 2-1M : اگر $ac \equiv bc$ اور $c \neq 0$ تو $a \equiv b$

ثبوت : کیوں کہ ... (ہر قدم کے وجوہ بتائیے)

$$c = (bc)\frac{1}{c}$$

$$a\left(c \cdot \frac{1}{c}\right) \equiv b\left(c \cdot \frac{1}{c}\right) \quad \text{اسی طرح}$$

$$a \cdot 1 \equiv b \cdot 1 \quad \text{یا} \quad a \equiv b \quad \text{پس}$$

اب ایک دوسرے مسئلہ پر جو گزشتہ دفعہ کے سوال 22(a) کے مماثل ہے زور دینا چاہیے۔

مسئلہ 2-2A : اگر $a + b \equiv 0$ تب $b \equiv -a$

ثبوت : (دفعہ 2-2 کے سوالوں کے پہلے مجموعہ میں سے سوال 15 یاد کرو) اگر ہم اس مساوات کے دونوں طرف $-a$ جوڑ دیں تو ہوگا

$$-a + (a + b) \equiv -a + 0$$

اگر موضوعہ تلازمی استعمال کریں تو یہ ہوگا

$$(-a + a) + b \equiv -a + 0$$

اور چونکہ بائیں طرف $0 \equiv -a + a$ اور دائیں طرف $-a + 0 \equiv -a$ تو حاصل ہوگا

$$0 + b \equiv -a \quad \text{پس} \quad b \equiv -a$$

کیوں کہ b اُس عدد کی نمائندگی کرتا ہے جس میں جب a جوڑا جائے تو نتیجہ صفر ہوگا اور چونکہ ہم ثابت کر چکے ہیں کہ $b \equiv -a$ اس لیے درحقیقت ہم یہ ثابت کر چکے ہیں کہ جوڑ کا معکوس یکتا ہے۔
اسی کے مشابہ مسئلہ ضرب کے لیے بھی ہے۔

[illegible] : اگر $ab \equiv 1$ اور $a \neq 0$ تب $b \equiv \frac{1}{a}$

[illegible] جو ہمارے اعدادی نظام کی
اہم خصوصیات [illegible] ہیں
کریں گے۔ نوٹ کرو کہ ہر ایک اس قسم کے مسئلہ کے لیے جس میں جوڑ کامل [illegible]
اور مسئلہ ہے جس میں ضرب کا عمل لگتا ہے۔

مسئلہ 2-3A : اگر $a \equiv b$ تب $-a \equiv -b$

ثبوت : کیوں کہ $a \equiv b$ تو ہم مساوات کے دونوں طرف $-a$ جوڑ دیتے ہیں تاکہ

$$a + (-a) \equiv b + (-a)$$

[illegible] لیے $a + (-a) \equiv 0$ کیوں کہ $b + (-a) \equiv 0$

اب اگر ہم یہ دیکھیں کہ ہمیں کیا ثابت کرنا چاہیے اور ہم اپنے متوقع نتیجہ کی ایک جانب $-b$ کی طرف متوجہ ہوں تو ہمارا اگلا قدم صاف ظاہر ہے۔ ہمیں اپنی مساوات $b + (-a) \equiv 0$ کے دونوں ممبروں میں $-b$ جوڑ دینا چاہیے۔ ہم اپنی مساوات کے دونوں ممبروں کی بائیں طرف $-b$ جوڑ دیتے ہیں (ایسا کیوں؟) تو ہمیں حاصل ہوتا ہے $-b + 0 \equiv -b + [b + (-a)]$
جو حل ہو کر ہو جاتا ہے $-b \equiv -a$ (کیوں؟)

اس کو ہم اپنے متوقع نتیجہ کی طرح اس طرح لکھ سکتے ہیں $-a \equiv -b$

اب ہم اپنے عدد صفر کی ایک بنیادی خصوصیت ثابت کرنا چاہتے ہیں جسے ہم نے درحقیقت اُس وقت سے بدیہی طور پر استعمال کیا ہے جب ہم نے ابتداً علم حساب شروع کیا تھا۔ گو یہ ثبوت کچھ غیر فطری معلوم ہوگا لیکن یہ تصور کہ ایسے ثبوتوں کو اور اُن کے طریقوں کو کس طرح شروع کریں اور عمل

میں لائیں، تجربہ اور مشق سے حاصل ہوگا۔ اس لیے طالب علم کو اُن سے پہلی دفعہ دوچار ہونے وقت دل شکستہ نہ ہونا چاہیے۔

مسئلہ 2-4 : اُن تمام $a \in R$ کے لیے $a \cdot 0 = 0$

ثبوت : کیوں کہ $0 + 0 = 0$ اس لیے $a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0$ اس مساوات کے بائیں ممبر کو بذریعہ موضوعہ تقسیمی پھیلا سکتے ہیں کیوں کہ اسی مساوات کا دایاں ممبر دو حقیقی اعداد کا حاصل ضرب ہے اور اس لیے ایک حقیقی عدد ہے۔ یہ بذریعہ موضوعہ اکائی لکھا جا سکتا ہے $a \cdot 0 + 0$ نتیجے کے طور پر

$$a \cdot 0 + a \cdot 0 = a \cdot 0 + 0$$

جوڑ کے لیے بایاں موضوعہ تنسیخی لگا کر (ذیل کا پہلا سوال دیکھو) ہم نتیجہ حاصل کریں گے۔

اِس مسئلہ کو ہم ایک دوسرے طریقے سے بیان کر سکتے ہیں۔ اگر ہم یہ یاد کریں کہ ریاضی میں لفظ "یا" کا مطلب "اور/یا" بھی ہوتے ہیں (دفعہ 1-3 کا حاشیہ دیکھو)۔

مسئلہ 2-4 : اگر $a = 0$ یا $b = 0$ تو $ab = 0$

مسئلہ 2-4 کا برعکس الجبرا میں ایک بہت ہی اہم بُنیادی مسئلہ ہے۔ یہ دو درجی یا اس سے زیادہ درجے کی مساوات کے حل کرنے میں مددگار ثابت ہوتا ہے جبکہ وہ جزو ضربی کے طریقے سے حل کی جاتی ہیں۔ اب ہم اس کو بیان کرتے ہیں اور ثابت کرتے ہیں حالانکہ جب ہم اس مضمون پر آئیں گے تو دوبارہ اس کا حوالہ دیں گے۔

مسئلہ 2-5 : اگر $ab = 0$ تو $a = 0$ یا $b = 0$

ثبوت : اگر $a = 0$ تو مسئلہ ثابت ہو گیا۔ اگر نہیں تو عدد a کا معکوس بہ لحاظ ضرب $\frac{1}{a}$ ہے۔ اگر ہم مساوات $ab = 0$ کی دونوں ممبروں کو $\frac{1}{a}$ سے ضرب دیں تو حاصل ہوگا

$$\frac{1}{a} \cdot (ab) = \frac{1}{a} \cdot 0$$

قانون تلازمی اور اِن حقائق کے استعمال سے کہ بائیں طرف $(\frac{1}{a}) \cdot a = 1$ ، $1 \cdot b = b$ اور دائیں طرف $0 = 0 \cdot (\frac{1}{a})$ ہم اپنا نتیجہ حاصل کر سکیں گے۔

طالب علم کو ثابت کیے گئے مسئلوں کے مطالعے کے ساتھ ساتھ یہ سب سوالات بھی حل کرنے

چاہئیں۔ الجبرا اور علمِ حساب کے زیادہ تر بنیادی تصورات اور ان تصورات کے پیچھے جو منطقی وجوہ ہیں واضح ہونا چاہیے۔

سوالات

اگر $c + a = c + b$ تو ثابت کرو کہ $a = b$ ۔ یہ جوڑ کے لیے بائیں تنسیخی خصوصیت کہلاتی ہے (یاد رکھیے مسئلہ 2-1A)۔

*2. اگر $ca = cb$ اور $c \neq 0$ تو ثابت کرو کہ $a = b$

3. مسئلہ 2-2A کو $a + b = 0$ کو $a + b = a + (-a)$ لکھ کر اور موضوعہ تقلیبی اور مسئلہ 2-1A کو استعمال کر کے ثابت کرو۔

4. ثابت کرو کہ اگر $a + b = 0$ تو $a = -b$

5. مسئلہ 2-2M ثابت کرو۔

6. اگر $a = b$ اور نہ a یا $b = 0$ میں تو ثابت کرو کہ $\frac{1}{a} = \frac{1}{b}$

7. اگر $a = -b$ تو ثابت کرو کہ $-a = b$

8. اگر $\frac{1}{b} = a$ $(a, b \neq 0)$ تو ثابت کرو کہ $b = \frac{1}{a}$

*9. ثابت کرو کہ تمام a کے لیے : $a = -(-a)$ ، [اشارہ: $0 = (-a) + -(-a)$]

10. سوال 9 کے مماثل مسئلہ جس میں عمل ضرب ہو کو بیان اور ثابت کرو۔

*11. ثابت کرو کہ $-0 = 0$ [اشارہ $0 + 0 = 0$ اور $0 = 0 + (-0)$]
ان میں سے ہر ایک بیان کی وجہ بتائیے۔

12. سوال 11 کے مماثل مسئلہ جس میں عمل ضرب ہو کو بیان اور ثابت کرو۔

13. اگر $abc = 0$ تو ثابت کرو کہ $c = 0$ یا b یا a ۔

*14. ثابت کرو کہ $-(ab) = (-a)b$ اور ہر قدم کی وجہ بتائیے۔
اب ہم $-ab$ کو ان دو میں سے کسی بھی رقم کے لیے لکھ سکتے ہیں۔

[اشارہ: $-(ab) + (ab) = 0 = (-a + a)$
$= (-a + a)b$
$= (-a)b + ab$]

اس سوال کے نتیجے کے طور پر ہم اس طرح لکھ سکتے ہیں مثلاً $(-2)(3) = -6$

15*. ثابت کرو کہ: $(-1)a = -(1 \cdot a) = -a$ [اشارہ: سوال 14 دیکھو]

16*. ثابت کرو کہ $(-a)(-b) = ab$ [اس سوال کے نتیجے میں ہم مثال کے طور پر لکھ سکتے ہیں $(-2)(-3) = 2 \cdot 3 = 6$]

17. واضح کرو کہ کیوں (a) $(-1)(-1) = 1$, (b) $(-1)(-1)(-1) = -1$

2-4. مزید مسئلے: اس باب میں ہم نے "$-$" کی علامت کو صرف ایک مطلب میں استعمال کیا ہے۔ یعنی ایک حرف کے ساتھ جیسا کہ $-a$، ایک عدد کے معکوس بہ لحاظ جوڑ اظہار کرنے کے لیے۔ اب ہم تفریق یا دو حقیقی اعداد کے فرق کی تعریف جوڑ اور اس کے معکوس عنصر کی ارقام میں کر سکتے ہیں۔

تعریف 2-1: رقم $a - b$ ہم معنی ہے $a + (-b)$ کے اور "a اور b کا فرق" کہلاتی ہے یا "b تفریق کیا گیا a میں سے"۔*

اس تعریف کے نتیجے کے طور پر "$-$" کی علامت دو مختلف مطالب میں استعمال کی جائیں گی جن میں سے ہر ایک کو واضح طور پر سمجھ لینا چاہیے۔

تمثیل 1: تفریق کی تعریف (اور موضوعہ تلازمی اور جمعی) کی وجہ سے

$$a + b - c = a + b + (-c) = a + (-c) + b$$
$$= a - c + b$$
$$= (-c) + a + b = -c + a + b$$

اس تعریف کی وجہ سے اور دفعہ 2-3 کے نتائج سے ہم کو تفریق کی تمام حسب معمول خصوصیات حاصل ہو جائیں گی۔

مسئلہ 2-6: $a(b - c) = ab - ac$

ثبوت: کیوں کہ بہ حوالہ تعریف $b - c = b + (-c)$

اس لیے $a(b - c) = a[b + (-c)]$

---

* کچھ ریاضی داں اس کے ہم معنی مگر مختلف تعریف کو ترجیح دیتے ہیں۔ ذیل کے سوال 5 اور 6 کو دیکھو۔

اور موضوعہ تقسیمی کی وجہ سے یہ برابر ہوگا $ab + a(-c)$ کے لیکن دفعہ 2-3 کے سوال 14 کے حوالہ سے $a(-c) = -ac$ اس لیے $a(b - c) = ab + (-ac)$ جو کہ مندرجہ بالا تعریف کے حوالہ سے لکھا جا سکتا ہے $a(b - c) = ab - ac$

دو ضمنی خصوصیات جن میں "$-$" کی علامت شامل ہے اور جن سے ہم بہ کثرت دوچار ہوتے ہیں۔ ذیل کے سوال 4 سے صاف ظاہر ہیں۔ ان پر خاص توجہ دینا چاہیے۔

دو حقیقی اعداد کی تقسیم کی تعریف عمل ضرب کی اصطلاح میں کی گئی ہے۔

تعریف 2-2 : رقم $\frac{a}{b}$ جہاں کہ $b \neq 0$ مساوی ہے $a \cdot (\frac{1}{b})$ کے اور کہلاتا ہے "وہ خارج قسمت جو a کو b سے تقسیم کرنے سے حاصل ہوگا۔"*

تمثیل 2 : (a) کیوں کہ $\frac{a}{b} = a \cdot (\frac{1}{b})$ اگر $b \neq 0$ تو $b(\frac{a}{b}) = a$

(b) کیوں کہ $\frac{a}{1} = a \cdot (\frac{1}{1}) = a \cdot 1, (\frac{a}{1}) = a$

(c) اگر $a \neq 0$ $\frac{0}{a} = 0 \cdot (\frac{1}{a}) = 0$

تقسیم اور/ یا کسور کی خصوصیات اسی تعریف کا نتیجہ ہیں اور اُن کو براہِ راست ثابت کیا جا سکتا ہے کیوں کہ ثبوت کا شاید ہی کوئی یکتا طریقہ ہے۔ اس لیے طالب علم کو خود ہی اسے نہ صرف سمجھنے کی ہمت افزائی کی جائے بلکہ دوسرے اور اس سے آسان ثبوت پر غور کرنے کو کہا جائے۔ ہم اس دفعہ میں دو بنیادی مسئلے دیں گے (اُن کے علاوہ جو سوالوں میں دیے گئے ہیں) اور دوسرے بہ وقتِ ضرورت پیش کیے جائیں گے۔

مسئلہ 2-7 : $(b, d \neq 0)$ $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

ثبوت : بہ لحاظ تعریف

$$\frac{ac}{bd} = ac \cdot \frac{1}{bd}$$

---

* دفعہ 1-5 کے ناطق اعداد کی بحث میں ہم نے $\frac{a}{b}$ کی اس طرح تعریف کی تھی کہ یہ برابر ہے c کے جہاں $a = bc$ درحقیقت ایسا کہا جا سکتا ہے۔ لیکن مندرجہ بالا مدلل عمل میں a اور b کے معکوس کی اصطلاح میں کی گئی تعریف کو ترجیح دیں گے (اس دفعہ کا سوال 14 دیکھو)۔

$$ac \cdot \frac{1}{bd} = ac \cdot \frac{1}{bd} \cdot \left(b \cdot \frac{1}{b}\right) \cdot \left(d \cdot \frac{1}{d}\right) \qquad \text{(کیوں؟)}$$

$$= a \cdot c \cdot \left(bd \cdot \frac{1}{bd}\right) \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{d} \qquad \text{(کیوں؟)}$$

$$= \left(a \cdot \frac{1}{b}\right) \cdot \left(c \cdot \frac{1}{d}\right) = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \qquad \text{(کیوں؟)}$$

دوسرے دو مسئلوں کے ثبوت براہِ راست اس مسئلہ کے ثبوت کا نتیجہ ہیں۔ یاد کرو کہ کیسے ان کے نتائج ہماری پچھلی بحث میں بہ کثرت فرض کر لیے گئے ہیں

مسئلہ 2-8 : $\frac{a}{b} = \frac{ax}{bx}$ $(b, x \neq 0)$

ثبوت : مسئلہ 2-7 سے $\frac{ax}{bx} = \frac{a}{b} \cdot \frac{x}{x}$

ہمیں حاصل ہوگا $\frac{ax}{bx} = \frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b}$

مسئلہ 2-9 : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ اگر اور صرف اگر $ad = bc$ جہاں کہ $(b, d \neq 0)$

ثبوت : ہم یاد کریں کہ ایسے بیان کے لیے دو ثبوت ضروری ہیں :

(a) ہمیں ثابت کرنا چاہیے کہ اگر $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ تو $ad = bc$

موضوعہ E5 اور دی ہوئی شرط کہ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ سے ہم جانتے ہیں کہ

$$\frac{a}{b} \cdot b \cdot d = \frac{c}{d} \cdot b \cdot d$$

تاکہ $a \cdot \left(\frac{1}{b} \cdot b\right) \cdot d = c \cdot \left(\frac{1}{d} \cdot d\right) \cdot b$

یا $ad = bc$

(b) ہمیں یہ بھی ثابت کرنا چاہیے کہ اگر $ad = bc$ تو $\left(\frac{a}{b}\right) = \left(\frac{c}{d}\right)$ پھر موضوعہ E5 اور شرائط $ad = bc$ سے ہمیں حاصل ہوگا

$$a \cdot d \cdot \left(\frac{1}{d} \cdot \frac{1}{b}\right) = b \cdot c \cdot \left(\frac{1}{d} \cdot \frac{1}{b}\right)$$

تاکہ $a \cdot \frac{1}{b} \cdot \left(d \cdot \frac{1}{d}\right) = c \cdot \frac{1}{d} \cdot \left(b \cdot \frac{1}{b}\right)$

یا $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

ہر قدم کی وجہ طالب علم کو مہیا کرنا چاہیے۔

سوالات

1. واضح کرو کہ کیوں $a - a \equiv 0$

2. واضح کرو کہ کیوں $\left(\frac{a}{a}\right) \equiv 1$

3. ثابت کرو کہ $(a - b)c \equiv ac - bc$

*4. ہم نے ابتدائی الجبرا میں پڑھا ہے کہ ایسے قوسین کو علاحدہ کرنے میں (یا گروپ کرنے کی کسی علامت میں بھی) جس سے پہلے تفریق کی علامت ہو، قوسین کے اندر کی ہر ایک علامت بدل جاتی ہے خاص طور سے

(a) $\quad -(a + b) \equiv -a - b$

[اشارہ : دفعہ 2-3 کے سوال 15 کو دیکھو]

(b) $\quad -(a - b) \equiv -a + b$

ثابت کرو کہ یہ بیانات صحیح ہیں۔

5. ثابت کرو کہ $b + (a - b) \equiv a$

6. ثابت کرو کہ اگر $a - b \equiv c$ تو $b + c \equiv a$

نوٹ کرو کہ یہ وہی خصوصیت ہے جو ابتدائی اسکول میں تفریق کے سوالوں کی جانچ کے لیے استعمال کرتے ہیں۔

7. اگر $x + a = b$ تو ثابت کرو کہ $x \equiv b - a$ یہ اُن خصوصیات میں سے ایک ہے جنھیں خطی مساوات حل کرنے میں اکثر استعمال کرتے ہیں۔ ایک دوسری خصوصیت سوال نمبر 11 میں بیان کی گئی ہے۔

8. اگر $a \neq 0$ تو ثابت کرو کہ $a\left(\frac{b}{a}\right) \equiv b$

9. اگر $\frac{a}{b} \equiv 1$ تو ثابت کرو کہ $a \equiv b$.

*10. ثابت کرو کہ $-\frac{a}{b} \equiv \frac{-a}{b} \equiv \frac{a}{-b}$

[اشارہ : یاد کرو کہ $-(a) \cdot \left(\frac{1}{b}\right) = -\left(\frac{a}{b}\right)$]

*11. اگر $a \neq 0$ $ax \equiv b$ تو ثابت کرو کہ $x \equiv (\frac{b}{a})$

12. اگر $(b \neq 0)(\frac{a}{b}) \equiv (\frac{c}{b})$ تو ثابت کرو کہ $a \equiv c$

*13. اگر $c \neq 0$ تو ثابت کرو کہ

$$\frac{a \mp b}{c} \equiv \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$$

*14. فرض کرو کہ $b \neq 0$ تو ثابت کرو کہ $(\frac{a}{b}) \equiv c$ اگر اور صرف اگر $a \equiv bc$

15. مان لو کہ $b \neq 0$ تو ثابت کرو کہ $\frac{a}{b} \equiv c + \frac{d}{b}$ اگر اور صرف اگر $a \equiv bc + d$

باب 3

الجبرا کے استدلال کی توسیع

اِس باب میں ہم اپنے ابتدائی نظریے اور عمل کے سلسلے میں بحث جاری رکھیں گے۔ پچھلے باب کے بہت سے مسئلے ہماری ریاضیات کی الجبرائی تنظیم مرتب کرنے میں استعمال ہوں گے۔ جن نظریوں پر اس جگہ بحث کی جائے گی وہ پوری کتاب میں آئیں گے۔ اس لیے اُن کو خوب اچھی طرح سمجھ لینا چاہیے۔

3-1 . الجبرائی ارقام کا جوڑ: الجبری رقم : کوئی بھی علامات اور اعداد کا ایسا اجتماع جو الجبرا کے ابتدائی عمل سے متعلق ہو ، الجبرائی رقم کہلاتا ہے۔

تمثیل 1 : $5a + 6b$ ، $2ax^2$ اور $(6x + 5y)2x$ الجبرائی ارقام (جملہ) ہیں۔

ایک الجبرائی رقم جو مختلف حصّوں پر مشتمل ہو اور جوڑ اور تفریق کی علامت سے آپس میں جُڑی ہو ، الجبرائی رقم کہلاتی ہے۔ ہر ایک علاحدہ حصّہ معہ اُس کی علامت کے جملے کی رقم کہلاتا ہے۔

تمثیل 2 : الجبرائی حاصل جمع $2x^2 - 3y^2 - 5$ میں، $2x^2$ ایک رقم ہے، $-3y^2$ دوسری اور -5 ایک تیسری رقم ہے۔

کسی ایسی رقم میں جو دو یا اُس سے زیادہ اجزا پر مشتمل ہو کوئی ایک جزو یا کئی اجزا کے مجموعے کا حاصل ضرب باقی ماندہ دوسرے اجزا کے حاصل ضرب کا ضریب کہلاتا ہے۔ مثلاً رقم $2x^2y$ میں 2 ، x^2y کا ضریب ہے۔ $2x^2$ ضریب ہے y کا اور $2y$ ضریب ہے x^2 کا۔ اکثر عددی ضریب (قدر) اور حروفی علامت کے ضریب (قدر) میں امتیاز کرنا آسان ہوتا ہے۔ یکساں قسم کی ارقام کو مجتمع کرکے دو الجبرائی ارقام کا جوڑ یا تفریق نکالنے کے لیے ہم ضریب استعمال کرتے ہیں اور تلازمی موضوعات سلسلہ وار

لگاتے ہیں۔

تمثیل 3 : $2x - 3y + 5$ اور $x + 2y - 1$ کا جوڑ ہوگا

$$(2x - 3y + 5) + (x + 2y - 1) \equiv 2x + x - 3y + 2y + 5 - 1$$
$$\equiv 3x - y + 4$$

تمثیل 4 : $2x - 3y + 5$ اور $x + 2y - 1$ کا فرق ہے

$$(2x - 3y + 5) - (x + 2y - 1) \equiv 2x - 3y + 5 - x - 2y + 1$$
$$\equiv x - 5y + 6.$$

یہاں اور مثال 1 دونوں ہی میں ہم نے اُن نتائج کو استعمال کیا جو سوال 4 دفعہ 2-4 میں ثابت کیے جا چکے ہیں۔

ہم بتا چکے ہیں کہ الجبرائی ارقام جو آپس میں جوڑ یا تفریق پر مشتمل ہیں، الجبرائی حاصل جمع کہلاتی ہیں۔ اگر رقم میں صرف ایک ہی رُکن ہو تو یہ یک رکنی کہلاتی ہے۔ دو رُکنوں کا الجبرائی جوڑ یا تفریق دو رُکنی کہلاتا ہے۔ اور عام طور پر کئی الجبرائی ارقام کا مجموعہ کثیر الارقام کہلاتا ہے۔ عبارت $\frac{2x}{3y^2}$ یک رکنی ہے جبکہ $3x^2 - 2y$ دو رُکنی۔

مثال 1 : قوسین ہٹا کر مندرجہ ذیل کو حل کرو :

$$4x - [2x - 3y - (x + 4y)] + (x - 8)$$

اور پھر یکساں ارقام کو جوڑیئے۔

حل : اس سوال کو دفعہ 2-4 کے سوال 4 اور موضوعہ تلازمی کے نتائج کو بار بار لگا کر حل کیا جائے گا۔

$$4x - [2x - 3y - (x + 4y)] + (x - 8) \equiv 4x - [2x - 3y - x - 4y] + x - 8$$
$$\equiv 4x - 2x + 3y + x + 4y + x - 8$$
$$\equiv 4x + 7y - 8.$$

کسی بھی عبارت (رقم) میں جس میں تفریق کی علامت قوسین کے آگے لگی ہو، قوسین ہٹانے میں (یا گروہ بندی کی کوئی بھی علامت) قوسین کے اندر کی ارقام کی علامت بدلنا ہوتی ہے۔ اور اگر اُس میں قوسین کے آگے جوڑ کی علامت ہو تو بلا کسی تبدیلی علامت کے قوسین ہٹائے جا سکتے ہیں۔

مثال 2 : $-2xy + 3x - 4y$ کی قیمت معلوم کرو جبکہ $x = 3$ اور $y = -2$ کے۔

حل : x کی جگہ 3 اور y کی جگہ -2 رکھیے :

$$-2(3)(-2) + 3(3) - 4(-2) = 12 + 9 + 8 = 29$$

سوالات

مندرجہ ذیل میں سے ہر ایک میں (a) ارقام کا جوڑ نکالیے (b) دوسری رقم کو پہلی رقم میں سے گھٹائیے :

1. $2a + 3b - 4$ اور $a - 2b + 3$
2. $a - 2b + 3c$ اور $2a + 4b - c$
3. $4x + 3y + z$ اور $2x + 3y - 2z$
4. $2x + y + 5$ اور $3y - 2z - 4$
5. $2(x - 3y)$ اور $-5(2x + y)$
6. $-(x + 2y - z)$ اور $3(x - y + 2z)$

مندرجہ ذیل میں ہر ایک میں گروہ بندی کی تمام علامات ہٹا کر یکساں ارکان کو جوڑیے :

7. $x - (2y + 3z) - 2y$
8. $3x - (2y - 4z) + 6y$
9. $(2x - 3y) - (8x + 6y + 4)$
10. $(2x - 3y) + (y - 4z) - (z - 3z)$
11. $8x + [(3x - 2y) + (6z - 9) - (x + y)]$
12. $3y - [2y + 3x - (2x - 3y)] + 4x$
13. $2x - \{3y - [5x - (7y - 6x)]\}$
14. $9x - (2y - 3x) - \{y - (2y - x)\} - [2y + (4x - 3y)]$

مندرجہ ذیل میں سے ہر ایک عبارت (رقم) میں آخری تین ارقام کو ایسے قوسین میں رکھو کہ اُن کے آگے تفریق کی علامت ہو :

15. $a^2 - b^2 + 2bc - c^2$
16. $16 - x^2 + 2xy - y^2$
17. $4x^2 - 4y^2 - 4y - 1$
18. $9x^2 - 9y^2 - 6xy - x^2$

ذیل کی ہر ایک عبارت (رقم) میں x کی ضربیات (قدروں) کو ایسے قوسین میں رکھو کہ ہر ایک کے آگے (a) جوڑ کی علامت (b) تفریق کی علامت ہو :

19. $cx + dy - ax - by$
20. $5x - ax + 3 - 4x$
21. $ax - by + bx - ay$
22. $6x^2 - 8x + 3y - 7y^2 + 6x - 4$

حروف کی دی ہوئی قیمتوں کے لیے مندرجہ ذیل ارقام کی قیمت نکالیے :

23. $3x + 4$ جبکہ $x = 1$
24. $x^2 - 7x + 10$ جبکہ $x = 2$
25. $3x^2 - 2x + 1$ جبکہ $x = -2$
26. $-3x^2 - 4x + 3$ جبکہ $x = -4$
27. $2x + 3y$ جبکہ $x = -2$ اور $y = 3$
28. $4x - 3y$ جبکہ $x = -1$ اور $y = 3$
29. $2x^2 - 3xy + y^2$ جبکہ $x = 2$ اور $y = -3$
30. $3x^2 + 2xy - 4y^2$ جبکہ $x = -3$ اور $y = 1$

3-2 . الجبرائی ارقام کا ضرب : جب کسی ضرب میں اجزا برابر ہوں تو اُن کا حاصل ضرب تکراری اجزا کی قوت کہلاتا ہے۔ ہم ایسے حاصل ضرب کو ایک علامت سے ظاہر کرتے ہیں۔ $a \cdot a$ کے حاصل ضرب کی نمائندگی علامت a^2 کرتی ہے۔ اسی طرح $a \cdot a \cdot a$ کو a^3 ظاہر کرے گا اور عام طور پر ہم کہیں گے :

تعریف 3-1 : اگر n ایک مثبت عدد صحیح ہو تو علامت a^n جو a کی n ویں قوت ہے ایسے n اجزا کا حاصل ضرب ہوگا جس میں ہر جزو a کے برابر ہو اس طرح

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{\text{اجزا } n \text{ کے } a} \tag{3-1}$$

علامت a^n میں، a قاعدہ کہلاتا ہے اور n قوت کا قوت نما کہلاتا ہے۔

تمثیل 1 : $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$

چند مسئلے قوت نما کی اس تعریف کے لازمی نتیجہ ہیں۔

مسئلہ 3-1 : اگر n اور m مثبت اعداد صحیح ہیں اور $a \in R$ تو

$$\boxed{a^n a^m = a^{n+m}.} \tag{3-2}$$

ثبوت :

$$a^n \cdot a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{\text{اجزا } n \text{ کے } a} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{\text{اجزا } m \text{ کے } a} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{\text{اجزا } n+m \text{ کے } a} = a^{n+m}$$

مطالعہ کرنے والے کو مندرجہ ذیل دو مسئلے بھی ثابت کرنے چاہئیں :

مسئلہ 3-2 : اگر n اور m دو مثبت صحیح اعداد ہیں اور $a \in R$

$$\boxed{(a^n)^m = a^{nm}.} \tag{3-3}$$

مسئلہ 3-3 : اگر n ایک مثبت عدد صحیح ہے اور $b \in R$ اور a ، تو

$$\boxed{(ab)^n = a^n b^n.} \tag{3-4}$$

تمثیل 2 : $3^2 \cdot 3^4 = 3^6 = 729,$
$a^4 \cdot a^7 = a^{11}.$

تمثیل 3 : $(2^3)^2 = 2^6 = 64,$
$(a^5)^3 = a^{15}.$

تمثیل 4 : $(2 \cdot 3)^3 = 2^3 \cdot 3^3 = 8 \cdot 27 = 216$

جب کوئی قوت نما دکھا جائے تو قوت نما 1 مانا جائے گا۔

ان مسئلوں کے استعمال سے اور موضوعہ تقسیمی کی مدد سے ہم کون سی ارقام کو آپس میں ضرب کر سکتے ہیں؟

مثال 1 : $2x - 3y$ کو $3x + 4y$ سے ضرب دیجیے۔

حل : دوسرے دو ارکان کی ہر ایک رقم کو پہلے دو رکنی سے ضرب دینا چاہیے [یاد کرو کہ سوال 9(f) دفعہ 2-2 کا]۔

$$(2x - 3y)(3x + 4y) \equiv [(2x - 3y) \cdot 3x] + [(2x - 3y) \cdot 4y]$$

دائیں طرف کا ہر ایک حاصل ضرب پھر دائیں تقسیمی موضوعہ کی مدد سے پھیلایا جائے گا تاکہ نتیجہ یہ ہو :

$$6x^2 - 9xy + 8xy - 12y^2$$

اگر ہم یلساں ارقام کو پھیلائیں تو ہم کو حاصل ہوگا :

$$(2x - 3y)(3x + 4y) \equiv 6x^2 - xy - 12y^2$$

ایسے سوالات کو حل کرنے کا یہ طریقہ بعض اوقات آسان رہتا ہے :

ایک ہی حرف کی کثیر الارقام صعودی (یا نزولی) طاقتیں کلیۃً تلازمہ کی مدد سے ترتیب دیں، ایک کو دوسرے کے نیچے لکھیں، ضرب دیں اور حاصل ضرب کو جوڑ دیں۔ مندرجہ ذیل مثال پر غور کرو:

مثال 2 : $x^2 - 2y^2 + xy$ کو $2x - y$ سے ضرب دیجیے۔

حل :

$$\begin{array}{r} x^2 + xy - 2y^2 \\ 2x - y \\ \hline 2x^3 + 2x^2y - 4xy^2 \\ - x^2y - xy^2 + 2y^3 \\ \hline 2x^3 + x^2y - 5xy^2 + 2y^3 \end{array}$$

سوالات

بتائے ہوئے عمل اور قوت نما والے مسئلوں کی مدد سے حل کرو :

1. $a^2 \cdot a^7$
2. $3x^4 \cdot 2x^3$
3. $3x^3 \cdot x^4 \cdot x^5$
4. $(-3)^4 \cdot (-3)^5$
5. $y^{13} \cdot y^{11}$
6. $(2^3)^4$
7. $(a^5)^4$
8. $(3b)^5$
9. $(5c)^3$
10. $(3a)^4$
11. $(2a^3)^5$
12. $(x^4)^n$
13. $(a^r \cdot a^{r-1})$
14. $(x^{2m} \cdot x^{3n})^4$
15. $(2x^n)^n$

بتائے ہوئے طریقے سے ضرب پورا کر کے یکساں ارقام جمع کرو۔ نوٹ کریں کہ 1 سے 4 تک کے تمام موضوعہ ان سوالوں کے حل کرنے میں استعمال کریں :

16. $(4x - 3)(3x + 6)$
17. $(x + 3)(2x - 5)$
18. $(5a + 2b)(5a - 2b)$
19. $(4x + 2y)(4x - 2y)$
20. $(3x - 2)(2x + 5)$
21. $(r^2 - s^2)(r - s)$
22. $(x - 2y)^2$
23. $(x^2 - xy + y^2)(x + y)$
24. $(2x + 3x^2 - 1)(3x - 2)$
25. $(x^2 - 2x - 2)(x + 2x^2 - 4)$
26. $(-xy + 2x^2 - 3y^2)(x^2 - 4y^2 + xy)$
27. $(x - 1)(x + 2)(x - 3)$
28. $(x - 2)(x + 3)(x + 2)$
29. $(x^4 + 2x^2y^2 + 4y^4)(x^2 - 2y^2)$
30. $(a^{2n} - 7a^n + 10)(a^n - 1)$
31. $(a^{2n} - 7a^n + 10)(a - 1)$
32. $(x - 2x^2 + 5 - x^3)(3x - 4 + x^2)$
33. $(x^{2n} + 2x^n y^n + y^{2n})(x^{2n} - 2x^n y^n + y^{2n})$
34. $(x^n - y^n)^3$
35. $(x - y)^4$

3-3 الجبرائی عبارات کی تقسیم :

اس سے قبل کہ ہم ایک الجبرائی عبارت کو دوسری سے تقسیم کرنے کے قابل ہو سکیں۔ ہم قوت نما پر مزید ایک کلیہ ثابت کر لیں۔

مسئلہ 3-4 : اگر $a \in R\ (a \neq 0)$ اور n اور m مثبت صحیح اعداد ہوں تو

$$\frac{a^n}{a^m} = \begin{cases} a^{n-m} & \text{اگر } m, n \text{ سے بڑا ہو} \quad (3\text{-}5) \\ \dfrac{1}{a^{m-n}} & \text{اگر } n, m \text{ سے بڑا ہو} \quad (3\text{-}6) \\ 1 & m = n \text{ اگر} \quad (3\text{-}7) \end{cases}$$

ثبوت : یہ نتیجہ اس طرح لکھ کر حاصل ہوگا :

$$\frac{a^n}{a^m} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}^{n \text{ کے } a \text{ اجزاءِ ضربی}}}{\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{m \text{ کے } a \text{ اجزاءِ ضربی}}},$$

ساتھ ہی یاد کرو مسئلہ 7-2۔

تمثیل 1 : $\frac{x^8}{x^3} = x^5$; $\frac{x^4}{x^{11}} = \frac{1}{x^7}$; $\frac{x^6}{x^6} = 1$

اب ہم کسی بھی کثیرالارقام کو یک رقمی سے تقسیم کر سکتے ہیں۔ یہ، کثیرالارقام عبارت کی ہر ایک رقم کو یک رقمی سے تقسیم کرنے کے بعد اُن کے حاصل تقسیم کا الجبرائی جوڑ معلوم کر کے کیا جاتا ہے (یاد کیجیے دفعہ 2-4 کا سوال 13)۔

مثال 1 : $12x^3y^4 + 18x^4y^2 - 36xy^3$ کو $3x^2y^2$ سے تقسیم کرو۔

حل : اگر دفعہ 2-4 کے سوال 13 میں بیان کی گئی خصوصیت کو استعمال کریں تو حاصل ہوگا :

$$\frac{12x^3y^4 + 18x^4y^2 - 36xy^3}{3x^2y^2} = \frac{12x^3y^4}{3x^2y^2} + \frac{18x^4y^2}{3x^2y^2} - \frac{36xy^3}{3x^2y^2}$$

$$= 4xy^2 + 6x^2 - \frac{12y}{x}.$$

ہم نے الجبرائی عبارت کی تعریف الجبرائی ارقام کے جوڑ سے کی ہے (دفعہ 1-3)۔ کوئی بھی الجبرائی رقم اُن حروف میں جو اعداد کی نمائندگی کرتے ہیں ایک ناطق بےکسر (صحیح) رقم کہلاتی ہے۔ اگر یہ ایسے حاصل ضرب پر مشتمل ہو جو اُن اعداد کی مثبت غیر کسر قوتوں اور اُس جزو پر مبنی ہو جو اُس میں شامل نہیں ہے۔ مثلاً ax^3y اور $3x^4y^{3/4}$، x میں ناطق بےکسر رقمیں ہیں اور ax^3y اور $3x^4y^3$، y کی ناطق صحیح ارقام ہیں۔ رقم $by^{1/2}$ بھی ناطق صحیح رقم ہے x میں کیوں کہ یہ تعریف کے مطابق ہے۔ کوئی بھی کثیرالارقام جس میں ہر رقم ناطق عدد صحیح ہے ایک ناطق عدد صحیح عبارت یا کثیرالارقام کہلاتی ہے۔

تمثیل 2 : $3 - 5x^3 + \frac{3}{4}xy^2$، x اور y میں ایک کثیرالارقام ہے۔ بہرحال $-5/x^3$، x میں عدد صحیح نہیں ہے اور $5\sqrt{x}$، x میں نہ ناطق ہے اور نہ عدد صحیح۔

کسی بھی رقم کا درجہ جو کسی حرف میں ناطق عدد صحیح ہو اُس حرف کا قوت نما کہلاتا ہے۔ پس ax^3y اور $3x^4y^3$، x میں دوسرے اور چوتھے درجے کی ارقام ہیں لیکن y میں اوّل اور تیسرے درجے کی۔ کسی بھی ناطق عدد صحیح رقم کا درجہ جس میں دو یا دو سے زیادہ حروف ہوں اُن حروف

کے قوت نماؤں کی جمع ہوگی۔ ax^2y کا درجہ x اور y میں ہوگا $2 + 1 = 3$ جبکہ $3x^4y^3$ کا درجہ x اور y میں 7 ہے۔ کئی حروف والی اُس کثیر الارقام کا درجہ اُس رقم (یا ارقام) کا درجہ مانا جائے گا جو اُن حروف میں سب سے اونچے درجے کی ہو۔

تمثیل 3 : (a) $2x + 1$ ، $x^2 - 7x + 10$ اور $6 - 5x^2 + 3x^3$ ، x میں سلسلہ وار پہلے، دوسرے اور تیسرے درجے کی کثیر الارقام ہیں۔

(b) $3x^2y^5 + 4xy^3 - 7x^3y^2$ ، x میں تیسرے درجے کی، y میں پانچویں درجے کی اور x اور y میں ملا کر ساتویں درجے کی کثیر الارقام ہیں۔

اب ہم ایک کثیر رقم کا دوسری کثیر رقم سے تقسیم پر غور کریں گے۔ ہمارا طریقہ وہی ہوگا جو ہم حساب میں کرتے ہیں۔ خصوصیات جو ہم استعمال کریں گے وہ دفعہ 4–2 کے سوال 14 ، 15 میں بیان کی جا چکی ہیں۔ اگر ہم 28 کو 9 سے تقسیم کریں تو خارج قسمت 3 ہوگا اور باقی 1 ، اور ہم لکھیں گے :

$$\frac{28}{9} = 3 + \frac{1}{9}$$

ایک کثیر رقمی کو دوسرے سے تقسیم دینے کے لیے :

1. ہر کثیر رقم کو کسی مشترک حرف کے نزولی قویٰ میں لکھو۔
2. مقسوم (وہ کثیر رقمی جس کو تقسیم کرنا ہے) کی پہلی رقم مقسوم علیہ کی پہلی رقم سے تقسیم کرو۔ اس قدم سے ہم کو خارج قسمت کی پہلی رقم ملے گی۔
3. مقسوم علیہ کو خارج قسمت کی پہلی رقم سے ضرب دو اور حاصل ضرب کو مقسوم میں سے تفریق کر دو۔
4. اس طرح جو باقی حاصل ہو اُس کو نیا مقسوم مان کر اسی عمل کو دُہراؤ، جس سے خارج قسمت کی دوسری رقم حاصل ہو جائے گی۔
5. یہی عمل اُس وقت تک جاری رکھو جب تک کہ ایسا باقی حاصل نہ ہو جو یا تو صفر ہو یا اُس مشترک حرف میں خارج قسمت کی نسبت سے کمتر درجے کا ہو۔ اگر باقی صفر ہو تو تقسیم قطعی ہے۔ اور یہ تقسیم دفعہ 4–2 کے سوال 14 کے اطلاق سے ہوئی۔ اگر باقی صفر نہ ہو تو تقسیم قطعی نہ کہلائے گی۔ لیکن یہ دفعہ 4–2 کے سوال 15 کے استعمال سے ہوگا۔

عمل مندرجہ ذیل مثال کی طرح ترتیب دیا جائے :

مثال 2 : $3x^3 - 4x^2y + 5xy^2 + 6y^3$ کو $x^2 - 2xy + 3y^2$ سے تقسیم کرو۔

حل:

$3x^3 - 4x^2y + 5xy^2 + 6y^3$ (مقسوم)	$x^2 - 2xy + 3y^2$ (مقسوم علیہ)
$3x^3 - 6x^2y + 9xy^2$	$3x + 2y$ (خارج قسمت)
$2x^2y - 4xy^2 + 6y^3$	
$2x^2y - 4xy^2 + 6y^3$	
0 (باقی)	

یہ نتیجہ اِس شکل میں ظاہر کیا جا سکتا ہے :

$$\frac{3x^3 - 4x^2y + 5xy^2 + 6y^3}{x^2 - 2xy + 3y^2} \equiv 3x + 2y$$

مثال 3 : $5x^3 - 14x + 3$ کو $x - 2$ سے تقسیم کرو۔

حل : کیوں کہ دیے ہوئے مقسوم میں x^2 والی رقم نہیں ہے اس لیے اس کا ضریب صفر ہوگا اور ہم کو حاصل ہوگا :

$5x^3 + 0x^2 - 14x + 3$	$x - 2$
$5x^3 - 10x^2$	$5x^2 + 10x + 6$
$10x^2 - 14x + 3$	
$10x^2 - 20x$	
$6x + 3$	
$6x - 12$	
15	

اس نتیجے کو اس طرح لکھیں گے :

$$\frac{5x^3 - 14x + 3}{x - 2} \equiv 5x^2 + 10x + 6 + \frac{15}{x - 2}$$

اگر x دو کے برابر نہ ہو۔

x میں دی ہوئی کثیر الارقام کو اکثر علامتی طور پر $P(x)$ سے ظاہر کرتے ہیں اور اس طرح پڑھتے ہیں " x کی کثیر رقم P " (اِس عبارت کا مطلب x کا P گنا نہیں ہوتا)۔ اسی طرح x اور y کی کثیر رقم کو علامتی طور پر $Q(x, y)$ سے ظاہر کرتے ہیں۔ اس علامتی اظہار میں اگر x کی دو کثیر رقم کے تقسیم میں $P(x)$ مقسوم کو، $D(x)$ مقسوم علیہ کو، $Q(x)$ خارج قسمت کو اور $R(x)$ باقی کو ظاہر کرے تو نتیجے کو ہم اس طرح لکھ سکتے ہیں :

$$\frac{P(x)}{D(x)} \equiv Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}, \qquad (3\text{–}8)$$

اگر $D(x)$ صفر کے برابر نہ ہو، یا

$$P(x) \equiv Q(x) \cdot D(x) + R(x). \qquad (3\text{-}9)$$

(اس مساوات اور دفعہ 4–2 کے سوال 15 کی عبارت کی یکسانیت کو نوٹ کرو)

اسی طرح x اور y کی دو کثیر رقم کی تقسیم میں

$$P(x, y) \equiv Q(x, y) \cdot D(x, y) + R(x, y) \qquad (3\text{-}10)$$

تمثیل 4 : اس دفعہ کے سوال 2 میں

$$P(x, y) = 3x^3 - 4x^2y + 5xy^2 + 6y^3, \quad D(x, y) = x^2 - 2xy + 3y^2$$
$$Q(x, y) = 3x + 2y, \quad R(x, y) = 0.$$

سوال 3 میں

$$P(x) = 5x^3 - 14x + 3, \quad D(x) = x - 2$$
$$Q(x) = 5x^2 + 10x + 6, \quad R(x) = 15$$

سوالات

تقسیم کرو:

1. $9xy^2 - 6x^3$ کو $3x$ سے
2. $4x^2y^3 - 24xy^4$ کو $2xy^2$ سے
3. $6x^3 - 9x^4y$ کو $3xy$ سے
4. $-15x^3y^3 + 20x^3y^2$ کو $-5x^2y^2$ سے
5. $3x^2y - 4xy^2 + 6x^3y^3$ کو xy سے
6. $7x^3y^2 - 14x^5y^3 + 28x^6y^5 - 21x^7y^6$ کو $7x^3y^2$ سے

تقسیم کرو اور اُس میں خارج قسمت اور باقی نکالو اور ہر سوال کے نتیجے کو مساوات (3–9) یا (3–10) کی طرح لکھو:

7. $x^2 - 7x + 10$ کو $x - 5$ سے
8. $2y^2 - 5y - 6$ کو $2y - 1$ سے
9. $3x^2 - 13x + 4$ کو $x - 4$ سے
10. $2x^2 - 5x - 12$ کو $2x + 3$ سے
11. $2x^3 - 7x^2 + 11x - 4$ کو $2x - 1$ سے
12. $y^3 - 4y^2 - 2 + 5y$ کو $y - 1$ سے
13. $x^2y - 6x^3 - 12xy^2 - 6y^3$ کو $2x - 3y$ سے
14. $2x^3 - 11x^2y + 13xy^2 - 4y^3$ کو $x - 4y$ سے

15 $4x^3 + 5 + 4x^2 - 13x$ کو $2x + 5$ سے

16. $4x^3 + 5x - 6$ کو $2x - 3$ سے

17. $5x^3 - 2x^2 + 3x - 4$ کو $x^2 - 2x + 1$ سے

18. $4x^2 + x - 6x^3 + 3$ کو $3x^2 + 5$ سے

19. $x^6 - y^6$ کو $x - y$ سے 20. $x^7 - y^7$ کو $x - y$ سے

x (یا کسی ایک حرف والے) کثیر رقم کے طریقۂ تقسیم کو جبکہ مقسوم علیہ $a - x$ قسم کا ہو بہت ہی آسان بنایا جا سکتا ہے۔ یہ عمل جس کا نام ترکیبی (تالیفی) تقسیم ہے۔ مثال 3 کے سوال کو لے کر سمجھایا جائے گا۔

ارقام کے صرف ضریب لکھ کر ہمیں حاصل ہوگا:

5	+ 0	− 14	3	1	− 2
5	− 10			5	10	6
	10	− 14			
	10	− 20			
		6	3		
		6	− 12		
			15		

اب ہم اُن ضریب کو نظر انداز کر دیتے ہیں جو واضح طور پر دُہرائے گئے ہیں۔ دوسری، چوتھی اور چھٹی .... سطور کی پہلی رقم اور تیسری، پانچویں، ساتویں وغیرہ سطور کی دوسری رقم۔ اگر ہم باقی ارقام کو اختصار سے لکھیں، پہلا ضریب 5 تیسری سطر میں لکھیں تو نوٹ کرنے کے قابل یہ بات ہے کہ ہم خارج قسمت کے ایک کو نظر انداز کر سکتے ہیں اور اب ہم اس طرح لکھ سکتے ہیں:

5	+0	−14	3	−2
	−10	−20	−12	
5	10	6	15	

خارج قسمت کے ضریب بھی نظر انداز کر دیے گئے ہیں کیوں کہ وہ تیسری سطر کے پہلے تین ضریب کی حیثیت سے ظاہر ہوئے ہیں جبکہ باقی 15 آخری عدد کی حیثیت سے ظاہر ہوا ہے۔

حل کا آخری درجہ یہ ہے کہ تفریق کو جوڑ سے بدل دیتے ہیں یعنی مقسوم علیہ کی اور دوسری سطر کی علامتیں بدل دیتے ہیں (-2 سے $+2$) اس طرح:

5	+0	−14	3	| 2
	10	20	12	
5	10	6	15	

یہ ترتیب $5x^3 - 14x + 3$ کو $x - 2$ سے ترکیبی تقسیم کی نمائندگی کرتی ہے۔ اس سے خارج قسمت $5x^2 + 10x + 6$ اور باقی 15 حاصل ہوتا ہے۔

اب ہم کو ترکیبی (تالیفی) تقسیم کے عمل کو اختصار سے لکھنا چاہیے۔ کسی کثیر رقم $P(x)$ کو دو رقم $x - a$ سے تقسیم کرنے کے لیے $P(x)$ کے ضریب (نزولی قوت نما کی ترتیب سے) ایک سطر میں ایسے ترتیب دیجیے کہ x کی کسی غائب قوت نما کا ضریب صفر لکھو اور a کو دائیں طرف لکھو۔ $P(x)$ کے پہلے ضریب کو تیسری سطر کی اوّل جگہ پر لکھو۔ اس پہلے ضریب کو a سے ضرب دے کر حاصل ضرب کو دوسری سطر میں $P(x)$ کے دوسرے ضریب کے نیچے لکھو۔ اس حاصل ضرب اور دوسرے ضریب کا جوڑ تیسری سطر میں لکھو۔ اس جوڑ کو a سے ضرب دو۔ اور حاصل ضرب کو $P(x)$ کے دوسرے ضریب میں جوڑ دو اور نئے جوڑ کو تیسری سطر میں لکھو۔ یہ اسی طرح جاری رکھو جب تک کہ حاصل ضرب کو $P(x)$ کے آخری ضریب میں نہ جوڑ دیا جائے۔

تیسری سطر میں آخری رقم باقی ہے۔ اس سے قبل کے اعداد نزولی ترتیب میں کیے گئے x کی قوت نما کے ضریب کی نمائندگی کرتے ہیں۔ خارج قسمت کثیر الارقام کے درجہ (ڈگری) سے ایک کم درجہ کا ہے۔ ترکیبی (تالیفی) تقسیم کا عمل ہمارے بعد کے کام میں بہت فائدہ مند ثابت ہوگا۔

مثال 4 : $2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 5x + 6$ کو $x + 3$ سے ترکیبی تقسیم کے طریقے سے تقسیم کر کے خارج قسمت اور باقی نکالو۔

حل : اس مثال میں، $x - a = x - (-3)$ تاکہ $a = -3$

2	+3	−4	+5	+6	| −3
	−6	+9	−15	+30	
2	−3	5	−10	36	

پس خارج قسمت $2x^3 - 3x^2 + 5x - 10$ اور باقی 36 ہے۔

سوالات

مندرجہ ذیل کی ہر تقسیم میں ترکیبی (تالیفی) تقسیم سے خارج قسمت اور باقی نکالو:

1. $3x^2 - 2x - 4$ کو $x - 3$ سے
2. $2x^3 + 3x^2 - 7$ کو $x + 1$ سے

3. $x^3 - 2x^2 + 9$ کو $x + 2$ سے 4. $x^3 + 4x - 7$ کو $x - 3$ سے

5. $x^4 - 2x^3 - 3x^2 - 4x - 8$ کو (a) $x - 2$ (b) $x + 1$ سے

6. $2x^4 - x^3 - 18x^2 - 7$ کو (a) $x + 3$ (b) $x - 3$ سے

7. $3x^4 - 7x - 20$ کو (a) $x - 2$ (b) $x + 2$ سے

8. $2x^4 - 3x^3 - 20x^2 - 6$ کو (a) $x - 4$ (b) $x + 3$ سے

مندرجہ ذیل تقسیم کے سوالوں میں ترکیبی تقسیم سے خارج قسمت اور باقی نکالو اور جواب مساوات (3-9) کی شکل میں لکھو:

9. $x^3 - 2x^2 + 3x - 4$ کو $x - 3$ سے 10. $2x^3 + x^2 - x + 4$ کو $x + 1$ سے

11. $x^4 - 5x^3 + x^2 - 6$ کو $x - 1$ سے 12. $x^3 + 3x^2 - 2x - 5$ کو $x + 2$ سے

3-4 خصوصی حاصل ضرب:

کچھ ایسے خصوصی حاصل ضرب ہیں جو الجبرا میں اکثر واقع ہوتے ہیں اور ان کو درجہ وار ترتیب دے دیا گیا ہے۔ یہ ذیل میں درج ہیں۔ ضابطہ میں حروف کسی بھی الجبرائی عبارت کے لیے استعمال کیے جا سکتے ہیں۔ ہر حاصل ضرب باب 2 کے موضوعات کا براہ راست نتیجہ ہیں۔ مطالعہ کرنے والے کو ہر ایک کی تصدیق نہ صرف عمل کرکے اور وجہ بتا کر کرنا چاہیے بلکہ اُن کو ازبر کر لینا چاہیے تاکہ وہ حاصل ضرب کو اجزاءِ ضربی اور اجزاءِ ضربی کو حاصل ضرب سے ممیز کر سکے۔

$$a(x + y) \equiv ax + ay. \tag{3-11}$$

$$(x + y)(x - y) \equiv x^2 - y^2. \tag{3-12}$$

$$(x \pm y)^2 \equiv x^2 \pm 2xy + y^2. \tag{3-13}^*$$

$$(x + a)(x + b) \equiv x^2 + (a + b)x + ab. \tag{3-14}$$

$$(ax + b)(cx + d) \equiv acx^2 + (ad + bc)x + bd. \tag{3-15}$$

$$(x \pm y)^3 \equiv x^3 \pm 3x^2y + 3xy^2 \pm y^3. \tag{3-16}$$

$$(x \pm y)(x^2 \mp xy + y^2) \equiv x^3 \pm y^3. \tag{3-17}$$

---

* علامت $\pm$ کو پڑھا جائے گا "جوڑ یا باقی" اگر اوپر (نیچے) کی علامت بائیں ہاتھ کے ممبر میں استعمال کیا گیا ہے تو وہ دائیں ہاتھ کے ممبر میں بھی استعمال ہوگا تاکہ $(x \pm y)^2 \equiv x^2 \pm 2xy + y^2$ کا مطلب ہے $(x + y)^2 \equiv x^2 + 2xy + y^2$ اور $(x - y)^2 \equiv x^2 - 2xy + y^2$

مطالعہ کرنے والے کو معلوم ہونا چاہیے کہ ذیل کی تمثیلات میں مندرجہ بالا ضابطوں میں سے کون سا استعمال کیا گیا ہے۔

تمثیل 1 : $(2x^2 - 3y)(2x^2 + 3y) \equiv (2x^2)^2 - (3y)^2$
$\equiv 4x^4 - 9y^2$

تمثیل 2 : $(x + 2)(x + 5) \equiv x^2 + (2 + 5)x + 10$
$\equiv x^2 + 7x + 10.$

تمثیل 3 : $(3x + 4y)(2x - 3y) \equiv 6x^2 + (-9 + 8)xy - 12y^2$
$\equiv 6x^2 - xy - 12y^2$

تمثیل 4 : $(x + y - 1)^3 \equiv [(x + y) - 1]^3$
$\equiv (x + y)^3 - 3(x + y)^2 + 3(x + y) - 1$
$\equiv x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 - 3x^2 - 6xy - 3y^2 + 3x + 3y - 1$

یہاں $(x + y)$ کو پہلے ایک رقم مانا گیا ہے۔

تمثیل 5 :
$(3x + 2y)(9x^2 - 6xy + 4y^2) \equiv (3x + 2y)[(3x)^2 - (3x)(2y) + (2y)^2]$
$\equiv (3x)^3 + (2y)^3 \equiv 27x^3 + 8y^3$

سوالات

مندرجہ ذیل سوالات میں حاصل ضرب معلوم کرو :

1. $2a(3x - 4y)$
2. $-3x(2x + 7y)$
3. $-7xy(3x^2 + 4y)$
4. $4x^3yz(x^2 + xy + yz)$
5. $(2x - 3y)(2x + 3y)$
6. $(7x + 5y^2)(7x - 5y^2)$
7. $(x + 2y)(x - 2y)(x^2 + 4y^2)$
8. $(x - 3)^2$
9. $(2x + 7y)^2$
10. $(3x^2y - 5z^2)^2$
11. $(x - 2)(x - 5)$
12. $(2x + 3)(x - 5)$
13. $(xy^2 - z^2w)^2$
14. $(\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y)^2$
15. $(4x - 3y)(7x + 3y)$
16. $[(x + 1) - z][(x + 1) + z]$
17. $(2x + 3y + 3)(2x + 3y - 3)$
18. $(2x + 3y + 4z)^2$
19. $(x - 2y - z)^2$
20. $(2a + b)^3$
21. $(x + 2)(x^2 - 2x + 4)$
22. $(x - 3)(x^2 + 3x + 9)$
23. $(x + 3y + 2z - 4w)(x + 3y - 2z + 4w)$
24. $(4x - 2y - 3z + 3w)(4x + 2y + 3z + 3w)$
25. $(a - b + c - d)^2$
26. $(2a + 3b - c - 4d)^2$
27. $[2(x + 2y) - 3][2(x + 2y) + 4]$
28. $[2(x - 3y) + 5][3(x - 3y) - 2]$
29. $(2x + 3y)^3$
30. $(5x - 3y)^3$

3-5 اجزا ضربی اور اجزا ضربی کا نکالنا :

کسی الجبرائی عبارت کے اجزا ضربی نکالنے کا عمل ویسا ہی ہے جیسا کہ کسی مخلوط عدد کے اجزا ضربی نکالنا۔ دفعہ 1-4 کے عدد مخلوط اور عدد مفرد کی بحث یاد کرو۔ یہ عمل جو کہ ابتدائی منزل

میں عموماً ناطق ضریب والے کثیر رقم کے اجزاء ضربی معلوم کرنے کے لیے محدود ہے اور اُن اجزاء ضربی کے لیے جو کہ قطعی طور پر غیر ناطق اعداد سے مستثنیٰ ہوں۔ اکثر اُن عمل کے اُلٹانے سے پورا ہوتا ہے جنھیں دفعہ 4-3 میں استعمال کیا گیا ہے۔ ایسا عمل اجزاء ضربی اُس وقت مکمل سمجھا جاتا ہے جبکہ ہر ایک الجبرائی جزو ایک مفرد جزو ضربی ہو یعنی وہ الجبرائی عبارت جس کے اجزاء ضربی مندرجہ بالا پابندیوں کو بغیر ہٹائے نہیں کیے جا سکتے۔ ذیل میں اجزاء ضربی نکالنے کے کچھ زیادہ عام نمونے تمثیلی طور پر دیے گئے ہیں۔ اس بحث میں موضوعات تقسیمی کی اہمیت اور اُن کے اطلاق کو نوٹ کرو۔

مثال 1 : $2ax^2 - 4ay^2 + 8a^2x$ کے اجزاء ضربی نکالو۔

حل : اس سوال کے کثیر رقم میں $2a$ ایک مشترک جزو ہے

$$2ax^2 - 4ay^2 + 8a^2x \equiv 2a(x^2 - 2y^2 + 4ax)$$

مثال 2 : $x(a + 2b) - 3y(a + 2b)$ کے اجزاء ضربی نکالو۔

حل : دونوں میں سے ہر ایک عبارت میں $(a + 2b)$ مشترک رقم ہے۔ اس لیے

$$x(a + 2b) - 3y(a + 2b) \equiv (x - 3y)(a + 2b)$$

مثال 3 : $\frac{4x^2}{y^2} - (9a - b)^2$ کے اجزاء ضربی نکالو۔

حل : یہ عبارت دو مربعوں کی تفریق ہے

$$\frac{4x^2}{y^2} - (9a - b)^2 \equiv \left(\frac{2x}{y}\right)^2 - (9a - b)^2$$

$$\equiv \left[\frac{2x}{y} + (9a - b)\right]\left[\frac{2x}{y} - (9a - b)\right]$$

$$\equiv \left(\frac{2x}{y} + 9a - b\right)\left(\frac{2x}{y} - 9a + b\right)$$

مثال 4 : $9x^2 - 30xy + 25y^2$ کے اجزاء ضربی نکالو۔

حل : یہ الجبرائی عبارت ایک مکمل مربع ہے

$$9x^2 - 30xy + 25y^2 \equiv (3x - 5y)^2$$

مثال 5 : $27x^3 + \frac{8}{y^3}$ کے اجزاء ضربی معلوم کرو۔

حل : یہ الجبرائی عبارت دو مکعبی اعداد کا فرق ہے۔ اس لیے

$$27x^3 + \frac{8}{y^3} \quad \left(3x + \frac{2}{y}\right)\left(9x^2 - \frac{6x}{y} + \frac{4}{y^2}\right)$$

مثال 6 : $12x^2 + 7xy - 10y^2$ کے اجزا ضربی نکالو۔

حل : یہ سہ رقمی مساوات (3-15) کی طرح ہے اور اس کے اجزا ضربی طریقۂ آزمائش اور خطا سے معلوم کیے جائیں گے۔ نتیجے میں اجزا $(ax + by)(cx + dy)$ قسم کے ہوں گے جہاں کہ $ac = 12$، $bd = -10$ اور $ad + bc = 7$۔ یہاں a اور c دونوں ہی مثبت ہوں گے اور b اور d کی علامات مختلف ہوں گی۔ صحیح اجتماع ہوگا

$$12x^2 + 7xy - 10y^2 \equiv (4x + 5y)(3x - 2y)$$

مثال 7 : $6x^4 + 7x^2y^2 - 3y^4$ کے اجزا ضربی معلوم کرو۔

حل : یہ بالکل مثال 6 کی طرح ہے

$$6x^4 + 7x^2y^2 - 3y^4 \equiv (3x^2 - y^2)(2x^2 + 3y^2)$$

حالانکہ دائیں کی پہلی رقم دو مربعوں کا فرق ہے۔ اس کے مزید اجزا ضربی نہیں معلوم کر سکتے کیوں کہ ایسا کرنے سے اجزا نکالنے میں غیر ناطق ارقام داخل ہو جائیں گی۔

سوالات

ذیل کے سوالات میں مکمل اجزا ضربی نکالو:

1. $4x - 20$
2. $10x + 15yz$
3. $3y^2 - 9y$
4. $4x^3y^2 + 6x^2y^3$
5. $xy^2z^3 - 3x^2yz^2 + 5xy^3z^2$
6. $a^2b^3c^4 - a^3b^4c^5 + 2a^2b^4c^4$
7. $3y(2x + 5) - 4x(2x + 5)$
8. $3y(4 - y) + 6x^2(4 - y)$
9. $2x^2(x + 3y) - 6xz(x + 3y)$
10. $3x(3 - 2y) - 2xy(3 - 2y)$
11. $9 - a^2$
12. $16x^2 - 9y^2$
13. $225a^8 - 64b^2$
14. $\left(\frac{c^6}{d^8}\right) - 121$
15. $x^3y^4 - 25xd^6$
16. $0.01x^4 - 196y^8$
17. $(x + 2y)^2 - z^2$
18. $(3x - 2y)^2 - 25z^2$
19. $(a + b)^2 - (c + d)^2$
20. $9(2x - y)^2 - 4(2a + b)^2$
21. $81(4x - 3y)^2 - 25(3z + w)^2$
22. $x^2 + 6x + 9 - (y^2 + 4y + 4)$
23. $x^2 - 8x + 16$
24. $4a^2 - 12ab + 9b^2$
25. $60xy + 9x^2y^2 + 121$
26. $2x^3 - 28x^2 + 98x$
27. $5z^2 - 30wz + 45w^2$
28. $x^{2n} + 2x^ny^n + y^{2n}$
29. $(3 - x)^2 + 8(3 - x) + 16$
30. $25 - 30(2x - 3y) + 9(2x - 3y)^2$
31. $a^3 - 8$
32. $1 + \left(\frac{8}{x^9}\right)$

33. $8x^{6n} + 27y^{3m}$
34. $x^3 - (\frac{y^3}{64})$
35. $27(x-y)^3 - 8(x+y)^3$
36. $5(a-2b)^3 - 625(a-2b)^3$
37. $x^2 - 7x + 12$
38. $y^2 - 2y - 8$
39. $a^2b^2 - ab - 20$
40. $2x^2 + 8x + 6$
41. $35x^2 - 24x + 4$
42. $3y^2 - y - 10$
43. $6a^2 + 7a - 20$
44. $2x^2 - 23xy - 39y^2$
45. $(x+y)^2 - 7(x+y) + 10$
46. $(y+z)^2 + (y+z) - 42$
47. $2(2x+y)^2 - (2x+y) - 10$
48. $6(x+y)^2 + 5(x+y)(y+z) - 6(y+z)^2$
49. $12(a+b)^2 - 14(a+b)(c+d) - 10(c+d)^2$
50. $4(x-2)^2 + 5(x-2)(y+4) - 21(y+4)^2$

بہت سی ایسی الجبرائی عبارات ہیں جن کو مناسب طور پر ترتیب دینے سے سابقہ سوالوں میں سے کسی نہ کسی سوال کی شکل میں آجائیں گے پھر اُن کے اجزاء ضربی نکالے جا سکیں گے۔

مثال 8 : $ax - ay - bx + by$

حل : اگر تلازمی موضوعہ کی مدد سے ہم پہلی دو ارقام اور آخری دو ارقام کو ساتھ ساتھ لے لیں اور (موضوعہ تقسیمی کے استعمال سے) قدر مشترک باہر نکال لیں تو یہ عبارت سوال 2 میں بدل جائے گی۔

$$ax - ay - bx + by \equiv a(x-y) - b(x-y) \equiv (x-y)(a-b)$$

مثال 9 : $4x^3 - 12x^2 - x + 3$ کے اجزاء ضربی نکالو۔

حل : پہلی دو اور آخری دو ارقام کے گروپ بناؤ

$$\begin{aligned} 4x^3 - 12x^2 - x + 3 &\equiv 4x^2(x-3) - (x-3) \\ &\equiv (x-3)(4x^2-1) \\ &\equiv (x-3)(2x+1)(2x-1) \end{aligned}$$

ان دونوں مثالوں میں ہم پہلی اور تیسری رقم، اور دوسری اور چوتھی رقم کے گروپ بنا سکتے تھے اور ہم کو یہی جواب حاصل ہوگا۔

مثال 10 : $4x^2 - 12xy + 9y^2 + 4x - 6y - 3$ کے اجزاء ضربی نکالو۔

حل : اگر ہم پہلی تین ارقام کا گروپ بنالیں تو حل صاف ظاہر ہے

$$\begin{aligned} 4x^2 - 12xy + 9y^2 + 4x - 6y - 3 &\equiv (2x-3y)^2 + 2(2x-3y) - 3 \\ &\equiv [(2x-3y)+3][(2x-3y)-1] \\ &\equiv (2x-3y+3)(2x-3y-1). \end{aligned}$$

مثال 11 : $x^4 + 2x^2y^2 + 9y^4$ کے اجزاء ضربی نکالو۔

حل : اگر دوسری رقم کا ضریب 6 ہوتا تو عبارت مربع کامل ہوتی۔ اس لیے اگر ہم $4x^2y^2$ جوڑ دیں

(اور گھٹا دیں) تو حل ظاہر ہے۔

$$x^4 + 2x^2y^2 + 9y^4 \equiv x^4 + 6x^2y^2 + 9y^4 - 4x^2y^2$$
$$\equiv (x^2 + 3y^2)^2 - (2xy)^2$$
$$\equiv (x^2 + 3y^2 + 2xy)(x^2 + 3y^2 - 2xy)$$

سوالات

ذیل کی عبارات کے اجزاء ضربی نکالو:

1. $ax - ay - by + bx$
2. $ax - 2ay - 6by + 3bx$
3. $x^3 - 2x^2 + 4x - 8$
4. $y^3 - 2y^2 + 5y - 10$
5. $2a - 6 - ab^2 + 3b^2$
6. $x^3 + 3x^2 - 9x - 27$
7. $x^2 - 2x + 1 - y^2$
8. $xy^3 + 2y^2 - xy - 2$
9. $4x^2 - y^2 + 4y - 4$
10. $x^6 - 7x^3 - 8$
11. $x^2 + 2xy + y^2 - z^2 + 2zw - w^2$
12. $4a^2 - x^2 + b^2 - y^2 - 4ab - 2xy$
13. $x^3 + 4xy + 4y^3 - x - 2y - 6$
14. $x^3 - 5x^2 - x + 5$
15. $x^4 - 7x^2y^2 + 9y^4$
16. $y^4 + y^2 + 25$
17. $a^4 + 2a^2b^2 + 9b^4$
18. $x^4 + 4y^4$
19. $a^8 - b^8$
20. $x^6 + 1$
21. $x^2 + 2xy - z^2 - 2yz$
22. $(x^2 + 2x - 3)^2 - 4$
23. $(x - y - 2z)^2 - (2x + y - z)^2$
24. $2(x + 2)^2 (x - 3) + 3(x + 2)(x - 3)^2$

3-6 کسور کو مفرد شکل میں لانا:

کسور کے لیے خواہ وہ الجبرائی ہوں یا حسابی بنیادی اصول یہ ہے کہ اُس کی قیمت تبدیل نہیں ہوگی۔ اگر ہم اُس کے شمار کنندہ اور نسب نما دونوں کو ایک ہی عدد سے (صفر نہیں) ضرب یا تقسیم دیں۔ یہ اصول مسئلہ 2-8 میں بیان کیا گیا تھا۔ اس لیے کسی بھی کسر کا اختصار کرنا یا اُس کو کمترین ارقام میں لانا ہمیشہ ہی ممکن ہے۔ بُنیادی اصولوں کی مدد سے شمار کنندہ اور نسب نما کے اجزاء ضربی اُن کے مفرد اجزاء ضربی میں نکالو اور شمار کنندہ اور نسب نما کو اُن کے تمام مشترک اجزا کے حاصل ضرب سے تقسیم دو۔

مثال 1 : $\frac{8x^4y^7}{12x^6y^3}$ کو کمترین ارقام میں تحویل کرو۔

حل :

$$\frac{8x^4y^7}{12x^6y^3} \equiv \frac{2^3x^4y^7}{2^2 \cdot 3x^6y^3} \equiv \frac{2^2x^4y^3 \cdot 2y^4}{2^2x^4y^3 \cdot 3x^2}$$

شمار کنندہ اور نسب نما دونوں کو $2^2x^4y^3$ سے تقسیم دینے سے ہمیں حاصل ہوگا

$$\frac{8x^4y^7}{12x^6y^3} \equiv \frac{2y^4}{3x^2}$$

مثال 2 : $\frac{x^2 - 7x + 10}{2x^2 - x - 6}$ کو اُس کی کمترین ارقام میں تحویل کرو۔

حل : اگر ہم شمار کنندہ اور نسب نما دونوں کے اجزاء ضربی نکالیں تو :

$$\frac{x^2 - 7x + 10}{2x^2 - x - 6} \equiv \frac{(x - 5)(x - 2)}{(2x + 3)(x - 2)}$$

اور شمار کنندہ اور نسب نما دونوں کو ہی $x - 2$ سے تقسیم کر دیں یعنی مسئلہ 2-8 لگائیں تو ہمیں حاصل ہوگا

$$\frac{x^2 - 7x + 10}{2x^2 - x - 6} \equiv \frac{x - 5}{2x + 3}$$

کسی بھی کسر کے شمار کنندہ اور نسب نما کو اُس کے مشترک جزو سے تقسیم کرکے اُس جزو کے اخراج کو تنسیخ ضربی کہتے ہیں۔ اس عمل کو احتیاط سے استعمال کرنا چاہیے کیوں کہ مسئلہ 2-8 صرف اُسی وقت صحیح ہے جب x صفر کے برابر نہیں ہے۔ اس مثال میں متماثلہ x کی تمام قیمتوں کے لیے صحیح ہے سوائے جبکہ $x = 2$ یا $x = -\frac{3}{2}$ کے جو کہ جائز قیمتیں نہیں ہیں۔

مثال 3 : $\frac{12x^2 + 30x - 72}{52x - 8x^2 - 60}$ کو کمترین ارقام میں لاؤ۔

حل :
$$\frac{12x^2 + 30x - 72}{52x - 8x^2 - 60} \equiv \frac{6(2x - 3)(x + 4)}{4(3 - 2x)(x - 5)} \equiv \frac{3(x + 4)}{2(5 - x)}$$

یہ متماثلہ اس امر کا لازمی نتیجہ ہے کہ $2x - 3 = -(3 - 2x)$ (دفعہ 2-4 کے سوال 4 کو یاد کرو)

سوالات

کمترین ارقام میں لاؤ :

1. $\frac{28}{63}$
2. $\frac{27x^3}{225x^5}$
3. $\frac{a^4x^3y}{a^2xy^3}$
4. $\frac{a^2 + ab}{3a + 2a^3}$
5. $\frac{a^2x - a^2y}{ax^2 - ay^2}$
6. $\frac{24a^2}{6a^2 - 9a}$
7. $\frac{x^2 - 1}{x^2 - x}$
8. $\frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4}$
9. $\frac{x^2 - 16}{x^2 - 8x + 16}$
10. $\frac{a^2 - 3a - 4}{a^2 - a - 12}$

11. $\frac{y^2 - y - 6}{y^2 + 2y - 15}$

12. $\frac{2x^2 + 5x - 12}{4x^2 - 4x - 3}$

13. $\frac{6a^2 - 7a - 3}{4a^2 - 8a + 3}$

14. $\frac{ax + ay - bx - by}{am - bm - an + bn}$

15. $\frac{14x - 24 - 2x^2}{x^2 + x - 20}$

16. $\frac{(4x^2 - 9y^2)(18x - 12)}{(2x - 3y)(12x - 8)}$

17. $\frac{x^2 - 36}{x^3 - 216}$

18. $\frac{2x^2 - 14x + 20}{7x - 2x^2 - 6}$

19. $\frac{2(x^2 - y^2)xy + x^4 - y^4}{x^4 - y^4}$

20. $\frac{y^6 + 64}{y^4 - 4y^2 + 16}$

3-7 . کسور کو جوڑنا : دو یا دو سے زیادہ ایسی کسور کا الجبرائی جوڑ جن کا نسب نما ایک ہی ہو وہ کسر ہوگی۔ جس کا نسب نما مشترک ہے اور شمار کنندہ دی ہوئی کسور کے شمار کنندہ کا الجبرائی جوڑ ہوگا۔ یہ دفعہ 4-2 کے سوال 13 میں ثابت کیا گیا تھا۔

تمثیل : $\frac{2x^2}{x-4} - \frac{3x}{x-4} + \frac{5}{x-4} \equiv \frac{2x^2 - 3x + 5}{x-4}$

ایسی دو یا دو سے زیادہ کسور کا الجبرائی جوڑ جن کے نسب نما مختلف ہوں، نکالنے کے لیے ہم ان کسور کو ایسی مساوی القیمت کسور سے بدل دیں گے جن کے نسب نما ایک سے ہی ہوں۔ کمترین مشترک نسب نما استعمال کرنا بہتر ہوگا۔ دو یا اس سے زیادہ کسور کا کمترین مشترک نسب نما تمام نسب نماؤں کے یکتا مفرد اجزا کا حاصل ضرب ہوگا جس میں ہر جزو اپنے بڑے سے بڑے قوت نما کے ساتھ شامل ہوگا جو جزو میں تھا اور یہ مندرجہ ذیل اہم مسئلہ کا واقعی نتیجہ ہے۔

مسئلہ 3-5 :

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \equiv \frac{ad + bc}{bd} \qquad (b, d \neq 0)$$

ثبوت : مسئلہ 2-8 سے ہمیں حاصل ہوگا

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd}$$

اب اگر ہم دفعہ 4-2 کے سوال 13 کو استعمال کریں تو حاصل ہوگا :

$$\frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} \equiv \frac{ad + bc}{bd}$$

جو کہ ہمارا مطلوبہ جواب ہے۔

مثال 1 : کسور کا کمترین مشترک نسب نما معلوم کرو

$$\frac{3x}{x^2 - 4x + 4}, \quad \frac{5x^2}{3(x^2 - 4)}, \quad \frac{2}{2x^2 - x - 6}$$

حل : ہر نسب نما کے اجزا ضربی نکالنے سے حاصل ہوگا

$$x^2 - 4x + 4 \equiv (x - 2)^2,$$
$$3(x^2 - 4) \equiv 3(x + 2)(x - 2),$$
$$2x^2 - x - 6 \equiv (2x + 3)(x - 2).$$

کمترین مشترک نسب نما ہوگا $3(x + 2)(x - 2)^2(2x + 3)$

مساوی القیمت کسور کمترین مشترک نسب نما نکالنے کے بعد بنائی جاسکتی ہیں دی ہوئی کسر کے کمترین مشترک نسب نما کو کسر کے نسب نما سے تقسیم دیجیے اور پھر خارج قسمت سے دیے ہوئے کسر کے شمار کنندہ اور نسب نما کو ضرب دیجیے۔ مساوی القیمت کسور کو اب جوڑ دیجیے جیسا کہ مندرجہ بالا تمثیل میں کیا گیا ہے۔

مثال 2 : ذیل کی کسور ایسی برابر کسور میں تبدیل کرو جن کے نسب نما کمترین مشترک نسب نما ہوں اور اُن کا جوڑ معلوم کرو

$$\frac{4}{x + 2}, \quad \frac{x + 3}{x^2 - 4}, \quad \frac{2x + 1}{x - 2}$$

حل : کمترین مشترک نسب نما ہے $(x + 2)(x - 2)$۔ اس لیے

$$\frac{4}{x + 2} \equiv \frac{4(x - 2)}{(x + 2)(x - 2)}, \quad \frac{x + 3}{x^2 - 4} \equiv \frac{x + 3}{(x + 2)(x - 2)}$$

$$\frac{2x + 1}{x - 2} \equiv \frac{(2x + 1)(x + 2)}{(x + 2)(x - 2)},$$

اور

$$\frac{4}{x + 2} + \frac{x + 3}{x^2 - 4} + \frac{2x + 1}{x - 2}$$

$$\equiv \frac{4(x - 2)}{(x + 2)(x - 2)} + \frac{x + 3}{(x + 2)(x - 2)} + \frac{(2x + 1)(x + 2)}{(x + 2)(x - 2)}$$

$$\equiv \frac{(4x - 8) + (x + 3) + (2x^2 + 5x + 2)}{x^2 - 4}$$

$$\equiv \frac{2x^2 + 10x - 3}{x^2 - 4}.$$

سوالات

مندرجہ ذیل کو ایک ہی کسر میں لاؤ اور مختصر کرو :

1. $\frac{3}{8} + \frac{5}{4} - \frac{3}{10}$
2. $5 - \frac{4}{9} - \frac{7}{15}$
3. $\frac{3x}{4y} - \frac{4y}{3x}$
4. $\frac{a^2}{b} - \frac{b^2}{a}$
5. $\frac{2x+3}{6} - \frac{4x-7}{9}$
6. $\frac{3x-1}{5} + \frac{4-5x}{6}$
7. $x + y + \frac{x^2}{x-y}$
8. $\frac{x+1}{x+2} - \frac{x+3}{x}$
9. $\frac{3x-2y}{5x-3} + \frac{2x-y}{3-5x}$
10. $\frac{2}{12x^3-3} + \frac{3}{2x-4x^2}$
11. $\frac{5}{x} - \frac{4}{y} + \frac{3}{z}$
12. $\frac{4}{x^2-4x-5} + \frac{2}{x^2-1}$
13. $\frac{2x-1}{4-x} + \frac{x+2}{3x-12}$
14. $\frac{x+5}{x^2+7x+10} - \frac{x-1}{x^2+5x+6}$
15. $\frac{x-1}{2x^3-13x+15} + \frac{x+3}{2x^2-15x+18}$
16. $\frac{2x+3}{3x^2+x-2} - \frac{3x-4}{2x^2-3x-5}$
17. $\frac{3}{a-3} + \frac{a^2+2}{a^3-27}$
18. $\frac{2xy}{x^3+y^3} - \frac{x}{x^2-xy+y^2}$
19. $\frac{2}{x^2+3x+2} - \frac{3}{x^2+5x+6} - \frac{4}{x^2+4x+3}$
20. $x + 6 + \frac{5x+1}{12x^2+5x-2} - \frac{x}{3x+2}$
21. $2y - 3 + \frac{y-2}{4y^2-12y+9} + \frac{y+2}{2y^2-y-3}$
22. $\frac{1}{(x-y)(y-z)} + \frac{1}{(y-z)(z-x)} + \frac{1}{(z-x)(x-y)}$
23. $\frac{x}{(x-y)(y-z)} + \frac{y}{(y-z)(z-x)} + \frac{z}{(z-x)(x-y)}$
24. $\frac{2x-1}{2x^2-x-6} + \frac{x+3}{6x^2+x-12} - \frac{2x-3}{3x^2-10x+8}$

ہم اُس صورت کو اس سے مستثنیٰ سمجھتے ہیں جہاں b منفی اور q جفت ہو جیسا کہ ہم نے اپنی صدر قیمت کی تعریف میں کہا تھا۔

3-8 کسور کا ضرب اور تقسیم: حساب کی طرح الجبرا میں بھی دو یا دو سے زیادہ کسور کا حاصل ضرب ایک کسر کے برابر ہوتا ہے جس کا شمار کنندہ سب کسور کے شمار کنندہ کا حاصل ضرب اور اُس کا نسب نما تمام کسور کے نسب نما کا حاصل ضرب ہوتا ہے۔ ایسے حاصل ضرب حاصل کرنے کے لیے شمار کنندہ اور نسب نما کے مشترک جزو کو تقسیم کرنے کا طریقہ استعمال کیا جا سکتا ہے۔ اس سے جو نتیجہ حاصل ہو اُسے مختصر ترین شکل میں لے آنا چاہیے۔ نوٹ کرو کہ تمثیل 1 میں یہ طریقہ مسئلہ 2-7 کا بالواسطہ استعمال ہے اور اس کے بعد مسئلہ 2-8 اس پر لگایا گیا ہے۔

تمثیل 1 :
$$\frac{x-4}{2x+8}\cdot\frac{4x+8}{x^2-16} \equiv \frac{(x-4)\cdot 2^2\cdot(x+2)}{2(x+4)(x+4)(x-4)}$$
$$\equiv \frac{2(x+2)}{(x+4)^2}.$$

اب ہمیں ایک ایسے مسئلہ کی ضرورت ہے جو دو کسور کی تقسیم کے لیے ایک جبریہ جملہ ثابت کرے۔

مسئلہ 3-6 : $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} \equiv \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} \equiv \frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$ (a، b، c صفر کے برابر نہیں ہیں)

ثبوت: ہر قدم کے لیے وجہ بتاؤ

$$\frac{a/b}{c/d} \equiv \frac{(\frac{a}{b})\cdot(\frac{d}{c})}{(\frac{c}{d})\cdot(\frac{d}{c})} \equiv \frac{(\frac{a}{b})\cdot(\frac{c}{d})}{(cd)/(cd)} \equiv \frac{(\frac{a}{b})\cdot(\frac{d}{c})}{1} \equiv \frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$$

اس مسئلہ کے نتیجے کے طور پر ہم ایک اصول بیان کر سکتے ہیں۔ دو کسور کا ضرب ایک ایسی کسر ہے جو مقسوم کو خارج قسمت کے معکوس سے ضرب دینے سے حاصل ہوتی ہے۔

تمثیل 2 :
$$\frac{3x-15}{x+3} \div \frac{12x+18}{4x+12} \equiv \frac{3x-15}{x+3}\cdot\frac{4x+12}{12x+18}$$
$$\equiv \frac{3(x-5)}{x+3}\cdot\frac{4(x+3)}{6(2x+3)}$$
$$\equiv \frac{2(x-5)}{2x+3}.$$

سوالات

مندرجہ ذیل آسان کسور پر علامات سے ظاہر کیے ہوئے عمل کرو اور اُن کو مختصر کرو:

1. $\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{7}$ 2. $\frac{7}{9}+\frac{11}{11}$ 3. $\frac{8}{9}\cdot\frac{9}{15}$ 4. $\frac{5}{7}\div\frac{10}{11}$

5. $\frac{7}{22} \cdot \frac{33}{35}$ 6. $\frac{9}{7} \div \frac{8}{5}$ 7. $\frac{3x^3}{4y^2} \cdot \frac{5y}{x^2}$ 8. $\frac{7a}{12b^3} \cdot \frac{20b^5}{35a^3}$

9. $\frac{40x^3y^2}{24xy^4} \div \frac{27xy}{8x^2y^3}$ 10. $\frac{xy^3}{yz} \div x^2z$

11. $\frac{x^2 - y^2}{x^3 - y^3} \div \frac{x + y}{x}$ 12. $\frac{x^2 - 2x + y^2}{x^3 - y^3} \cdot \frac{x^2 + xy + y^2}{x - y}$

13. $\frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 7x + 12} \cdot \frac{x^3 - 4x^2 + 9x - 36}{x^4 - 81}$

14. $\frac{y^2 - 2y - 15}{y^2 - 9} \div \frac{12 - 4y}{y^2 - 6y + 9}$

15. $\frac{x^4 - y^4}{(x - y)^2} \cdot \frac{y^2}{x^2 + y^2} \cdot \frac{x - y}{xy + y^2}$

16. $(a^2 - b^2) \div \left[\frac{a^2 + ab}{b^2 + ab} \div \frac{a^2 - ab}{b^2 - ab}\right]$

17. $\frac{9x^2 + 6x - 8}{6x^2 + 5x - 4} \cdot \frac{2x^2 - 7x - 4}{2x^2 - 5x - 12} \cdot \frac{4x^2 + 4x - 3}{6x^2 - x - 2}$

18. $\left[\frac{y^3 + 4y^2 - 5y}{y^2 - 2y + 1} \div \frac{y^2 + y - 2}{y^4 + 8y}\right] \cdot \frac{y - 4}{y^2 - 2y + 4}$

19. $\left[\frac{2x}{x - 1} + \frac{x^2}{x^2 - 1}\right] \div \frac{x^3}{1 - x}$

20. $\left[\frac{3x}{x - 3} - \frac{3x + 2}{x^2 - 6x + 9}\right] \cdot \left[\frac{x + 2}{x + 3} - \frac{x}{x^2 + 6x + 9}\right]$

زیرِ غور کسور میں سے بہت سے کسور مفرد کسور ہیں۔ کوئی کسر جس کے شمار کنندہ یا نسب نما میں یا دونوں میں ہی ایک یا ایک سے زیادہ کسر شامل ہو ملتف کسر کہلاتی ہے۔ اس کو مختصر کرنے کے لیے شمار کنندہ اور نسب نما کو ایک ہی کسر میں لاکر تقسیم کرنا ہوتا ہے۔

مثال : $\frac{a - \frac{1}{a}}{a - \frac{1}{a^2}}$ کو مختصر کرو۔

حل :

$$\frac{a - \frac{1}{a}}{a - \frac{1}{a^2}} \equiv \frac{a^2 - 1}{a} \div \frac{a^3 - 1}{a^2}$$

$$\equiv \frac{(a + 1)(a - 1)}{a} \cdot \frac{a^2}{(a - 1)(a^2 + a + 1)}$$

$$\equiv \frac{a(a + 1)}{a^2 + a + 1}.$$

سوالات

مندرجہ ذیل میں سے ہر ایک کو مفرد کسر میں لا کر آسان ترین شکل میں لاؤ :

1. $\dfrac{3+\frac{4}{5}}{\frac{2}{3}-1}$
2. $\dfrac{\frac{a}{b}+\frac{a}{c}}{ab+ac}$
3. $\dfrac{x-\frac{x}{y}}{z-\frac{z}{y}}$
4. $\dfrac{\frac{4x}{5}+\frac{2y}{3}}{\frac{3x}{5}-\frac{3y}{4}}$
5. $\dfrac{\frac{2}{x}+\frac{5}{y}}{\frac{2}{x}-\frac{5}{y}}$
6. $\dfrac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}}$
7. $\dfrac{x^2-\frac{1}{x}}{x+1+\frac{1}{x}}$
8. $\dfrac{\frac{1}{2}-\frac{4}{x^3}}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2x}}$
9. $\dfrac{9x^2-4y^2}{\frac{x-y}{y-2x}-1}$
10. $\dfrac{\frac{x}{y}+\frac{y^2}{x^2}}{\frac{y}{x^2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$

3-9 . صفر اور عددِ صحیح قوت نما :

دفعہ 3-2 میں ہم نے a^n (a صفر کے برابر نہیں) کے معنی پر جہاں n کوئی عدد صحیح ہے بحث کی تھی۔ a^n کی تعریف کرنے کے لیے جہاں n کوئی عدد صحیح ہے۔ مثبت یا منفی یا صفر $(n \in I)$ تو ہم قوت نما پر دیے ہوئے مسئلوں کو استعمال کریں گے۔ [(3-2) سے لے کر (3-7) تک کی مساوات] یاد کرو مساوات (3-7) $a^n/a^n = 1$۔ اگر مساوات (3-5) لگانے کی اجازت ہوتی تو ہمیں حاصل ہوتا $a^{n-n} = a^0 = 1$ ۔ اس کی اجازت نہیں ہے کیوں کہ m کو n کے برابر نہیں ہونا چاہیے لیکن اب ہم یہ تعلق اور مساوات (3-6) مندرجہ ذیل تعریفوں کو صحیح ثابت کرنے کے لیے استعمال کر سکتے ہیں۔

تعریف 3-2 : کسی بھی a کے لیے $a \in R\ (a \neq 0)$

$$a^0 = 1. \qquad (3\text{-}18$$

تعریف 3-3 : کسی a کے لیے $a \in R\ (a \neq 0)$ اور کسی مثبت عدد صحیح n کے لیے

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}. \tag{3-19}$$

اب ہم نتیجے کے طور پر حاصل ہونے مسئلہ لیتے ہیں۔

مسئلہ 3-7 : اب کسی a کے لیے، $a \in R$ اور کسی n اور m کے لیے $n, m \in I$

$$a^n a^m = a^{n+m}, \tag{3-20}$$

$$(ab)^n = a^n b^n, \tag{3-21}$$

$$(a^n)^m = a^{nm}, \tag{3-22}$$

اور

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}. \tag{3-23}$$

ثبوت : ان کے ثبوت گزشتہ تعریفوں کے لازمی نتیجہ ہیں اور مشق کے لیے چھوڑ دیے گئے ہیں۔

تماثیل :

$$5^0 = 1, \quad 2x^0 = 2 \cdot 1 = 2, \quad (2x^2y)^0 = 1,$$

$$x^{-2} = \frac{1}{x^2}, \quad (x^3)^4 = x^{12}, \quad \frac{x^3}{x^5} = x^{-2} = \frac{1}{x^2}.$$

سوالات

منفی اور صفر قوت نماؤں کو ہٹا کر مندرجہ ذیل عبارت کو مختصر کرو :

1. $8x^0$
2. $(8x)^0$
3. $3x^{-2}y^4$
4. $5y^{-2}x^3z^0$
5. $\dfrac{2x^3y^{-2}}{3x^{-2}y^3}$
6. $\dfrac{4x^{-2}y^4}{6x^{-5}y^{-2}}$
7. $\dfrac{a^{-1}+b^{-1}}{(cd)^{-1}}$
8. $\dfrac{x^{-2}+y^{-2}}{x^{-1}+y^{-1}}$
9. $\dfrac{a^{-1}+b^{-1}}{(a+b)^{-1}}$
10. $(a^{-1}+b^{-1})^{-1}$
11. $(x^ny^2)^m$
12. $(-1)^n(-1)^m(-1)^1$
13. ثابت کرو مسئلہ 3-7 (a) مساوات (3-20) (b) مساوات (3-21)
14. ثابت کرو مسئلہ 3-7 (a) مساوات (3-22) (b) مساوات (3-23)

3-10 . ناطق قوّت نما : گزشتہ دفعہ میں ہم نے اپنی تعریفوں کو ایسے قوت نماؤں کے لیے جن میں وہ صفر یا منفی عدد صحیح ہوں، پر وسعت دی تھی۔ اب ہم ان کو ناطق قوت نماؤں پر بھی وسعت دیتے ہیں۔

تعریف 3-4 : کوئی بھی عدد a جس کی n ویں قوت (n کوئی بھی مثبت عدد صحیح ہے) b کے برابر ہوگا اور جو $a^n = b$ مساوات کو مطمئن کر سکے b کا n واں جذر کہلاتا ہے۔

مثلاً ہم یاد کریں کہ 4 کا جذر یا تو 2 ہے یا -2 کیوں کہ $2^2 = 4$ اور $(-2)^2 = 4$ اسی طرح کیوں کہ $(-2)^3 = -8$ تو -2 جذر الکعب ہے -8 کا۔ عموماً ہر عدد کے سوائے صفر کے، n ویں جذر کی n واضح قیمتیں ہوں گی حالانکہ ان میں سے زیادہ تر یا سب کے سب اعدادِ فرضی ہو سکتے ہیں۔ بہت دفعہ n ویں صدر جذر کی تعریف کر دینا فائدہ مند رہے گا۔ ایک مثبت عدد کا n واں صدر جذر مثبت جذر ہوگا۔ ایک منفی عدد کا n واں صدر جذر منفی جذر ہوگا اگر n طاق ہے۔ اگر n جفت ہو اور عدد منفی ہو تو اس کے کسی n ویں صدر جذر کی تعریف نہیں کی جا سکتی کیوں کہ اس کی کوئی حقیقی قیمت وجود میں نہیں ہے (مثلاً مساوات $x^2 = -4$ پر غور کرو)۔ علامت $\sqrt[n]{b}$ کا مطلب n واں صدر جذر۔ n قوت نما کہلاتا ہے اور b جذر کا مجذو

تمثیل 1 : $\sqrt{9} = 3$ ، $\sqrt[3]{-8} = -2$ اور $\sqrt[4]{81} = 3$

3 ، -2 اور 3 بالترتیب جذر المربع، جذر الکعب اور چوتھا جذر ہیں 9 ، -8 اور 81 کے

اب ہم نے قوت نما سے متعلق مسئلوں کو اُس صورت تک وسعت دے دی ہے جہاں کہ $n \in I'$ ۔ اب کسی ایسی ناطق قیمت p/q پر غور کرو جس میں p اور q کوئی بھی دو نسبتاً متباین مثبت صحیح عدد ہیں اگر $n = 1/q$ جہاں q کوئی مثبت صحیح عدد ہے اور اگر ہم اپنا جواب مساوات (3-2) کے مطابق حاصل کرنا چاہتے ہیں یعنی ہم اس کے خواہش مند ہیں کہ

$$\underbrace{b^{1/q} \cdot b^{1/q} \cdot b^{1/q} \cdots b^{1/q}}_{\text{جزو } q \text{ کے } b^{1/q}} \equiv b^{q/q} \equiv b, \qquad (3\text{-}24)$$

---

* باب 16 دیکھیے۔

$b^{1/q}$ کی تعریف ہونی چاہیے کہ b کا q واں جذر۔ درحقیقت علامت $b^{1/q}$ کی تعریف ہوگی کہ یہ q واں صدر جذر ہے۔ اسی طرح اگر مساوات (3-3) کو مطمئن کرتا ہے تو ہمیں تعریف کرنا چاہیے کہ

$$(b^{1/q})^p \equiv b^{p/q}. \tag{3-25}$$

یہ متماثلہ بتاتا ہے کہ $b^{1/q}$ ، $b^{p/q}$ کا p واں جذر ہے اور یہ کہ $b^{p/q}$ ہے p والی قوت b کے q ویں جذر کی مساوات (3-25) کے استعمال سے ہم اب یہ بھی ثابت کر سکتے ہیں کہ

$$\underbrace{b^{p/q} \cdot b^{p/q} \cdot b^{p/q} \cdots b^{p/q}}_{q \text{ اجزا کے } b^{p/q}} \equiv b^p, \tag{3-26}$$

اور اس طرح $b^{p/q}$ ہے b^p کا q واں صدر جذر۔ اس لیے مساوات (3-25) اور (3-26) گزشتہ علامتی اظہار کی مدد سے لکھیں گے

$$\boxed{b^{p/q} \equiv (b^p)^{1/q} \equiv \sqrt[q]{b^p},} \tag{3-27}*$$

اور یہ بھی

$$\boxed{b^{p/q} \equiv (b^{1/q})^p \equiv (\sqrt[q]{b})^p.} \tag{3-28}$$

اب ہم یہ ثابت کر سکتے ہیں کہ قوت نما پر پانچوں مسئلے مساوات (3-19) سے (3-23) تک تمام ناطق قوت نماؤں کے لیے (F کے جزو) اور تمام صحیح اعداد کے لیے بھی (I کے جزو) سچ ہیں۔

تمثیل 2:
$$8^{2/3} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4,$$
$$= (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4. \quad \text{یا}$$

تمثیل 3:
$$81^{-3/4} = \frac{1}{(\sqrt[4]{81})^3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}.$$

تمثیل 4:
$$x^{1/4} \cdot x^{2/3} \equiv x^{1/4+2/3} \equiv x^{11/12} \equiv \sqrt[12]{x^{11}}.$$

تمثیل 5:
$$x^{1/4} \div x^{2/3} \equiv x^{1/4-2/3} \equiv x^{-5/12} \equiv \frac{1}{\sqrt[12]{x^5}}.$$

تمثیل 6:
$$(x^{-4})^{-3/4} \equiv x^3.$$

---

* ہم اس صورت کو اس سے مستثنیٰ سمجھتے ہیں جہاں b منفی اور q جفت ہو جیسا کہ ہم نے اپنی صدر قیمت کی تعریف میں کہا تھا۔

سوالات

مندرجہ ذیل کی عددی (رقمی) قیمت نکالو:

1. $25^{1/2}$
2. $81^{3/4}$
3. $(\frac{16}{81})^{1/2}$
4. $(\frac{8}{125})^{-1/3}$
5. $(\frac{64}{27})^{2/3}$
6. $32^{-4/5}$
7. $(2^{10})^{-3/5}$
8. $(2^{-6})^{2/3}$
9. $3^{7/2} \cdot 3^{1/2}$

منفی قوت نما کو ہٹاؤ، مختصر کرو اور جواب علامت جذر کی شکل میں لکھو۔

10. $x^{1/4} \cdot x^{1/5}$
11. $x^{1/4} \div x^{1/5}$
12. $(x^{1/4})^{1/5}$
13. $x^{1/4} \cdot x^{-1/5}$
14. $(x^{1/4})^{-1/5}$
15. $(x^{-1/4})^{-1/5}$

منفی اور صفر قوت نماؤں کو ہٹا کر اختصار کرو۔

16. $(9x^{-4}y^2)^{1/2}$
17. $(2x^{1/6}y^{5/6})^{-6}$
18. $(2x^{-3}y^4)^3$
19. $\left(\frac{125x^4y^3}{27x^{-2}y^0}\right)^{1/3}$
20. $\left(\frac{5^0x^4y^3z}{16x^{-6}yz^5}\right)^{-1/2}$
21. $(a^{1/2} + b^{1/2})^2$
22. $(a^{1/2} + b^{1/2})(a^{1/2} - b^{1/2})$
23. $(x^{1/3} + y^{1/3})(x^{2/3} - x^{1/3}y^{1/3} + y^{2/3})$
24. $(x + y)^{-2}(x^{-2} - y^{-2})$
25. $(x + y^{-1})^2$

3-11 . علاماتِ جذر :

بہت سی صورتوں میں کسی قدر کو علامت جذر میں ظاہر کرنا زیادہ مفید ہے بہ نسبت ناطق قوت نما کی شکل کے۔ قوت نماؤں کی سابقہ تعریف اور مسئلوں کا لازمی نتیجہ کلیات جذر ہیں۔ اگر m اور n مثبت عدد صحیح ہوں اور a اور b مثبت ہوں جہاں m یا n جفت ہیں تو :

$$(\sqrt[n]{a})^n = a, \tag{3-29}$$

$$\sqrt[n]{ab} = (ab)^{1/n} = a^{1/n} \cdot b^{1/n} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}, \tag{3-30}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{1/n} = \frac{a^{1/n}}{b^{1/n}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \tag{3-31}$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = (a^{1/n})^{1/m} = a^{1/nm} = \sqrt[mn]{a}. \tag{3-32}$$

تمثیل 1 :

$$\sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} = 5\sqrt{2}.$$

تمثیل 2 :

$$\sqrt[3]{\frac{4}{27}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{3}.$$

تمثیل 3 : $\sqrt[3]{27} = \sqrt{\sqrt[3]{27}} = \sqrt{3}.$

ان کلیات کی امداد سے علامت جذر کا مکمل اختصار نتیجے کے طور پر دے گا :

(1) ایسے کوئی جزو نہ ہوں گے جو کہ کسی ایسے جذر کے تحت جس کا قوت نما n ہو n ویں کامل قوت ہو۔

(2) علامت جذر کے تحت کوئی کسر نہ ہو۔ (3) علامت جذر کا قوت نما چھوٹے سے چھوٹا ہو۔

کوئی بھی جذر جو مندرجہ بالا شرائط کو مطمئن کردے اپنی اختصاریہ شکل میں ہوگا۔ مندرجہ بالا تین تمثیلات کے ساتھ جو کہ اپنی آسان ترین (اختصاریہ) شکل میں ہیں، ذیل کی مزید مثالیں دیتے ہیں۔

مثال 1 : $\sqrt[3]{81x^5y^7}$ کو مختصر کرو۔

حل : ذیل کی رقم میں سے اُن اجزا کو علاحدہ کرنا لازمی ہوگا جو کامل مکعب ہیں :

$$\sqrt[3]{81x^5y^7} = \sqrt[3]{27x^3y^6 \cdot 3x^2y} = \sqrt[3]{27x^3y^6} \cdot \sqrt[3]{3x^2y} = 3xy^2\sqrt[3]{3x^2y}.$$

مثال 2 : $\sqrt{\frac{3}{2}}$ کو مختصر کرو۔

حل : تخمینی وجہ کی بنا پر ایسی کسر کو خارج کرنا اہم ہے جو بہ حیثیت مجذور کے ہو۔ تب جذر کو ایک ہی جذری قیمت نکال کر اور سادہ تقسیم سے قریب قریب صحیح نکال لینا چاہیے بہ نسبت اس کے کہ دو جذری قیمتیں نکالی جائیں اور زیادہ پیچیدہ تقسیم کیا جائے۔ نسب نما میں ایک کامل جذر داخل کرکے ہم اس کو علامت جذر کے باہر نکال سکتے ہیں :

$$\sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 2}{2 \cdot 2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

مثال 3 : $\sqrt[4]{64x^2y^4/z^2}$ کو مختصر کرو۔

حل : اس قسم کے سوال عام طور سے زیادہ آسانی سے سمجھ میں آسکتے ہیں اگر ناطق قوت نما داخل کردیے جائیں، ہمیں علامت جذر کے تحت نسب نما بھی علاحدہ کرنا چاہیے :

$$\sqrt[4]{\frac{64x^2y^4}{z^2}} = \left(\frac{2^6x^2y^4}{z^2}\right)^{1/4} = \frac{2^{3/2}x^{1/2}y}{z^{1/2}} \cdot \frac{z^{1/2}}{z^{1/2}} = \frac{2y}{z}\sqrt{2xz}.$$

سوالات

مندرجہ ذیل میں سے ہر ایک کو مختصر کرو :

1. $\sqrt{8}$
2. $\sqrt{98}$
3. $\sqrt{\frac{75}{12}}$
4. $\sqrt[3]{40}$
5. $\sqrt[3]{-625}$
6. $\sqrt[5]{32}$

7. $\sqrt{27x^3y^5}$ 8. $\sqrt{192a^3b^7}$ 9. $\sqrt[3]{81x^4x^6y^5}$

10. $\sqrt{\frac{3}{5}}$ 11. $\sqrt{\frac{125}{63}}$ 12. $\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{4}}$

13. $\sqrt{a^2b^2+b^2c^2}$ 14. $\sqrt{a^{-2}+b^{-2}}$ 15. $\sqrt{\frac{3x}{y^3}}$

16. $\sqrt[3]{\frac{x^4y}{z^2}}$ 17. $\sqrt[4]{\frac{x^7y^6}{243}}$ 18. $\sqrt{x-2+\frac{1}{x}}$

19. $\sqrt[3]{25}$ 20. $\sqrt[3]{49x^4}$ 21. $\sqrt[3]{\frac{5}{3x^2}}$

22. $\sqrt[3]{\frac{9}{16}}$ 23. $\sqrt[4]{\frac{169x^6x^2}{y^4}}$ 24. $\sqrt[4]{1-\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}}$

3-12 . علامتِ جذر کے جوڑ اور باقی :

جذر کے جوڑ یا باقی میں یکساں قسم کے جذر (یعنی جو کہ نتیجے کے طور پر ایک ہی قوت اور مجذور رکھتے ہیں) یکجا کر کے ایک ہی رقم بنائے جا سکتے ہیں۔ مثال پر غور کرو۔

مثال : یکساں ارقام کو متحد کرتے ہوئے آسان کرو :

$$4\sqrt{12}+5\sqrt{8}-\sqrt{50}-7\sqrt{48}.$$

حل :

$$\begin{aligned}4\sqrt{12}+5\sqrt{8}-\sqrt{50}-7\sqrt{48} &= 4\sqrt{4\cdot3}+5\sqrt{4\cdot2}-\sqrt{25\cdot2}-7\sqrt{16\cdot3}\\ &= 8\sqrt{3}-28\sqrt{3}+10\sqrt{2}-5\sqrt{2}\\ &= 5\sqrt{2}-20\sqrt{3}.\end{aligned}$$

سوالات

یکساں ارقام کو یکجا کر کے مختصر کرو :

1. $4\sqrt{3}-5\sqrt{12}+2\sqrt{75}$ 2. $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{54}$
3. $5\sqrt{2}-\sqrt[3]{64}+2\sqrt{32}$ 4. $\sqrt{x^3}+\sqrt{25x^3}+\sqrt{9x}$
5. $\sqrt{4(x+y)}-2\sqrt{9(x+y)}+3\sqrt{x+y}$
6. $3\sqrt{18}-3\sqrt{32}+3\sqrt{12}-3\sqrt{3}$ 7. $\sqrt{a^3bc^8}+\sqrt{ab^7c^3}+\sqrt{a^9b^5c}$
8. $\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}-\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}+\sqrt{\frac{a^2}{a^2-b^2}}$ 9. $8\sqrt{\frac{1}{8}}+\frac{3}{8}\sqrt{108}-\sqrt[3]{9}$
10. $\sqrt{\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)\frac{1}{xy}}-\sqrt{\frac{x+y}{x-y}}$ 11. $\frac{7\pm\sqrt{49-4\cdot10}}{2}$
12. $\frac{4\pm\sqrt{16-4\cdot2}}{2}$

3-1 . **جذر کا ضرب اور تقسیم :** دو یا دو سے زیادہ جذر کا ضرب مساوات (3—30) میں ثابت کیے گئے اصول سے کیا جا سکتا ہے۔ اگر جذر کا قوت نما ایک ہی ہو تو جواب فوراً ہی حاصل ہو جائے گا۔ اگر جذر مختلف قوت نماؤں کے ہوں تو ضرب کرنے سے پہلے اُن کو یکساں قوت نما والے جذر میں تبدیل کرنا ہوگا۔ ایسا ہمیشہ ممکن ہے اور یہ ایسی ہم قدر ارقام کی مدد سے کیا جا سکتا ہے جن کے قوت نما ناطق ہوں۔

مثال 1 : $\sqrt{15ax^3}$ اور $\sqrt{45a^2xy^3}$ کا حاصل ضرب نکالو اور مختصر کرو۔

حل : کیوں کہ دونوں جذر کا قوت نما 2 ہے ہم فوراً ہی مساوات (3-30) استعمال کر سکتے ہیں

$$\sqrt{15ax^3}\cdot\sqrt{45a^2xy^3} \equiv \sqrt{15^2\cdot 3a^3x^4y^3} \equiv 15ax^2y\sqrt{3ay}.$$

مثال 2 : $\sqrt{6x^3}$ کو $\sqrt[3]{4x^4y^2}$ سے ضرب دو اور مختصر کرو۔

حل : جذر کو ناطق قوت نماؤں میں بدل کر ہمیں حاصل ہوگا

$$\begin{aligned}\sqrt{6x^3}\cdot\sqrt[3]{4x^4y^2} &\equiv (3\cdot 2x^3)^{1/2}\cdot(2^2x^4y^2)^{1/3}\\ &\equiv (3\cdot 2x^3)^{3/6}\cdot(2^2x^4y^2)^{2/6}\\ &\equiv (3^3\cdot 2^3\cdot x^0\cdot 2^4x^8y^4)^{1/6}\\ &\equiv \sqrt[6]{3^3\cdot 2\cdot 2^6x^{12}\cdot x^5y^4} \equiv 2x^2\sqrt[6]{54x^5y^4}.\end{aligned}$$

اسی طرح دو جذر کا تقسیم مساوات (3-31) کی مدد سے کیا جائے گا۔ اگر جذر مختلف قوت نماؤں کے ہوں تو اُن کو یکساں قوت نماؤں میں تبدیل کیا جانا چاہیے۔

مثال 3 : $6\sqrt[3]{5}$ کو $2\sqrt{3}$ سے تقسیم کرو اور آسان کرو۔

حل : کیوں کہ $\sqrt{3} = \sqrt[6]{27}$ اور $\sqrt[3]{5} = \sqrt[6]{25}$ تو ہمیں حاصل ہوگا

$$\frac{6\sqrt[3]{5}}{2\sqrt{3}} = 3\sqrt[6]{\frac{25}{27}}.$$

یہ یاد رکھتے ہوئے کہ جذر اپنی آسان ترین شکل میں اُس وقت ہوگا جبکہ اُس کا نسب نما علامت جذر سے آزاد ہو اور اسی لیے شمار کنندہ اور نسب نما کو $\sqrt[6]{27}$ سے ضرب کر دیا۔ اس طرح

$$\frac{6\sqrt[3]{5}}{2\sqrt{3}} \equiv 3\sqrt[6]{\frac{25\cdot 27}{27\cdot 27}} \equiv 3\sqrt[6]{\frac{25\cdot 27}{3^6}} \equiv \frac{3}{3}\sqrt[6]{25\cdot 27} = \sqrt[6]{675}.$$

دفعہ 11-3 کی مثال 2 اور مثال 3 میں علامت جذر کو تحلیل کرنے کا عمل جو تمثیل کے طور پر دیا گیا ہے نسب نما کو ناطق بنانا کہلاتا ہے۔ نسب نما کو تمام علامات جذر سے آزاد کرنے کا کام زیادہ پیچیدہ ہو سکتا ہے۔

مثال 4 : $\frac{2+\sqrt{3}}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})}$ کے نسب نما کو ناطق بناؤ۔

حل : کیوں کہ ہم نسب نما کی دونوں ارقام کی علامت جذر ساقط کرنا چاہتے ہیں تو ہم ایسی رقم تلاش کریں (ناطق بنانے والا جزو) جو $\sqrt{5}-\sqrt{3}$ کو ضرب دینے سے ایسا جواب دے جس میں علامت جذر ہی نہ ہو کیوں کہ $(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3}) = 5-3$

ہم دونوں میں شمار کنندہ اور نسب نما کو $\sqrt{5}+\sqrt{3}$ سے ضرب دے دیتے ہیں

$$\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{5}+\sqrt{15}+2\sqrt{3}+3}{5-3}$$

$$= \frac{2\sqrt{5}+\sqrt{15}+2\sqrt{3}+3}{2}.$$

سوالات

ذیل کے ضرب کر کے جواب آسان ترین شکل میں لکھو :

1. $\sqrt{5}\cdot\sqrt{13}$
2. $\sqrt{14}\cdot\sqrt{21}$
3. $\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{26}$
4. $\sqrt[3]{3x^2}\cdot\sqrt{2x}$
5. $\sqrt{x^3-y^2}\cdot\sqrt{x-y}$
6. $\sqrt{3x^2y^3}\cdot\sqrt{12x^5y}$
7. $\sqrt{x^3+y^3}\cdot\sqrt{x+y}$
8. $\sqrt[3]{9x}\cdot\sqrt[6]{27x^4}$
9. $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[6]{4}$
10. $\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[6]{a}$
11. $\sqrt{2}(\sqrt{6}+\sqrt{14})$
12. $(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})$
13. $(\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{3}-\sqrt{5})$
14. $(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})^2$
15. $(\sqrt{5}+2\sqrt{3})(\sqrt{5}-3\sqrt{3})$
16. $\sqrt{3+2\sqrt{2}}\cdot\sqrt{3-2\sqrt{2}}$
17. $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2$
18. $\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2$

مندرجہ ذیل تقسیم کر کے جواب آسان ترین شکل میں لکھو :

19. $4\sqrt{28}\div 3\sqrt{7}$
20. $\sqrt[3]{\frac{4}{5}}\div\sqrt[3]{\frac{108}{35}}$
21. $\sqrt[3]{12}\div\sqrt{3}\sqrt[3]{2}$
22. $(2\sqrt{6}+3\sqrt{14})\div\sqrt{2}$

23. $\sqrt[3]{24a^3b} + \sqrt[3]{8ab^3}$

24. $\sqrt{xy^2} + \sqrt[3]{x^2y}$

ذیل کے ہر سوال کے نسب نما ناطق بناؤ:

25. $\frac{2\sqrt{3}}{4\sqrt{5}}$

26. $\frac{2\sqrt[3]{3}}{4\sqrt[3]{5}}$

27. $\frac{4}{\sqrt[3]{16}}$

28. $\frac{3}{2+\sqrt{3}}$

29. $\frac{5}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$

30. $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

31. $\frac{x}{x+\sqrt{y}}$

32. $\frac{y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

33. $\frac{2\sqrt{7}+\sqrt{3}}{3\sqrt{7}-5\sqrt{3}}$

34. $\frac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}$

[اشارہ: $x^4 + y^3 \equiv (x+y)(x^2 - xy + y^2)$.]

35. $\frac{2}{2-\sqrt[3]{3}}$

36. $\frac{1}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}$

37. $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

[اشارہ: شمار کنندہ اور نسب نما دونوں کو ہی $(\sqrt{2}+\sqrt{3}) - \sqrt{5}$ سے ضرب دو۔]

باب 4

غیر مساوات مطلق قیمتیں اور نظامِ مختصات

الجبرا یا علمِ مشتقات کے کسی بھی باقاعدہ مطالعے میں مزید کچھ نظریات و تصورات ہیں جو اہم ہیں۔ باب 2 میں ہم نے حقیقی اعداد کے کچھ میدانی موضوعات پر بحث کی تھی جن سے ہم نے سٹ R کی بہت سی معمولی (مجازی) خصوصیات ماخوذ کی تھیں۔ بدقسمتی سے یہ میدانی موضوعات ہم کو حقیقی اعداد کے موازنہ کے لائق نہیں بتاتے۔ منجملہ ان کے ہمارے پاس یہ چار ترتیبی (order) موضوعات معہ تکمیلی (اختتامی) موضوعہ (دفعہ 4-3) جو اس باب میں دیے جائیں گے ہونے چاہئیں۔ ہم کچھ ہندسی تشریحات پر غور کریں گے اور ساتھ ہی مددگار ہندسی نظریات پر مختصر بحث کریں گے۔

4-1 حقیقی اعداد کے لیے ترتیبی (آرڈر) موضوعات :

اگر کوئی فیلڈ (میدان) جیسا کہ حقیقی اعداد ذیل کے چار موضوعات کو مطمئن کر دے تو وہ میدان مرتّب کہلائے گا۔ حقیقی اعداد غیر معیّن عنصر سمجھے جائیں گے ان عناصر کے لیے یہ موضوعات تعلق "$<$" کی تعریف کرتے ہیں اور اس کو پڑھا جاتا ہے "بہ نسبت بڑا ہے" یاد کرو کہ $a, b, c \ldots$ کوئی سے بھی حقیقی اعداد کی نمائندگی کرتے ہیں۔

موضوعہ O1 : موضوعہ تقسیم ثلاثی : اگر $a \in R$ اور $b \in R$ تو ذیل میں سے صرف ایک اور ایک ہی بیان صحیح ہے:

$$a > b, \quad a = b, \quad b > a.$$

موضوعہ O2 : متعدّی موضوعہ : اگر $a, b, c \in R$ ایسے کہ $a > b$ اور $b > c$ تب $a > c$

موضوعہ O3 : موضوعہ جوڑ: اگر $a, b, c \in R$ ایسے کہ $a > b$ تب $a + c > b + c$۔

موضوعہ O4 : موضوعہ ضربی: اگر $c \in R$ اور a, b ایسے کہ $a > b$ اور $c > 0$ تب $ac > bc$

کیوں کہ جوڑ اور ضرب دونوں ہی ترکیبی عمل ہیں تو موضوعہ O3 کا حاصل پڑھا جائے گا $c + a > c + b$ اور موضوعہ O4 میں $ca > cb$ ۔ موضوعہ O4 میں یہ حقیقت کہ $c > 0$ ایک شرط ہے پر زور دینا چاہیے۔

یہ کہنا کہ ایک عدد دوسرے کی "بہ نسبت کم (چھوٹا) ہے" بجائے ہمیشہ اس نظریے کے اظہار کے کہ "بہ نسبت بڑا ہے" اکثر آسان ہوتا ہے۔ نتیجے کے طور پر ست R پر اس تعلق کی تعریف (بہ نسبت کم ہے) مندرجہ ذیل کریں گے۔

تعریف 4-1 : اگر $b \in R$ اور a تو کہیں گے $a < b$ (پڑھا جائے گا a چھوٹا ہے بہ نسبت b کے) اگر اور صرف اگر $b > a$

اس تعریف کے نتیجے کے طور پر $a > b$ کو اس طرح پڑھا جا سکتا ہے " a بڑا ہے بہ نسبت b کے" یا " b چھوٹا ہے بہ نسبت a کے" ہم اپنے کسی بھی ثبوت میں جس میں یہ تعلقات شامل ہوں گے (غیر مساوات) ہم یہ مان کر چلیں گے کہ کسی بھی رقم کی جگہ برابری کی رقم رکھی جا سکتی ہے۔ مثلاً اگر $a > b$ اور $b = c$ کے تو $a > c$ ۔ مزید ہم یہ واضح کر دیں کہ $\geq$ ہوگا $>$ یا $=$ اور اسی طرح $\leq$ ہوگا $<$ یا $=$

ایک مزید تعریف ٹھیک رہے گی۔ آپ نے باب 2 اور 3 میں دیکھا کہ گو ہم نے $a - b$ وغیرہ پر بحث کی لیکن ہم نے اپنے اسی مدلل عمل میں مثبت اور منفی اعداد کے نظریے کو بیان نہیں کیا۔ اب ہم ایسے اعداد کی تعریف کرتے ہیں۔

تعریف 4-2 : کوئی حقیقی عدد a مثبت ہوگا اگر $a > 0$ اور منفی ہوگا اگر $a < 0$

موضوعہ O1 کا لازمی نتیجہ یہ ہے کہ صفر نہ تو مثبت ہی ہے اور نہ منفی ہی۔ اس تعریف کی بنا پر موضوعہ O4 کو پڑھیں گے " اگر $a > b$ اور c مثبت ہے تو $ac > bc$ "۔

---

* "منفی عدد" اور " ایک عدد کے منفی" کے درمیان فرق کو نوٹ کرو (باب 2 کا موضوعہ 6 دیکھو)۔

اب ہم بہت سے بُنیادی مسائل ثابت کرنے کے لیے تیار ہیں۔

مسئلہ 4-1 : اگر a اور $b \in R$

(i) $a > b$ اگر اور صرف اگر $-a < -b$

(ii) $a < b$ اگر اور صرف اگر $-a > -b$

ثبوت : (i) کو ثابت کرنے کے لیے دوسرے کا ثبوت اسی جیسا ہے۔

اگر $a > b$ تو موضوعہ O3 سے حاصل ہوگا

$$a + [(-a) + (-b)] > b + [(-a) + (-b)].$$

اور تلازمی، تقلیبی اور اکائی کے کلیہ سے یہ ثابت ہوتا ہے کہ $0 + (-b) > 0 + (-a)$

$-b < -a$ کیوں کہ ان میں کا ہر ایک قدم اُلٹا بھی صحیح ہے اس لیے عکس اس کا لازمی نتیجہ ہے۔

ضمنی نتیجہ : اگر $a > 0$ تو $-a < 0$

ثبوت : یاد کرو کہ $-0 = 0$ (دفعہ 2-3 کا سوال 11)

مسئلہ 4-2 : $1 > 0$

ثبوت : موضوعہ O1 سے، $1 < 0$ یا $1 = 0$ ، $1 > 0$

موضوعہ 5 سے ہم جانتے ہیں کہ $1 \neq 0$ ، ہم یہ مان کر چلیں کہ $1 < 0$ تو تردید پر پہنچ جائیں گے اور اسی طرح ہم اپنے نتیجے کو حاصل کر لیں گے۔ اگر یہ مان کر چلیں کہ $1 < 0$ تو مسئلہ 4-1 سے $-1 > 0$ اور موضوعہ O4 سے $(-1)(-1) > 0$ یا $1 > 0$ جو ہمارے مفروضہ کی تردید کر دیتا ہے اس لیے $1 > 0$

ضمنی نتیجہ : $-1 < 0$

اس مسئلہ کے نتیجے کے طور پر ہم کسی بھی طبیعی اعداد کے جوڑے کا ترتیبی تعلق ثابت کر سکتے ہیں (سوال 17 سے 20 تک دیکھو) یا درحقیقت کسی بھی اعداد صحیح کا۔

اس بات کی اہمیت پر زور دینا چاہیے کہ 1، ایک مثبت عدد ہے اور جیسا کہ بحث میں مُراد ہے کہ یہ کسی بھی طریقے سے ادنا نہیں ہے۔

اگر غیر مساوات $3 < 5$ میں ہم دونوں اعداد کو -2 سے ضرب دیں تو نتیجہ ہوگا $-6 < -10$

اور تعلق $<$ سے $>$ میں بدل جائے گا۔ منفی عدد سے ضرب دینے سے ہمیشہ یہی ہوگا اور اس لیے ہم ایسا عام طور سے کہہ سکتے ہیں۔

مسئلہ 4-3 : اگر $a > b$ اور $c < 0$ تو $ac < bc$

ثبوت : کیوں کہ $c < 0$ بذریعہ مسئلہ 4-1، $-c > 0$۔ اب موضوعہ O4 کے لازمی نتیجے کے طور پر $a(-c) > b(-c)$ یا $-ac > -bc$ جو ہو جائے گا $ac < bc$ (مسئلہ 4-1)۔

دو اور مسئلے جس میں ایک میں جوڑ اور دوسرے میں ضرب شامل ہے، کا تذکرہ کرنا ضروری ہے۔

مسئلہ 4-4 : اگر $a > b$ اور $c > d$ تو $a + c > b + d$

ثبوت : کیوں کہ $a > b$ اس لیے موضوعہ O4 سے $a + c > b + c$ کیوں کہ $c > d$ $b + c > b + d$ اگر ہم یہ دونوں بیانات موضوعہ O2 کی مدد سے یکجا کر دیں تو ہمیں حاصل ہوگا

$$a + c > b + d$$

مسئلہ 4-5 : اگر a، b، c اور d مثبت اعداد ہیں، $a > b$ اور $c > d$ تو $ac > bd$

ثبوت : (ہر قدم کے لیے وجہ بتائیے) کیوں کہ $a > b$ ، $ac > bc$ کیونکہ $c > d$، $bc > bd$ اس لیے $ac > bd$

تماثیل : کیونکہ $3 > 2$ اور $4 > 5$ تو ہم مسئلہ 4-4 کی رو سے کہہ سکتے ہیں کہ $9 > 5$ اور مسئلہ 4-5 کی رو سے $20 > 6$

غیر مساواتی تعلق کی کچھ خوبیاں اس باب میں استعمال کی جائیں گی، دوسری معہ اُن کی جو مندرجہ ذیل سوالات میں بیان کی گئی ہیں؛ بعد میں استعمال کی جائیں گی، خصوصی طور پر اُس دفعہ میں جہاں غیر مساوات کے حل پر بحث کی گئی ہے۔ (دفعہ 5-7)

سوالات

1. مناسب حقیقی اعداد کو اخذ کر کے ترتیبی موضوعات میں سے ہر ایک کی تصدیق وجدانی طور پر کرو۔ مثلاً موضوعہ O1 میں اگر $a = 2$ اور $b = -3$، $a > b$ کیونکہ $2 > -3$
2. مناسب حقیقی اعداد کو اخذ کر کے عام مسئلوں میں سے ہر ایک کی وجدانی طور پر تصدیق کرو۔

3. ثابت کرو کہ $a > b$ اگر اور صرف اگر $a - b$ مثبت ہے۔ یہ خصوصیت بعض اوقات $a > b$ کی تعریف کہلاتی ہے۔

سوال 4 سے 6 تک کے تمام بیانات ثابت کرو۔

4. اگر c مثبت ہے اور $a > b$ تو $a + c > b$

5. اگر a اور b مثبت ہیں اور $a > b$ تو $(1/a) < (1/b)$

6. (a) اگر a مثبت ہے اور $a > 1$ تو $a^2 > a$

(b) اگر a مثبت ہے اور $a < 1$ تو $a^2 < a$

(c) اگر m اور n مثبت اعداد صحیح ہیں $m \geq n$ اور $a > 1$ تو $a^m \geq a^n$

7. ثابت کرو کہ تعلق $a > b$ صحیح ہوگا اگر اور صرف اگر $a + c > b + c$

8. ثابت کرو کہ دو مثبت حقیقی اعداد کا جوڑ مثبت ہوگا۔

9. ثابت کرو کہ دو منفی حقیقی اعداد کا جوڑ منفی ہوگا۔

*10. ثابت کرو کہ ضرب ab مثبت ہوگا اگر اور صرف اگر a اور b دونوں ہی مثبت ہوں، دونوں ہی منفی ہوں۔

11. ثابت کرو کہ ضرب ab منفی ہوگا اگر اور صرف اگر a مثبت ہو اور b منفی یا a منفی ہو اور b مثبت۔

*12. ثابت کرو کہ $a^2 \geq 0$ [اشارہ: سوال 10 استعمال کرو]

13. مسئلہ 2-4 کو بہ حیثیت سوال 12 کے ضمنی نتیجے کے ثابت کرو۔

14. ثابت کرو کہ اگر a اور b مثبت ہوں اور $a > b$ تو $a^2 > b^2$

15. ثابت کرو کہ اگر n کوئی ایک مثبت عدد صحیح ہو، a اور b مثبت ہوں اور $a > b$ تو $a^n > b^n$

16. اگر n کوئی ایک مثبت عدد صحیح ہو، a اور b مثبت ہوں اور $a^n > b^n$ تو ثابت کرو کہ $a > b$

[اشارہ: مان لو کہ یہ بیان صحیح نہیں ہے اور موضوعہ 10 استعمال کرو۔]

سوالات 17 سے 20 تک اعداد صحیح کو مرتب کریں گے جو ایک طریقے پر دلالت کرتے ہیں۔

17. ثابت کرو کہ $1 < 2$، یہاں ہم یہ فرض کرلیں کہ 2 علامتی اظہار ہے $1 + 1$ کا۔

[اشارہ: $0 \geq 1$]

18. ثابت کرو کہ $0 < 2$

19. اگر ہم 3 کو علامت کے طور پر یہ اظہار کرنے کے لیے استعمال کریں کہ

$$2 + 1 = (1 + 1) + 1,$$

(a) تو ثابت کرو کہ $2 < 3$ (b) ثابت کرو کہ $1 < 3$

20. (a) ثابت کرو کہ $-2 < -3$ (b) ثابت کرو کہ $-1 < -3$

*21. (a) اگر $a > b$ تو ثابت کرو کہ $a > \frac{a+b}{2} > b$

(b) ثابت کرو کہ $0 < \frac{1}{2} < 1$

(c) ثابت کرو کہ $\frac{1}{2} < \frac{3}{4} < 1$

22. اگر $a > b$ تو ثابت کرو کہ $a > \sqrt{ab} > b$ [اشارہ: سوال 16 استعمال کرو]

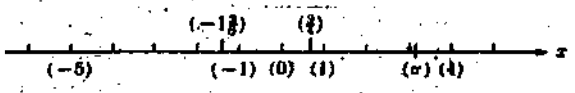
23. یاد رکھو کہ $a - c = a + (-c)$، تفریق کی ایک خصوصیت بیان کرو جو موضوع 3 کے مماثل ہو اور واضح کرو کہ یہ سچ کیوں ہے؟

24. یاد کریں کہ اگر $c \neq 0$ تو، $a \cdot \frac{1}{c} = \frac{a}{c}$

موضوع 4 کے مماثل تقسیم کی ایک خصوصیت بیان کرو اور واضح کرو کہ یہ کیوں صحیح ہے؟

4-2. یک ابعادی نظامِ مختصات:

ریاضی میں اعداد کو خط پر نقطوں کے ساتھ مربوط کرنے کا طریقہ بہت ہی کارآمد ثابت ہوا ہے اور نتیجے کے طور پر ریاضی کی سائنس پر تطبیق میں بہت ترقی ہوئی ہے۔ کوئی بھی مقدار کو ناپنے والا پیمانہ جیسا کہ ایک گز یا پیش پیما (تھرمامیٹر) میں اس قسم کی تطبیق استعمال کرتے ہیں۔



شکل 1-4

تمام کسی بھی طبیعی مقدار کے لیے مانی ہوئی رقمی قیمت کے مماثل پیمانہ پر ایک مقام ہوتا ہے اور پیمانہ پر کے ہر مقام کے مماثل ایک حقیقی عدد ہوتا ہے۔ اس قسم کی مماثلت ایک نظام مختصات قائم کرتی ہے آسان ترین اور مفید ترین ایک ابعادی نظام مختصات حقیقی اعداد کے سٹ R اور ایک خطِ مستقیم پر کے نقاط کے سٹ کے درمیان ایک۔ ایک کی مماثلت استعمال کرتی ہے۔ ہمیں ایسے نظام پر غور کرنا چاہیے۔

ایک لامحدود لمبائی والی حوالہ دی ہوئی خطِ مستقیم پر ہم کوئی ایک نقطہ O اخذ کر لیتے ہیں اور اُسے مبدا کہتے ہیں اور O کی دونوں طرف اختیاری لمبائی کی برابر والی تقسیمی* نشان لگا لیتے ہیں۔ اب ہم صفر کو مبدا کے ساتھ مربوط کرتے ہیں۔ مثبت اعداد صحیح کو ایک طرف کے سلسلہ وار نقاط سے اور منفی اعداد صحیح کو دوسری طرف کے سلسلہ وار نقاط سے (دیکھیے شکل 1-4)۔ ایسے اُفقی خط پر دائیں طرف کے اعداد صحیح مثبت اور بائیں طرف کے منفی ماننے کا عام رواج ہے۔

کوئی بھی نقطہ جو کسی ناطق عدد کے ساتھ مربوط ہو علم ہندسہ کے اُس آسان طریقۂ بناوٹ سے جس میں ایک قطعہ خط کو n برابر حصّوں میں تقسیم کرتے ہیں، سے معلوم کیا جا سکتا ہے۔ اس لیے عدد $\frac{3}{4}$ کی نمائندگی وہ نقطہ کرتا ہے جو 0 سے اُس نقطہ کی طرف جو 1 سے شناخت کیا جاتا ہے، تین چوتھائی فاصلہ پر ہے۔ اس طرح $-1\frac{3}{4}$ ایسے نقطہ کی نمائندگی کرتا ہے جو 0 سے بائیں طرف $1\frac{3}{4}$ اکائی کے فاصلہ پر ہے۔

نقاط جو غیر ناطق اعداد سے مربوط ہوں وہ بھی جیومیٹری کی بناوٹ سے معلوم کیے جا سکتے ہیں۔ مثلاً وہ نقطہ جو $\sqrt{2}$ سے مربوط ہو اُس کا مقام معلوم کیا جا سکتا ہے کیوں کہ $\sqrt{2}$ اُس قائم الزاویہ متساوی الساقین مثلث کا وتر ہے جس کے ہر ضلع کی لمبائی ایک اکائی ہوگی، حالانکہ ہندسی بناوٹ تمام حقیقی اعداد کے لیے ممکن نہیں ہے لیکن ہم یہ مان لیں کہ اِس تطابق کو ہر حقیقی عدد کے لیے وسعت دی جا سکتی ہے۔ یہ تطبیق ہر ایک قطعہ خط کو اُس حقیقی عدد سے جو اس کی لمبائی کی نمائندگی کرتا ہے؛ کے ساتھ مربوط کرنے سے ہوتی ہے۔ اس طرح ہم ہر حقیقی عدد کے ساتھ خط پر ایک نقطہ کو مربوط کرتے۔

---

* کچھ ایسے نظام بھی ہیں جس میں تقسیم در تقسیم برابر کے نہیں ہوتے۔ سلائڈ رول (پھسل پیمانہ) کے پیمانہ پر غور کرو۔

ہیں اور خط پر کے ہر ایک نقطہ کے ساتھ ایک حقیقی عدد مربوط کیا جاتا ہے۔ کسی بھی نقطہ کا مختص وہ عدد ہے جو اُس سے مربوط ہو، اس کو لکھتے ہیں (x) اور اس کو منسوب کیا جائے گا "نقطہ x" سے۔

نظامِ مختصات اعداد کے اضافی قدر کی گرافی تفسیر کرتی ہے۔ اس طرح $3 < 5$ اس حقیقت کی مترادف ہے کہ (5) دائیں طرف ہے (3) کے جبکہ $-3 > -5$ سے مراد لیا جاتا ہے کہ (-5) بائیں طرف ہے (-3) کے۔ ترقیم $x < y < z$ نشاندہی کرتی ہے کہ y بڑا ہے x سے لیکن z سے چھوٹا ہے۔

اس نظام میں کوئی سے دو نقاط کے درمیان کا فاصلہ ظاہر کرنے کے لیے ہمیں بائیں طرف والے نقطہ کے مختص کو دائیں ہاتھ والے نقطہ کے مختص میں سے تفریق کرنے کی ضرورت ہے۔ اس لیے اگر $x_1 < x_2$ جہاں اضعافی ہندسہ 1 اور 2 کی محض دو علاحدہ علاحدہ قیمتوں کو بتاتے ہیں۔ (x_1) اور (x_2) کا درمیانی فاصلہ ہوگا $x_2 - x_1$ لیکن اگر $x_2 < x_1$ تو x_1 اور x_2 کا درمیانی فاصلہ $x_1 - x_2$ ہونا چاہیے کیوں کہ ہم فاصلہ ہمیشہ مثبت ہی رکھنا چاہتے ہیں۔ دو نقاط کے درمیان امتیاز کرنے کی تکلیف سے بچنے کے لیے مطلق قدر (قیمت) کا نظریہ اختیار کرنا چاہیے۔

x کی مطلق قیمت کو $|x|$ سے ظاہر کرتے ہیں اور یہ اس کے ناپ یا مقدار کو بلالحاظ علامت ظاہر کرتا ہے۔ مثلاً $|3| = 3$ اور $|-3| = 3$

تعریف 4-3 : کسی بھی حقیقی عدد x کی مطلق قیمت کی تعریف کی جاتی ہے۔

$$|x| \equiv \begin{cases} x & \text{اگر } x > 0, \\ -x & \text{اگر } x < 0, \\ 0 & \text{اگر } x = 0. \end{cases} \qquad (4\text{-}1)$$

یہاں ہمیں جذری علامت $\sqrt{\ }$ کی تعریف یاد کرنا چاہیے۔ کسی بھی مثبت عدد a کے لیے $\sqrt{a}$، a کے مثبت جذر المربع کی نمائندگی کرتا ہے۔ ذیل کی مستحکم تعریف سے ہم اس کی اہمیت کو نمایاں کرتے ہیں۔

تعریف 4-4 : کسی بھی حقیقی عدد x کے لیے، $\sqrt{x^2}$ مثبت ہوگا (یا صفر اگر $x = 0$) اور

$$\sqrt{x^2} = \begin{cases} x & \text{اگر } x > 0, \\ -x & \text{اگر } x < 0, \\ 0 & \text{اگر } x = 0. \end{cases} \tag{4-2}$$

اس طرح $\sqrt{7^2} = 7$ اور $\sqrt{(-7)^2} = -(-7) = 7$ اور عموماً $|x| = \sqrt{x^2}$ ، کیوں کہ مساوات (4-1) اور (4-2) ایک ہی قیمتوں کی تعریف کرتی ہیں۔ مطلق قیمت کا اظہار کرنے کے لیے کوئی سی بھی رقم استعمال کی جا سکتی ہے۔

مطلق قیمت کی اس تعریف کے فوری نتیجے کے طور پر ہمیں مندرجہ ذیل مسئلہ حاصل ہوتا ہے۔

مسئلہ 4-6 : کسی بھی $a \in R$ کے لیے

$$-|a| \le a \le |a|. \tag{4-3}$$

ثبوت : دائیں ہاتھ والی مساوات : اگر $a \ge 0$ ، تو $a = |a|$ لیکن اگر $a < 0$ یعنی $(-a > 0$ ، $|a| = -a$ تاکہ $0 < |a|$ اور $a < 0 < |a|$ ۔ اس طرح $a \le |a|$ تمام a کے لیے۔

بائیں ہاتھ والی مساوات : اگر $a \ge 0$ تو $-a = -|a| \le 0 \le a$ ، اگر $a < 0$ تو $|a| = -a$ یا $-|a| = a$ تاکہ تمام a کے لیے $-|a| \le a$

کیوں کہ غیر مساوات کے بعد کے کام میں مطلق قیمت کی دو بنیادی خصوصیات استعمال ہوں گی۔ اس لیے اُن کو ہم یہیں بیان کر دیتے ہیں۔

مسئلہ 4-7 : اگر a اور b کوئی سے بھی دو حقیقی اعداد ہوں تو اُن کے ضرب (یا ضریب) کی مطلق قیمت برابر ہوگی اُن کی مطلق قیمتوں کے ضرب (یا ضریب) کے :

$$|ab| = |a| \cdot |b|, \tag{4-4}$$

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}, \qquad b \neq 0. \tag{4-5}$$

(4-4) **کا ثبوت** : 4-3 اور 4-4 تعریفوں سے $|ab| = \sqrt{(ab)^2}$ اس طرح

$$|ab| = \sqrt{(ab)^2} = \sqrt{a^2b^2} = \sqrt{a^2}\sqrt{b^2} = |a| \cdot |b|$$

مسئلہ 4-8 : اگر a اور b کوئی دو حقیقی اعداد ہوں اُن کے جوڑ کی مطلق قیمت اُن کی مطلق قیمتوں کے جوڑ سے کم یا برابر ہوگی

$$\boxed{|a + b| \leq |a| + |b|.} \qquad (4\text{-}6)$$

ثبوت : ذیل کا سوال 10 دیکھو۔

اب ہم کون سے دو نقطے P_1 اور P_2 کے درمیانی فاصلہ کو ایک عام ضابطہ لکھتے ہیں۔

مسئلہ 4-9 : کون سے دو نقطے P_1 اور P_2 کا درمیانی فاصلہ جن کے مختصات (x_1) اور (x_2) ہیں، اس طرح لکھا جاسکتا ہے :

$$\boxed{d = P_1P_2 = |x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2}.} \qquad (4\text{-}7)$$

مثال کے طور پر دو نقطوں (5) اور (−3) کے درمیان فاصلہ یا تو اس طرح لکھا جاسکتا ہے $d = \sqrt{[5 - (-3)]^2} = 8$ یا پھر اس طرح $d = \sqrt{(-3 - 5)^2} = 8$

سوالات

1. ذیل کے اعداد کو قدر کی نزولی ترتیب کے لحاظ سے ترتیب دو اور اُن کو شکل 4-1 جیسے خطی نظامِ مختصات پر مرتسم (پلاٹ) کرو :

$$-6.5,\ 0,\ -1;\ -5,\ \tfrac{1}{2},\ 4,\ 2^3,\ 0.333,\ 2.3$$

2. مسئلہ 4-8 میں a اور b کی وہ شرائط بیان کرو تاکہ علامت = صحیح ہوں۔

3. مندرجہ ذیل کی الفاظ میں ہندسی (جیومیٹریکل) تعبیر لکھو :

(a) $a < b$ (b) $a < 2$ (c) $a > b$ (d) $a > b > c$
(e) $a - b = 1$ (f) $3.14 < \pi < 3.15$ (g) $1.41 < \sqrt{2} < 1.42$
(h) $|5 - 2| > |1 - 3|$ (i) $|a - b| > 0$ (j) $|x - 2| < 3$
(k) $|x - 1| > 4$ (l) $-1 \leq x < 1$

4. اگر دو نقاط P_1 اور P_2 کے مختصات کسی خط پر سلسلہ وار (2) اور (8) ہیں تو ثابت کرو کہ قطعہ P_1P_2 کے نقطۂ تنصیف کا محض (5) ہوگا۔

5. ذیل کے نقاط کو ملانے والے خط کا نقطۂ تنصیف کے محض معلوم کرو:

(4) اور (-4)، (3) اور (-5)، (-1.7) اور (3.7)، $(\sqrt{2})$ اور $(\sqrt{3})$

اور (x_1) اور (x_2)

6. مندرجہ ذیل مساوات x کے لیے حل کرو:

(a) $x = |10|$ (b) $x = |2 - 5|$

(c) $x = \sqrt{3^2}$ (d) $x = \sqrt{(-4)^2}$

(e) $x = |-\frac{3}{4}|$ (f) $x = \sqrt{(-1)^2}$

(g) $x = |\frac{1}{3} - \frac{5}{3}|$ (h) $x = |\frac{3}{4}| + |-\frac{5}{3}|$

7. مندرجہ ذیل مساوات، x کی تمام ممکن قیمتوں کے لیے حل کرو:

(a) $|x| = 2$ (b) $|x| = \sqrt{5}$

(c) $\sqrt{x^2} = 3$ (d) $\sqrt{x^2} = \frac{1}{2}$

(e) $|x - 2| = 5$ (f) $|x - 4| = 0$

(g) $|3 - x| = 6$ (h) $\sqrt{(x - 1)^2} = 5$

(i) $\sqrt{(2 - x)^2} = 4$ (j) $|x - 2| = -3$

(k) $\sqrt{(x - 4)^2} = -1$ (l) $\sqrt{(x - 5)^2} = 3$

8. مسئلہ 4-7 کی مساوات (5-4) کو ثابت کرو۔

9*. اگر $d \geq 0$ تو $|c| \leq a$ اگر اور صرف اگر $-d \leq c \leq d$ اس خصوصیت کے ثبوت میں جو لازمی طور پر ذیل کے دو حصوں میں ہونا چاہیے ہر قدم کی وجہ بتائیے۔

(a) اس بیان کا ثبوت کہ اگر $|c| \leq d$ تو $-d \leq c \leq d$

ہم جانتے ہیں کہ $c \leq |c|$ اور $|c| \leq d$ تاکہ $c \leq d$

ہم جانتے ہیں کہ $-|c| \leq -d$ اور $-|c| \leq c$ تاکہ $-d \leq c$

اس لیے $-d \leq c \leq d$

(b) اس بیان کا ثبوت کہ اگر $d \geq 0$ اور $-d \leq c \leq d$ تب $|c| \leq d$

اگر $c \geq 0$، $|c| = c$ کیوں کہ $c \leq d$ ہمیں حاصل ہوگا $|c| \leq d$

اگر $c < 0$، $|c| = -c$ کیوں کہ $-c \leq d$ یا $-d \leq c$ ہمیں دوبارہ حاصل ہوگا $|c| \leq d$

10*. مسئلہ 8-4 کو ثابت کرو۔ [اشارہ: $-|b| \leq b \leq |b|$ اور $-|a| \leq a \leq |a|$ ان دونوں غیر مساوات کو جوڑ دیجیے اور سوال 9 کا جواب استعمال کرو۔]

11*. ثابت کرو کہ $|a - b| \leq |a| + |b|$ [اشارہ: مسئلہ 8-4 میں b کو برابر مان لیجیے $-b$ کے]۔

12. ذیل کی غیر مساوات x کی تمام ممکن قیمتوں کے لیے حل کرو:

(a) $|x - 1| \leq 2$ سوال 9 کے بیان کے مطابق یہ مساوی القیمت ہے $-2 \leq x - 1 \leq 2$ کے، بائیں غیر مساوات $-2 \leq x - 1$ دیتی ہے $-1 \leq x$ اور دائیں غیر مساوات $x - 1 \leq 2$ دیتی ہے $x \leq 3$ نتیجہ اس طرح لکھا جاسکے گا $-1 \leq x \leq 3$

(b) $|3 - x| \leq 5$ (c) $|2x + 5| < 6$ (d) $|4 + 3x| < 2$

13*. ثابت کرو کہ اگر $d \geq 0$ تو $|c| \geq d$ اگر اور صرف اگر $c \geq d$ یا $c \leq -d$ [اشارہ: سوال 9 کا ثبوت دیکھو]۔

14. ذیل کی غیر مساوات x کی تمام ممکن قیمتوں کے لیے حل کرو:

(a) $|x - 1| \geq 2$۔ سوال 13 کے بیان کے مطابق یہ ہم قیمت ہوگا $x - 1 \leq -2$ یا $x - 1 \geq 2$ پہلی غیر مساوات کا مطلب ہے کہ $x \leq -1$ جبکہ دوسری سے مراد ہے $x \geq 3$ ان جوابات کا موازنہ سوال 12(a) کے جوابوں سے کرو۔

(b) $|3 - x| \geq 5$ (c) $|2x + 6| > 4$ (d) $|3x + 1| > 8$

15. ہندسۂ مستوی سے یاد کرو کہ دائرہ اُن نقاط کا طریق (کُل تعداد) جو کسی دیے ہوئے نقطہ سے دیے ہوئے فاصلہ پر ہوں۔ یہ دیا ہوا فاصلہ کہلاتا ہے نصف قطر اور دیا ہوا نقطہ مرکز۔ اس یک سمتی علم ہندسہ میں کسی قائم نقطہ سے دیے ہوئے فاصلہ پر کتنے نقطے ہوتے ہیں۔ ایک 'دائرہ' میں کتنے نقطے ہوں گے؟

16. اگر (1) ایک دیا ہوا نقطہ ہو اور ۷ دیا ہوا فاصلہ تو واضح کرو کہ $|x - 1| = 2$ کیسے اس بات کی شرط ہوگی کہ کوئی نقطہ (x)، (1) سے دو اکائی فاصلہ پر ہوگا۔ یہ وہ شرط ہے جس سے کہ نقطہ (x) اُس "دائرہ" پر ہوگا جس کا مرکز (1) ہے اور نصف قطر 2 ہے اور یہ "دائرہ" کی مساوات کہلاتی ہے۔

17. "یک سمتی دائروں" کی اصطلاح میں سوال 7 کی ہر ایک مساوات کی ہندسی اہمیت بتاؤ۔

18. ایسے "یک سمتی دائرہ" کی مساوات بتاؤ جس کا مرکز نقطہ (a) پر ہو اور نصف قطر r ہو۔

4-3 تکمیلی خصوصیت : کیوں کہ ہم سٹ R کی خصوصیت مکمل طور پر بیان کرنا چاہتے ہیں اس لیے میدانی (فیلڈ) موضوعات اور ترتیبی موضوعات کے علاوہ ایک اور موضوعہ بیان کرتے ہیں۔

جذر المربع معلوم کرنے کے عام طریقے سے حاصل کیے گئے $\sqrt{2}$ کے ناطق تقریبات کے سٹ پر غور کرو۔ یہ سٹ $A = \{1, 1.4, 1.41, 1.414, \ldots\}$، سٹ $B = \{x | x \in R$ اور $x^2 < 2\}$ کا ذیلی سٹ ہے۔ ان دونوں سٹوں میں سے کوئی بھی ایسا عنصر نہیں ہے جو $\sqrt{2}$ کے برابر یا بڑا ہو اس لیے $\sqrt{2}$ ہر دو سٹ کی ایک بالائی حد کہلاتا ہے۔ درحقیقت ایسی کئی اور بالائی حدود ہیں۔ اعداد $2\frac{1}{2}$، 3 اور 4 بھی بالائی حدود ہیں اگرچہ $\sqrt{2}$ ان میں سے "بہترین بالائی حد" اس اعتبار سے معلوم ہوتی ہے کہ یہ تمام بالائی حدود میں سے سب سے چھوٹی ہے۔

تعریف 4-5 : ایک سٹ S کی ایک بالائی حد عدد v کہلاتا ہے۔ اگر تمام $x \in S$ کے لیے $x \leq v$، اسی طرح عدد u ایک سٹ S کی زیریں حد کہلاتا ہے اگر تمام $x \in S$ کے لیے $u \leq x$۔

مندرجہ بالا مثال میں v کی قیمت $\sqrt{2}$، 2، $2\frac{1}{2}$، 3 وغیرہ ہو سکتی ہے۔ سٹ A کے لیے u کی قیمت 1، 0، -3 وغیرہ ہو سکتی ہے۔ کیا یہ B کی زیریں حدود ہیں؟ (کیوں؟)

ہماری دلچسپی کسی بھی سٹ کے صرف حدود میں ہی نہیں ہے بلکہ ہم بالائی حدود کی چھوٹی سے چھوٹی قیمت پر اور زیریں حدود کی بڑی سے بڑی قیمت پر، اگر اُن کا وجود ہو، زور دینا چاہتے ہیں۔

اعداد کے کسی بھی سٹ X جہاں $X = \{x | a < x < b\}$ پر غور کرو۔ اگر $c \in X$

تو بہ لحاظ تعریف $a < c$ اور $c < b$، کیوں کہ دفعہ 1-4 کے سوال 21 سے

$$a < \frac{a+c}{2} < c$$

ہم جانتے ہیں کہ c، X کی زیریں حد نہیں ہے۔ مزید یہ کہ کیوں کہ

$$c < \frac{c+b}{2} < b$$

c، X کی بالائی حد نہیں ہے۔ نتیجے کے طور پر b، X کی چھوٹی سے چھوٹی بالائی حد ہے اور اسی طرح a بڑی سے بڑی زیریں حد ہے۔

تعریف 4-6 : کسی بھی سٹ S کی بالائی حد b کمترین بالائی حد ہوگی اگر کوئی بھی بالائی حد b سے چھوٹی نہیں ہے۔ اسی طرح زیریں حد a اعظم زیریں حد ہوگی اگر کوئی بھی زیریں حد a سے بڑی نہیں ہے۔

سٹ $X = \{x | a < x < b\}$ میں b کمترین بالائی حد اور a اعظم زیریں حد ہوگی۔

کمترین بالائی حد اور اعظم زیریں حد کا سٹ میں شامل ہونا یا نہ ہونا ضروری نہیں ہے سٹ X میں وہ سٹ بھی شامل نہیں ہیں لیکن وہ سٹ $Y = \{x | a \leq x \leq b\}$ میں شامل ہیں۔ حقیقی اعداد کے سٹ $\{x | x \geq 0\}$ کی اعظم زیریں حد صفر ہے لیکن کمترین بالائی حد کوئی نہیں ہے۔ اگر ہم مسئلہ 1-1 کو یاد کریں تو حقیقی اعداد کے سٹ تو حقیقی اعداد کے سٹ

$\{x | x \geq 0, x$ ناطق ہے اور $x^2 \leq 2\}$

میں اعظم زیریں حد صفر ہے اور $\sqrt{2}$ اس کا کمترین بالائی حد ہے۔ اس کی اعظم زیریں حد صفر سٹ میں ہے لیکن اس کی کمترین بالائی حد $\sqrt{2}$ اس میں شامل نہیں ہے (کیوں؟)۔

اب ہم حقیقی اعداد کے سٹ R کے لیے کسی حد تک وجدانی تکمیلی خصوصیت بہ حیثیت آخری فیصلہ کن (موضوعہ) بیان کرنے کے لیے تیار ہیں۔

موضوعہ C : ہر وہ سٹ S جہاں کہ $S \subset R$ اور اُس کی ایک بالائی حد بھی ہے، کی ایک کمترین بالائی حد ہوگی۔ اسی طرح ایسا ہی ہر ایک وہ سٹ S جس کی ایک زیریں حد ہوگی ایک اعظم زیریں حد ہوگی۔

مثال : ثابت کرو کہ مثبت اعداد صحیح کا سٹ I_+ کی کوئی بالائی حد نہیں ہے۔

حل : ہم اسے ایسے ثابت کریں گے کہ مان کر چلیں کہ یہ بیان صحیح نہیں ہے اور اُس کی تردید پر پہنچ جائیں۔ ہم یہ مان لیں کہ مثبت اعداد صحیح I_+ کا سٹ کی ایک بالائی حد ہوگی۔ کیوں کہ $I_+ \subset R$ اس کی (بہ لحاظ موضوعہ C سے) ایک کمترین بالائی حد ہوگی جسے ہم b سے ظاہر کریں گے۔ اس طرح ایسے ایک b کا وجود ہے کہ اگر $x \in I_+$ ، $x \leq b$ اور b ایسا ایک کمترین عدد ہے لیکن اگر $x \in I_+$ ، $x+1 \in I_+$ تاکہ $x+1 \leq b$ تمام اُن $x \in I_+$ کے لیے۔ اس لیے $x \leq b-1$ جو اس حقیقت کی تردید کرتا ہے کہ b کمترین بالائی حد تھی۔ یہ تردید ثابت کرتی ہے کہ I_+ کی کوئی بالائی حد نہیں ہے۔

سوالات

1. ذیل کے سب سٹوں میں سے ہر ایک کی کمترین بالائی حد اور اعظم زیریں حد نکالو (اگر اُن کا وجود ہو)؛

(a) $\{x | x \in R \ \& \ x < -3\}$ (b) $\{x | x \in F \ \& \ x^2 > 2\}$

(c) $\{x | x \in I \ \& \ -3 \leq x < 1\}$ (d) $\left\{\frac{1}{n} \middle| n \in I \ \& \ n > 0\right\}$

2. R کے ذیلی سٹ کی ایک ایسی مثال دو کہ

(a) جس کی نہ تو بالائی اور نہ ہی زیریں حد ہو۔

(b) اس کی بالائی حد تو ہو لیکن زیریں حد کوئی نہ ہو۔

(c) اس میں اس کی اپنی بالائی یا زیریں حد شامل نہ ہو۔

(d) اس میں اس کی اپنی بالائی اور زیریں دونوں ہی حدود شامل ہوں۔

3. ثابت کرو کہ سٹ $\{-1, 0, 1\}$ میں اس کی اپنی کمترین بالائی اور اعظم زیریں حدود کیوں شامل ہیں اور وہ کیا ہیں؟

4. موضوعہ O1 کو دھیان میں رکھ کر یہ ثابت کرو کہ کسی بھی متناہی سٹ $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ کی ترتیب کی جاسکتی ہے۔ اس معلومات کی بنا پر ثابت کرو کہ کسی بھی متناہی سٹ میں اس کی کمترین بالائی حد (اور اعظم زیریں حد) شامل ہے۔

5. مان لو کہ حقیقی اعداد کے سٹ S کی کمترین بالائی حد b ہے۔ اگر $x \in S$ اور $x < b$ تو ایک ایسے عدد کا وجود ہے جو $y \in S$ اس طرح ہے کہ $x < y \leq b$ اگر ایسا نہ ہو تو x ، S کی بالائی حد ہوتا جو اس حقیقت کی تردید کرتا کہ b کمترین بالائی حد ہے۔ a جو

حقیقی اعداد کے سٹ S کی اعظم زیریں حد ہے کے لیے اس کی مشابہ خصوصیت کیا ہوگی؟ واضح کرو۔

6. اگر $r \in R$ اور $r > 0$ تو ثابت کرو کہ سٹ $S = \{nr | n \in I_+\}$ کی کوئی بالائی حد نہیں ہے [اشارہ: مان لو کہ بیان صحیح ہے۔ پس ایک ایسے حقیقی عدد t کا وجود ہے کہ تمام $n \in I_+$ کے لیے $nr \leq t$ ہوگا۔ اس لیے اُن تمام $n \in I_+$ کے لیے غیر مساوات $n \leq (t/r)$ سچ ہے۔ کیا یہ مثال کے نتیجے کی تردید کرتا ہے؟]۔

7. اگر $r, s \in R$ اور $r > 0$ و $s > 0$ تو ایک ایسے مثبت عدد صحیح n کا وجود ہے کہ $nr > s$۔ ثابت کرو کہ یہ بیان صحیح ہے [اشارہ: اگر یہ صحیح نہ ہوتا تو تمام $n \in I_+$ کے لیے $n \leq (s/r)$] نوٹ: s چھوٹا حروف تہجی ہے۔

8. اگر a، b، c ایسے حقیقی اعداد ہوں کہ $a < c < b$ تو کہتے ہیں کہ c واقع ہے a اور b کے بیچ میں۔ ثابت کرو کہ کون سے دو غیر مساوات ناطق اعداد کے درمیان ہمیشہ کوئی نہ کوئی ناطق عدد ہوتا ہے [اشارہ: مسئلہ 1-4 کا سوال 21 دیکھو]۔

9. اگر $b \in R$ اور a اور $0 < a < b$ تو ثابت کرو کہ a اور b کے درمیان ہمیشہ کوئی نہ کوئی ناطق عدد ہوگا حالانکہ اس اہم نتیجے کا ثبوت کسی قدر پیچیدہ ہے لیکن اس میں ہر قدم نسبتاً آسان ہے۔

مندرجہ ذیل میں ہر ثبوت کے ہر قدم کی وجہ بتلائیے:

(i) کیوں کہ a اور 1 دونوں مثبت ہیں تو ایک ایسے مثبت عدد صحیح n' کا وجود ہے کہ $n'a > 1$

(ii) کیوں کہ $b - a$ اور 1 مثبت ہیں تو ایک ایسے مثبت عدد صحیح n'' کا وجود ہے کہ $n''(b - a) > 1$

(iii) اگر n، n' اور n'' دونوں ہی سے بڑا ہے تو ہمیں حاصل ہوگا کہ $na > 1$ اور $nb > 1 + na$

(iv) کیوں کہ na اور 1 مثبت ہیں تو ایک ایسا مثبت عدد صحیح m' کا وجود ہے کہ $m' > na$

(v) اگر ایسے m' میں سے m کمترین ہے تو $na + 1 \geq m > na$

(vi) اس لیے $nb > m > na$ تاکہ $b > (m/n) > a$

4-4 . دو سمتی نظام مختصات : دفعہ 2-4 میں ہم نے وہ نظام مختصات پڑھا کہ جس سے ہم نہ صرف دو اعداد کے درمیان کا نسبتی ناپ بذریعہ گراف ہی سمجھ سکیں بلکہ دو نقاط کا درمیانی فاصلہ اُن کے مقدار کے فرق سے ظاہر کر سکتے ہیں لیکن یک سمتی نظام مختصات کے فوائد بہت ہی محدود ہیں۔ ریاضی میں ایک زیادہ اہم نظریہ دو اعداد کے سٹ کا آپس کا تعلق یا انحصار ہے۔ ایسے دو (اضافی) تعلق والے سٹوں کی مطابق قیمتوں کو ہم اعداد کے جوڑے کی حیثیت سے مان سکتے ہیں۔ پس ایک ایسا نظام جو ایک نقطہ اور ایک مرتب اعداد کے جوڑے کے درمیان ربط (تلازم) بتا سکتا ہے جو ایسے تعلق کے مطالعے میں مفید ترین ثابت ہوگا۔ ایک دو سمتی نظام مختصات ایسا تلازم مہیا کرتا ہے۔

دو سٹوں کے **کارتیزی حاصل ضرب** کی تعریف یاد کرو۔ ہم خاص طور سے اُس حالت میں زیادہ دلچسپی رکھتے ہیں جہاں $X = Y$ اور درحقیقت جہاں X اور Y دونوں ہی حقیقی R کے سٹ ہیں۔ علامتی طور پر اسے لکھیں گے

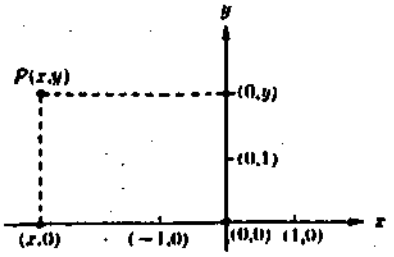
$$R \times R = \{(x, y) | x \in R \ \& \ y \in R\}.$$

اس سٹ کا ہر رکن ایک مرتب جوڑا (x, y) ہے۔ $R \times R$ کے اس سٹ کے تمام مرتب جوڑوں (x, y) اور مستوی کے تمام نقاط کے سٹ کے درمیان ہم ایک ربط قائم کر سکتے ہیں (دفعہ 1-3 کے سوال 12 میں دیے گئے حاصل ضرب سٹ کے اہم نظریے پر طالب علم کو نظر ثانی کر لینا چاہیے)۔

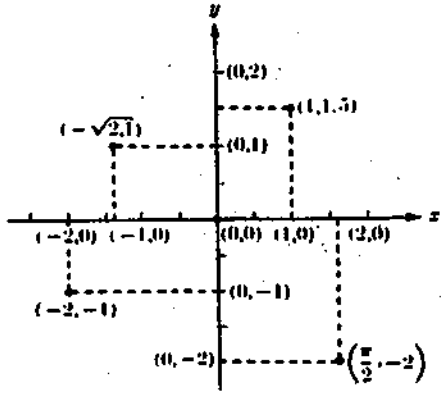
سب سے زیادہ استعمال ہونے والا نظام جو کسی مستوی کے ہر نقطے اور حقیقی اعداد کے جوڑوں کے درمیان تلازم قائم کرتا ہے **مستطیلی کارتیزی نظام مختصات** ہے۔ 1637 میں فرانسیسی ریاضی داں اور فلاسفر رینے ڈی کارتیز (René Descartes) نے اس طریقے سے نقاط اور اعداد کے درمیان تلازم (ربط) کا طریقہ استعمال کیا اور اس سے منحنی اور اُس کی مساوات کا تعلق بتایا۔ الجبرا اور علم ہندسہ کے اس اتحاد کے نتیجے کے طور پر ریاضی میں اور سائنس میں ریاضی کے اطلاق میں بہت ترقی ہوئی۔

ہم دو قائم الزاویہ خطوط مستقیم بنائیں اور آسانی کے لیے اُن میں سے ایک اُفقی ہو۔ ہم ان کو **محاور مختصات** کہتے ہیں۔ نقطۂ تقاطع کو بہ حیثیت مبدا 0 استعمال کرکے ہر خط پر یک سمتی نظام قائم کرو۔ عام طور سے دونوں خطوط پر لمبائی کی ایک ہی اکائی استعمال کی جاتی ہے، اگرچہ بعض حالات میں اس کے خلاف کرنا بھی مفید رہتا ہے۔ اب ہم رقم $(x, 0)$ سے خطِ اُفقی پر اس نقطے کو موسوم کرتے ہیں جو یک سمتی نظام میں عدد x کے مطابق ہو۔ اس طرح ہم ایک نقطے کو انتصابی خط پر جو عدد y کے مطابق یک سمتی نظام میں ہو علامت $(0, y)$ سے منسوب کرتے ہیں۔ اُفقی خط کہلاتا ہے x-محور یا محورِ فصلہ جبکہ انتصابی خط کو y-محور یا محورِ معیّن کے نام سے موسوم کرتے ہیں۔ جیسا کہ دستور ہے y-محور پر نقطہ $(0, y)$، x-محور کے اوپر ہوگا اگر y مثبت ہو۔

محورات کے نظامِ حوالہ میں جو شکل 2-4 میں دکھائی گئی ہے x اور y کی کونسی مخصوص قیمتوں کے جوڑے x_1، y_1 پر غور کیجیے۔



شکل 2-4



شکل 3-4

مرتّب جوڑوں کی قیمتوں کے مطابق نقط معلوم کرنے کے لیے ہم کو محور کے متوازی ایسے خطوط کھینچنے ہوں گے جو x-محور پر نقطہ $(x_1, 0)$ میں سے گزریں اور y-محور پر نقطہ $(0, y_1)$ میں سے۔ یہ خطوط ایسے نقطہ P پر قطع کرتے ہیں جو y-محور پر x_1 فاصلہ پر ہے (دائیں یا بائیں طرف جو x_1 کے مثبت یا منفی ہونے پر منحصر ہے) اور x-محور پر، y_1 فاصلہ پر ہے (اوپر یا نیچے جو y_1 کے مثبت یا منفی ہونے پر منحصر ہے)، ان فاصلوں کو ہم مرتّب (directed) فاصلہ کہہ سکتے ہیں۔ نقطہ P جو مرتّب

جوڑوں کی قیمتوں x_1، y_1 سے حاصل ہوگا اس مرتب جوڑے سے ظاہر کرتے ہیں جس کو لکھتے ہیں (x_1, y_1) جہاں x_1 اور y_1، P کے مختصات کہلاتے ہیں۔ توقع کے مطابق x والی قیمت فصلہ کہلاتی ہے اور y والی قیمت اُس کی معین کہلاتی ہے۔ صاف طور پر کسی بھی مرتب جوڑے کی قیمت (x, y) سے صرف ایک ہی نقطہ حاصل ہوگا۔ برخلاف مذکورہ بالا معنوں میں ہر نقطہ کے لیے صرف ایک ہی مرتب جوڑا (x, y) قیمت کا ہوگا۔ کیوں کہ اس نقطہ کے محوروں سے مرتب فاصلے یکتا ہیں۔ اسی طرح مستوی کے تمام نقاط اور مرتب اعداد کے جوڑوں (x, y) کے سٹ کے درمیان ایک ایک کی مطابقت ثابت ہوتی ہے۔ آنے والی بحث میں مرتب جوڑے (x, y) کو جہاں x اور y مختصات ہیں نقطہ (x, y) سے منسوب کرنا باعث سہولت ہوگا۔

دو مختص محور مستوی کو چار حصّوں میں تقسیم کرتے ہیں اور یہ پہلا، دوسرا، تیسرا اور چوتھا ربع کہلاتے ہیں۔ یہ تصدیق کر لینا مددگار ثابت ہوگا کہ نقاط کے مختصات جو مختلف ربعوں میں واقع ہوں اُن کی علامات دیے ہوئے جدول کے مطابق ہوں گی۔

ربع	فصلہ (طول)	معین (عرض)
I	+	+
II	−	+
III	−	−
IV	+	−

شکل 3-4 میں مختلف نقاط کا پلاٹ کرنا دکھایا گیا ہے۔

سوالات

1. مندرجہ ذیل نقاط پلاٹ کرو:

(a) جن کا فصلہ 4 اور معین 3 ہو (b) $(4, -3)$ (c) جس میں $x = -4$ اور $= 3$

2. ذیل کے مختصات والے نقاط کو پلاٹ کرو:

(a) $(2, 6)$, $(-1, 4)$, $(3, -2)$, $(-1, -3)$;
(b) $(4, 0)$, $(-4, 0)$, $(0, 4)$, $(0, -4)$, $(0, 0)$.

3. اُس نقطہ کے مختصات کیا ہوں گے:

(a) جو y-محور کے دائیں طرف لمبائی کی 3 اکائی اور دو x-محور میں اوپر کی طرف

(b) y-محور کے بائیں طرف لمبائی کی 4 اکائی اور x-محور کے اوپر کی طرف

(c) x-محور پر y-محور کے دائیں طرف 5 اکائی

4. (a) y-محور پر کسی نقطہ کا فاصلہ کیا ہوگا؟ (b) x-محور پر کسی نقطہ کا معین کیا ہوگا؟

5. بغیر پلاٹ کیے معلوم کرو کہ ذیل میں سے ہر ایک نقطہ کون سے ربع میں ہے:

$(-1, 2)$, $(2, -4)$, $(-3, -7)$, $(4, 6)$, $(-5, 2)$, $(28, -2)$.

6. (a) اُن چاروں نقاط کے مختصات بتائیے جو کسی مستطیل کے راس ہیں۔

(b) اُن تینوں نقاط کے مختصات بتائیے جو کسی قائم الزاویہ مثلث کے راس ہوں۔

(c) ایسے دائرہ کے اوپر کے کون سے چار نقاط کے مختصات لکھیں جس کا مرکز $(2, 3)$ اور نصف قطر 4 ہو۔

7. ذیل میں ہر ایک میں کسی متوازی الاضلاع کے تین راس دیے ہوئے ہیں چوتھی راس کے لیے مختصات کے تین ممکن سٹ لکھو:

(a) $(0, 0)$, $(2, 4)$, & $(6, 0)$

(b) $(-2, 1)$, $(1, 2)$, & $(0, -3)$

8. کسی متوازی الاضلاع کی تین راس ہیں (a, b)، $(0, 0)$ اور $(c, 0)$۔ چوتھی راس کے ممکن مختصات کیا ہیں؟

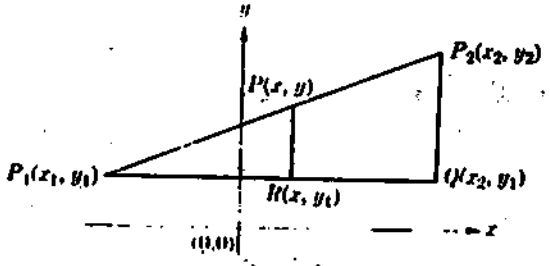
9. ایک قائم نظامِ مختصات میں اُن تمام نقاط (x, y) کے مقام کے سٹ کو جن کے مختصات مندرجہ ذیل شرائط پوری کرتے ہیں، ظاہر کرو:

(a) $x = 2$ (b) $y = -3$ (c) $x > 2$ (d) $y > 4$

(e) $x < 0$ (f) $y = x$ (g) $x > 2$, $y = 3$ (h) $x > y$

(i) $x < y$ (j) $|x| \geq 2$, $y < 4$ (k) $x = 2$, $y < -1$ (l) $x = 2$, $y = 3$

*10. اگر شکل 4-4 میں P، (x, y) اُس قطعہ خط کا نقطۂ تنصیف ہو جو P_1، (x_1, y_1) اور P_2 (x_2, y_2) کو آپس میں جوڑتے ہیں اور خط PR کو y-محور کے متوازی کھینچا گیا ہے تو R کے مختصات ہوں گے (x, y_1)



شکل 4-4

کیوں کہ $RP_1 = QR$ ، $x - x_1 = x_2 - x$ اس حقیقت کے استعمال سے اور ایسی ہی بناوٹ سے یہ ثابت کرو کہ اُس خط کے نقطہ تنصیف کے مختصات جو P_1 اور P_2 کو آپس میں ملاتے ہی ہوں گے

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad (4\text{-}8)$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

11 ایسے خط کے نقطۂ تنصیف کے مختصات معلوم کرو جو آپس میں ملاتی ہے :

(a) $(1, 2)$ اور $(-3, 5)$ کو (b) $(6, -2)$ اور $(5, -7)$ کو

(c) $(-4, 3)$ اور $(2, -3)$ کو۔

12. اگر $A = \{1, 2\}$ اور $B = \{-1, 0, 1\}$ تو

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A \ \& \ y \in B\}$$

کے مرتب جوڑوں کے سٹ کو ایک قائم نظام مختصات میں پلاٹ کرو۔

13. (a) اُن نقاط کو پلاٹ کرو اور وضاحت کرو جو ذیل کے سٹ کے رُکن ہیں :

$$I \times I = \{(x, y) | x \in I \ \& \ y \in I\}$$

(b) اُن نقاط کے سٹ کی وضاحت کرو جو ذیل کے سٹ کے رُکن ہیں

$$F \times F = \{(x, y) | x \in F \ \& \ y \in F\}$$

14. بعض اوقات مرتب جوڑوں کے ایسے سٹ پر غور کرنا مناسب ہوتا ہے جن میں پہلا رکن کسی ایک جوڑے میں دوسرے رکن کے برابر نہ ہو ایسے حذف شدہ کارتیزی حاصل ضرب" میں (x, z) قسم کے

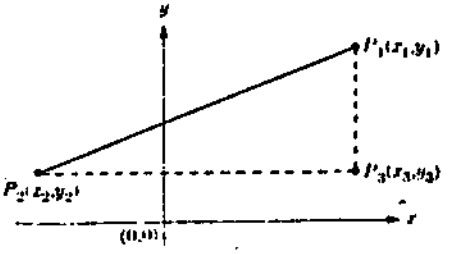
کوئی رکن نہیں ہوتے۔ اگر $A = \{1, 2, 3\}$ تو A کے اپنے آپ سے حذف شدہ کارتیزی حاصل ضرب میں جو ارکان ہوں گے اُن کی فہرست لکھو۔

*15 کارتیزی حاصل ضرب کے نظریے کو آسانی سے ایسی وسعت دی جاسکتی ہے جس سے اس میں کتنے ہی متناہی گنتی کے سٹ شامل کیے جاسکتے ہیں مثلاً

$$R \times R \times R = \{(x, y, z) | x, y, \text{and } z \in R\}$$

واضح کرو کہ ثلاثہ کا اِیساسٹ سہ سمتی فضا (مکان) کے تمام نقاط سے ایک ایک کے تطابق میں کیسے رکھا جاسکتا ہے [اشارہ : ہم یک سمتی نظام سے دو سمتی نظام میں کیسے آئے تھے ؟]

4-5 . ضابطۂ فاصلہ : اب ہم ایسا ضابطہ حاصل کرنے کے لیے تیار ہیں جس کے بہت سے اطلاق (استعمال) اس کتاب میں بحث کی گئی ریاضیات پر ہیں۔ کون سے دو نقاط $P_1(x_1, y_1)$ اور $P_2(x_2, y_2)$ کے درمیانی فاصلہ d معلوم کرنے کے لیے ضابطہ جہاں دونوں محاور پر لمبائی کی ایک ہی اکائیاں استعمال کی گئی ہیں۔ ہم فیثاغورث کے مشہور مسئلہ کا استعمال کرتے ہیں۔



شکل 4-5

مستوی پر کوئی بھی دو نقاط $P_1(x_1, y_1)$ اور $P_2(x_2, y_2)$ کو لے کر ایک قائم مثلث جیسا کہ شکل 4-5 میں ہے بنائیے۔ جہاں P_1P_2 وتر ہے اور دونوں ساق محاور کے متوازی ہیں۔ ان کے نقطہ تقاطع کو جہاں قائم الزاویہ بنتا ہے $P_3(x_3, y_3)$ سے موسوم کرو کیونکہ $x_3 = x_1$ اور $y_3 = y_2$ تو P_2 اور P_3 کے درمیان فاصلہ

$$P_2P_3 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2}$$

اور P_1 اور P_3 کے درمیان فاصلہ $P_1P_3 = \sqrt{(y_1 - y_2)^2}$

فیثاغورث کے مسئلہ کو دھیان میں رکھ کر جس میں بتایا گیا ہے کہ $\overline{P_1P_2}^2 = \overline{P_2P_3}^2 + \overline{P_1P_3}^2$

ہمیں حاصل ہوگا $\overline{P_1P_2}^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$

اس کے نتیجے کے طور پر مندرجہ ذیل مسئلہ حاصل ہوتا ہے۔

مسئلہ 4-10 : کسی بھی دو نقاط $P_1(x_1, y_1)$ اور $P_2(x_2, y_2)$ کا درمیانی فاصلہ ہوگا

$$\boxed{d = P_1P_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.} \qquad (4\text{-}9)$$

مثال 1 : نقاط $P_1(-4, 2)$ اور $P_2(3, -1)$ کے درمیان فاصلہ

$$P_1P_2 = \sqrt{[3 - (-4)]^2 + (-1 - 2)^2}$$
$$= \sqrt{58}.$$

مثال 2 : مبدا $(0, 0)$ اور کسی نقطہ (x, y) کے درمیان فاصلہ

$$d = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2}$$
$$= \sqrt{x^2 + y^2}.$$

مثال 3 : مثلث جس کی راس نقاط $P_1(-5, -1)$، $P_2(2, 3)$ اور $P_3(3, -2)$ ہیں متساوی الساقین مثلث ہوگا

$$P_1P_2 = \sqrt{(-5 - 2)^2 + (-1 - 3)^2}$$
$$= \sqrt{49 + 16} = \sqrt{65},$$
$$P_1P_3 = \sqrt{(-5 - 3)^2 + (-1 + 2)^2}$$
$$= \sqrt{64 + 1} = \sqrt{65}.$$

سوالات

ذیل کے ہر سوال میں مختص کاغذ پر شکل کھینچو۔

دیے ہوئے نقاط کے درمیان فاصلہ نکالو

(a) $(3, 2)$ اور $(6, 7)$ (b) $(-4, 3)$ اور $(5, -2)$

(c) $(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2})$ اور $(\frac{7}{4}, -\frac{3}{4})$ (d) $(0, 0)$ اور $(5, -12)$

(e) اور (f) $(-1, 3)$ اور (x, y)

یہ ثابت کرکے کہ کسی مثلث کے دو ضلعے آپس میں برابر ہیں ثابت کرو کہ مثلث جس کی راس (2, 1) ، (5, 5) اور (−2, 4) ہیں ایک مساوی الساقین مثلث ہوگا۔

3. ثابت کرو کہ نقاط (8, 1) ، (−7, −6) اور (2, 7) ایک مساوی الساقین مثلث کے راس ہیں۔

4. ثابت کرو کہ (6, 1) ، (5, 6) ، (−4, 3) اور (−3, −2) ایک متوازی الاضلاع کے راس ہیں۔

5. ثابت کرو کہ نقاط (2, 3) ، (−4, −3) اور (6, −1) ایک قائم الزاویہ مثلث کے راس ہیں۔ نوٹ کرو کہ یہ ثابت کرنے کے لیے ہمیں فیثاغورث کے مسئلہ کا معکوس استعمال کرنا ہوگا۔

6. ثابت کرو کہ (12, 9) ، (20, −6) ، (5, −14) اور (−3, 1) ایک مربع کے راس ہیں۔ وتر کی لمبائی کیا ہوگی؟

7. بذریعہ الجبرا جانچ کرو کہ مندرجہ ذیل تین تین نقاط ہم خط ہیں (ایک ہی خط پر ہیں) (6, 2) (1, 1) اور (−4, 0) ؛ (−6, 5) ، (3, −10) اور (−2, −2)

8. y-محور پر وہ نقطے نکالیے جو نقاط (−4, 4) اور (4, 10) سے ہم فصل ہوں۔

9. اگر کسی مساوی الاضلاع مثلث کے دو راس اور (4, 1) ہوں تو باقی کے راس نکالیے۔

10. وہ نقاط نکالیے جن کے معین 5− ہوں اور جن کا مبدا سے فاصلہ 13 ہو۔

11. ایسا مربع کھینچو جن کے وتر محاور مختصات پر ہوں اور جس کے ضلع کی لمبائی a ہو۔ چاروں راس کے مختصات کیا ہوں گے؟

12. اگر ایک دائرہ کا مرکز نقطہ (2, 3) پر ہو اور (−8, −5) سے گزرے تو اس کا نصف قطر کیا ہوگا؟ کیا یہ سے گزرے گا؟

13. ایسے دائرے پر غور کرو جس کا مرکز مبدا پر ہو اور اُس کا نصف قطر 1 ہو۔ ذیل کے کون کون سے نقاط میں سے یہ گزرتا ہے:

(1, 0) ، (0, −1) ، (1, 1) ، (½, ½) اور ؟

مبدا اور نقطہ کے درمیان کے فاصلے کا ضابطہ دے کر اور اس فاصلے کو 1 کے ساتھ

تسویہ (برابر رکھ کر) کرکے ہم نے x اور y کی وہ الجبرائی شرط بیان کی ہے جو کسی ایسے نقطہ (x, y) کے مختصات کو جو ایسے دائرے پر ہو جس کا مرکز $(0, 0)$ ہو اور نصف قطر 1 ہو کو مطمئن کرے۔

ثابت کرو کہ جب ہم اس شرط کو آسان کریں گے تو یہ ہو جائے گی $x^2 + y^2 = 1$

یہ مستوی میں اکائی دائرہ کی مساوات کہلاتی ہے۔

15. اگر کوئی نقطہ ایک منحنی پر ہو تو اس کے مختصات کو اس منحنی کی مساوات کو مطمئن کرنا چاہیے۔ سوال 13 کے نتائج کو یہ معلوم کرکے جانچو کہ آیا اُن نقاط کے مختصات اکائی دائرہ کی مساوات کو مطمئن کرتے ہیں جو سوال 14 میں حاصل ہوئی تھی جو ہے $x^2 + y^2 = 1$

16. نوٹ کرو کہ مساوات $(x-4)^2 + (y-9)^2 = 4$ تعمیم ہے مساوات $x^2 + y^2 = 4$ کی۔ دفعہ 4-7 کے سوال 15 میں بیان کی ہوئی سہ سمتی فضا میں اس کی مطابق تعمیم کیا ہوگی؟

4-6 دائرہ اور اُس کی قوسی لمبائی :

کسی بھی قائم دو سمتی نظام مختصات میں کوئی بھی طریق یا منحنی مثلاً ایک خطِ مستقیم یا دائرہ کو نقاط کا سٹ مانا جا سکتا ہے۔ اس سٹ میں ہر نقطے کے دونوں مختصات کوئی ایسی بیان کی ہوئی شرط* کو مطمئن کرتے ہیں جس میں یہ مختصات بھی شامل ہیں۔ برعکس اگر کسی نقطے کے مختصات اس شرط کو مطمئن کرتے ہیں تو وہ نقطہ اس سٹ میں ہونا چاہیے۔ مثلاً ہم اُن نقاط (مرتب جوڑے) کے سٹ پر غور کریں جو سٹ A کے ارکان ہوں جہاں کہ $A = \{(x, y) | x = y\}$

سٹ A جس کے ارکان (x, y) نقاط ہیں اور جو $x = y$ والی شرط کو مطمئن کرتے ہیں ایک طریق یا منحنی کہلائے گا۔* اس طریق یا منحنی کی مساوات $x = y$ شرط ہے جو ان نقاط کے مختصات کو (اور صرف وہ نقاط) مطمئن کرنا چاہیے۔ اس طریق یا منحنی کا گراف وہ شکل ہے جو ہم شکل 6-4 میں دیکھتے ہیں یعنی A نقاط کے سٹ کی جیومتریہ نمائندگی کارتیزی مختصات کے مستوی میں۔

---

* یہ شرط اس حقیقت کے علاوہ ہوگی کہ $(x, y) \in R$ جو ہم ہمیشہ مان کر چلیں گے جب تک کہ اس کے خلاف نہ کہا جائے۔

★ لفظ منحنی دو سمتی میں اس محدود مفہوم میں استعمال ہوا ہے۔

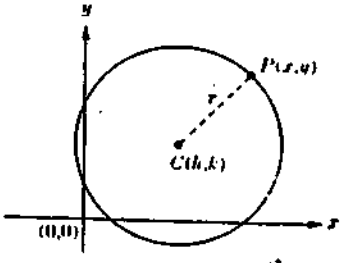
ہمارے پاس یہ تین مندرجہ ذیل اہم تعریفیں ہیں اور ہم ان میں سے کسی بھی دو میں امتیاز کریں گے۔

تعریف 4-7 : ایک طریق (یا منحنی) اُن نقاط کا ایک سٹ ہے اور صرف اُن ہی نقاط کا جن کے مختصات کچھ مخصوص شرائط کو مطمئن کرتے ہیں۔

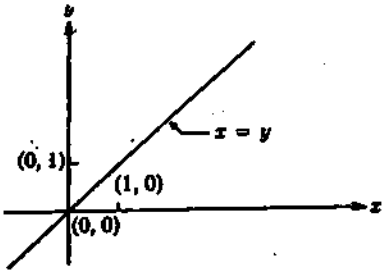
تعریف 4-8 : ایک طریق (یا منحنی) کی مساوات وہ شرط ہے جس کو طریق کے ہر ایک نقطہ کے مختصات اور صرف اُن ہی نقاط کے مختصات کو مطمئن کرنا چاہتے ہیں۔

تعریف 4-9 : کسی طریق یا منحنی کا گراف اُس طریق کے نقاط کے سٹ کی جیومتریائی کرتا ہے (یا جیومتریائی نمائندہ ہے)۔

بہت سی مختلف ابتدائی منحنی اور اُس کی مساوات بعد میں آنے والی دفعات میں زیرِ غور آئیں گی اس دفعہ میں ہم صرف دائرہ ہی سے سروکار رکھیں گے



شکل 4-7



شکل 4-8

ہم دائرہ کی تعریف ایک ہی مستوی میں تمام نقاط کے ایسے طریق کی حیثیت سے یاد کریں جو کہ کسی قائم نقطہ سے مستقل فاصلہ پر ہو۔ اس لیے ہماری دلچسپی اس سٹ میں

$\{(x, y) \mid |(x, y)| = C$ اور کسی قائم نقطہ کا درمیانی فاصلہ مستقل ہے $\}$

اگر ہم فاصلہ والا ضابطہ (مساوات 4-9) استعمال کریں تو دائرے کی ایک عام مساوات حاصل کرنا ممکن ہوگا اور وہ زیادہ صحیح بھی۔

کسی نقطہ $P(x, y)$ کو کسی ایسے دائرے پر ہونے کے لیے جس کا مرکز $C(h, k)$ ہو اور نصف قطر (شکل 4-7) کو یہ شرط مطمئن کرنی ہوگی کہ $CP = r$ جو کہ وہی شرط ہے جس کو کہ P کے مختصات ذیل کی شرط میں مطمئن کریں : $\sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2} = r$

برعکس اگر $CP = r$ تو P مرکز پر ہوگا۔ اس لیے ہمیں حاصل ہوگا

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2, \tag{4-10}$$

جو کہ دائرہ کی ایک عام مساوات ہے جس کا مرکز (h, k) اور نصف قطر r ہے۔
خود دائرہ ذیل کا سٹ ہوگا

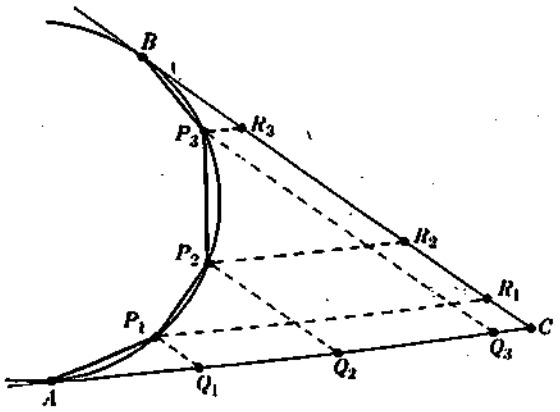
$$C = \{(x, y) | (x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2\}. \tag{4-11}$$

مثال 1 : اُس دائرہ کی مساوات جس کا مرکز $(2, -3)$ اور نصف قطر 4 ہے، ہوگی

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$$

دائرہ خود مندرجہ ذیل سٹ ہوگا

$$\{(x, y) | (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16\}$$



شکل 4-8

مثال 2 : ایک ایسے دائرے کی مساوات جس کا مرکز مبدا پر ہو اور نصف قطر 1 ، ہوگی

$$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 1$$

یا

$$\boxed{x^2 + y^2 = 1.}$$

یہ اکائی دائرہ کی مساوات کہلاتی ہے جو ہمارے مطالعے میں خصوصی اہمیت رکھتی ہے۔ دفعہ 4-5 کے سوال نمبر 14 کو یاد کرو۔ یہ اکائی دائرہ ذیل کا سٹ ہوگا:

$$\{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}$$

ہم صرف اس دائرے کی مساوات میں ہی دلچسپی نہیں رکھتے ہیں بلکہ اس کے محیط کے حصّوں کی لمبائی کے نظریے میں بھی۔ مثلثاتی یا دائری تفاعل کی تعریف کرنے میں دائری قوس کی لمبائی بہت سُود مند ہے۔ ساتھ ہی زاویوں کے ناپ اور بحث میں بھی۔

دائری قوس* $\overset{\frown}{AB}$ کو جیسا کہ شکل 4-8 میں ہے زیرِ غور لاتے ہوئے اس قوس $\overset{\frown}{AB}$ کی لمبائی s سے منسوب کرنا ممکن ہے۔ اگرچہ اس کی لمبائی ایک خطِ مستقیم کی طرح ناپنا ناممکن ہے۔ اگر ہم $\overset{\frown}{AB}$ پر بہت سے نقاط کو $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$ سے منسوب کریں تو اس کثیر ضلعی خط کی لمبائی جو ان نقاط کو ملاتی ہے متعلق وتروں کی لمبائی کے جوڑ کے برابر ہوگی جو ہمیں مساوات (4-9) کے استعمال سے حاصل ہوگی۔ مان لو کہ I سے اس کثیر ضلعی خط $AP_1P_2 \ldots P_nB$ کو تعبیر کرتے ہیں اور یہ $\overset{\frown}{AB}$ کا ایک رقمیہ (نقش) کہلائے گا۔ اس کی لمبائی اس طرح ظاہر کی جاسکتی ہے

$$|I| = |AP_1| + |P_1P_2| + |P_2P_3| + \cdots |P_nB|$$

ہم یہ آسانی سے ثابت کرسکتے ہیں کہ کسی ایسے رقمیہ (نقش) کی لمبائی $|AC| + |CB|$ سے کم ہے جہاں AC اور CB دائرہ کے نقاط A اور B پر خط مماس ہیں اور C اُن کا نقطۂ تقاطع ہے۔ ہر ایک نقطہ P_i سے AC کے متوازی ایسے خطوط کھینچیے جو BC کو R_i پر کاٹتے ہیں اور BC کے متوازی خطوط AC کو Q_i پر کاٹتے ہیں۔

کیوں کہ کسی مثلث کے ایک ضلع کی لمبائی دوسرے دو ضلعوں کی لمبائی کے جوڑ سے کم ہوتی ہے

---

* اگر قوس نصف دائرہ سے بڑا ہوتا تو تھوڑی سی ترمیم ممکن ہوتی اور یہی نتیجہ حاصل ہوتا۔

تو $|AP_1| < |AQ_1| + |Q_1P_1| = |AQ_1| + |CR_1|$

نیز کسی بھی P_iP_{i+1} کے لیے

$$|P_iP_{i+1}| < |Q_iQ_{i+1}| + |R_iR_{i+1}|$$

اور

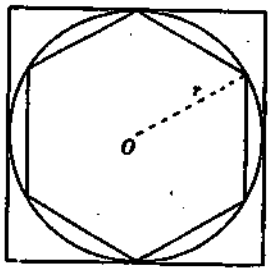
$$|P_nB| < |Q_nC| + |R_nB|.$$

مسئلہ 4-4 سے (دیکھیے شکل 4-8)

$$\begin{aligned} l| &= |AP_1| + |P_1P_2| + \cdots |P_iP_{i+1}| + \cdots |P_nB| \\ &< |AQ_1| + |CR_1| + |Q_1Q_2| + |R_1R_2| + \cdots \\ &\quad + |Q_iQ_{i+1}| + |R_iR_{i+1}| + \cdots + |Q_nC| + |R_nB| \\ &= |AQ_1| + |Q_1Q_2| + \cdots + |Q_iQ_{i+1}| + \cdots \\ &\quad + |Q_nC| + |CR_1| + |R_1R_2| + \cdots + |R_iR_{i+1}| + \cdots + |R_nB| \\ &= |AC| + |CB|. \end{aligned}$$

اس لیے $\overset{\frown}{AB}$ کے کسی رقیہ کی لمبائی کی بالائی حد ہوگی $|AC| + |CB|$ کیوں کہ یہ لمبائیاں حقیقی اعداد ہیں (R کے عناصر)۔ اس لیے تمام I کی لمبائیوں کے سٹ کی ایک کمترین بالائی حد کا وجود ہے جس سے کہ ہم مندرجہ ذیل تعریف حاصل کر سکتے ہیں۔

تعریف 4-10 : دی ہوئی قوس کی تمام ممکن رقیہ کی لمبائیوں کا سٹ کی کمترین بالائی حد دائری قوس $\overset{\frown}{AB}$ کی لمبائی a ہوگی۔



شکل 4-9

اس تعریف کے فوری نتیجے کے طور پر ہمیں معلوم ہوا کہ (1) ایسے تمام رقیے I کے لیے جہاں $|I| \leq s$ (2) قوسی لمبائی s ایسی ہے کہ $s \leq |AC| + |CB|$

مثال : حقیقی عدد π کی تعریف یاد کرو جو تقریباً 3.14 کے برابر ہے۔ عدد π کی تعریف ایسے کی جاتی ہے کہ یہ نسبت ہے کسی دائرے کے محیط کی لمبائی اور قطر کے درمیان۔ کسی ایسے دائرے کا محیط یا مکمل دائرے کی قوسی لمبائی جس کا نصف قطر r ہے برابر ہوگا $2\pi r$ کے یا نصف قطر کا تقریباً 6.28 گنا۔ اس کا موازنہ شکل 4-9 میں دی ہوئی دو منتظم جیومیٹریائی شکلوں سے کرو۔ کیوں کہ داخلی چھ ضلعی کا احاطہ $6r$ ہے اور بیرونی مربع کا احاطہ $8r$ ہے۔ اس لیے غیر مساوات $6r < 2\pi r < 8r$ متوقع ہوگی۔

سوالات

1. مندرجہ ذیل دائروں کی مساوات لکھو :

(a) مرکز (3, 1) اور نصف قطر 5 (b) مرکز (4, −2) پر اور نصف قطر 3

(c) مرکز (−1, 3) پر اور x محور مماس (d) مرکز (2, −4) پر اور دائرہ (5, −8) سے گزرتا ہوا

2. اُس مرکز کی مساوات لکھو جس کا مرکز مبدا پر ہو اور نصف قطر r ہو۔

3. مندرجہ ذیل سٹوں کی وضاحت کرو

(a) $A = \{(x, y) | (x-1)^2 + (y-1)^2 = 4\}$
(b) $B = \{(x, y) | (x-2)^2 + (y+7)^2 \leq 9\}$
(c) $C = \{(x, y) | (x-2)^2 + (y+7)^2 \geq 1\}$
(d) $D = \{(x, y) | (x-3)^2 + (y+1)^2 = 0\}$
(e) $E = \{(x, y) | (x+2)^2 + (y-5)^2 < 0\}$

4. سوال 3 کے حوالہ سے مندرجہ ذیل سٹوں کی وضاحت الفاظ میں کرو

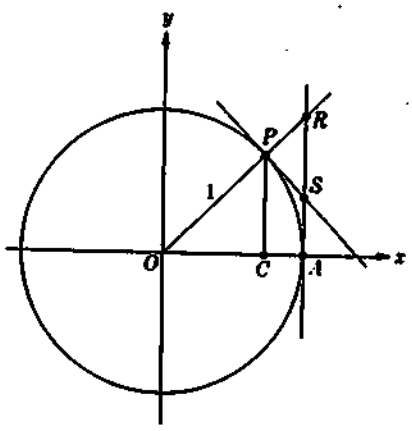
(a) $B \cup C$, (b) $B \cap C$

5. نصف قطر r والے دائرے میں داخلی مربع کے احاطے کی لمبائی کیا ہوگی ؟

6. نصف قطر r والے دائرے کے بیرونی چھ ضلعی کے احاطے کی لمبائی معلوم کرو۔

7. اپنے جواب کو π میں لکھ کر بتاؤ کہ ایک اکائی دائرہ (ایک ایسا دائرہ جس کا نصف 1 ہو) کے احاطے کی لمبائی کیا ہوگی ؟ اُس قوس کی لمبائی کیا ہوگی جو دائرے کے اردگرد ایک چوتھائی فاصلے تک ہو ؟ اُس قوس کی لمبائی کیا ہوگی جو دائرے کے اردگرد چھ ویں حصّے کے فاصلے تک ہو ؟

8. اگر P اور P' کسی دائرے پر ایسے دو نقاط ہوں کہ وتر PP' قطر نہ ہو اور D اُن دو مماس کا نقطہ تقاطع ہو جو اس دائرے پر P اور P' کھینچے گئے ہوں تو وتر PP'، قوس PP' اور



شکل 10-4

$|P'D| + |PD|$ کی اضافی لمبائیوں کے متعلق کیا کہا جا سکتا ہے اور کیوں؟

*9 شکل 10-4 میں اکائی دائرہ دیا ہوا ہے جس کا مرکز O پر ہے اور نقطہ P دائرے پر پہلے ربع میں ہے اور A، x-محور اور دائرہ کا نقطۂ تقاطع ہے۔ دائرہ کو مماس نقاط P اور A پر ایسے کھینچے گئے ہیں کہ اُن کا تقاطع S ہے۔ A پر کا مماسی خط OP کو (جو بڑھائی گئی ہے) R پر قطع کرتا ہے۔ اُسے x-محور پر کھینچا ہوا عمود اُس کو C پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ

$$|PC| < |\widehat{PA}| < |AR|$$

[اشارہ: $|PC| < |PA|$ اور $|SP| < |SR|$ کیوں؟]

باب 5

تفاعل اور اُن کی گرافی تعبیر

ریاضی میں تفاعل کا نظریہ بہت ہی اہم اور مفید ہے۔ یہ مضمون کی تقریباً ہر شاخ میں ظاہر ہوتا ہے۔ ریاضی میں اس کا تصوّر بہرحال روزمرّہ کی زبان کے بہ نسبت کچھ مختلف ہے۔ ہم لفظ تفاعل کو دو سٹوں کے عناصر کے درمیان ایک خاص قسم کی مطابقت یا تلازم کی تعبیر کے لیے استعمال کرتے ہیں۔ اس کتاب میں دونوں سٹوں کے عناصر حقیقی اعداد ہوں گے۔ اگرچہ عام ریاضی کے سیاق میں ہمیشہ یہ بات نہ ہوگی

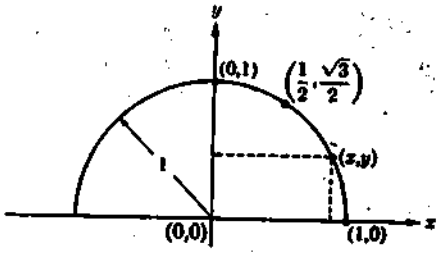
5-1 . تفاعل اور تعلق : دفعہ 6-4 کی مثال 2 کی بحث میں اکائی دائرے کو زیرِ غور لاتے ہوئے ہم نے اس کی مساوات $x^2 + y^2 = 1$ معلوم کی تھی۔ اگر ہم اس مساوات کی دونوں جانب سے x^2 گھٹا دیں اور مثبت جذر الربع لیں تو ہمیں حاصل ہوگا

$$y = \sqrt{1 - x^2}, \qquad (5\text{-}1)$$

جو شکل (5-1) کے بالائی نصف کی مساوات ہوگی۔ اس نصف دائرے کے گراف سے ہمیں معلوم ہوگا کہ کسی مخصوص نقطے کا منحنی پر ہونے کے لیے اُس کا y مختص یکتائی طور پر نکل آتا ہے اگر اُس کا x مختص دیا ہوا ہو۔ اسی طرح مساوات (5-1) سے y کی کوئی ایسی قیمت ہونی چاہیے جو x کی کسی مخصوص قیمت سے مطابقت رکھتی ہو۔ مثلاً اگر $x = 0$ تو y کو 1 ہونا چاہیے۔ اگر $x = 1$ تو $y = 0$ ہونا چاہیے یا اگر $x = \frac{1}{2}$ تو y کی قیمت $\sqrt{3}/2$ ہونا چاہیے۔ یہ تلازم یا مطابقت جو حقیقت میں ایک مخصوص تفاعل کو مرتّب کرتا ہے حقیقت میں زیادہ صحیح ہے بہ نسبت کسی اختیاری حاصل ضرب کے سٹ کے اگر کوئی مزید شرط عائد نہ کی جائے۔

نوٹ کرو کہ مندرجہ بالا مثال تفاعل کی ایک عام تعریف کو مطمئن کرتی ہے۔

ا اشارہ : یاد کرو کہ $-(\frac{a}{b}) = -1 \cdot (\frac{1}{b})$ ا



شکل 1-5

تعریف 1-5 : اگر کسی سٹ X کے ہر ایک عنصر کے ساتھ ایک دوسرے سٹ Y کا ایک عنصر بخاطور پر متلازم کر دیا جائے تو یہ تلازم X سے Y کو ایک تفاعل بناتی ہے۔

یہ عام طور سے لکھا جاتا ہے $f: X \to Y$ اور پڑھا جاتا ہے "تفاعل f، X سے Y کو"۔ الجبرا اور مثلثات میں ہم عموماً سٹ کے عناصر کے ساتھ ساتھ سٹ پر بھی زور دیتے ہیں۔ اس صورت میں ہم لکھیں گے $f: x \to y$ اور پڑھیں گے "f شامل کرتا ہے x کو y میں" جہاں ہم یہ مان لیں گے کہ $x \in X$ اور $y \in Y$ یہ سٹ X تفاعل f کا علاقہ کہلاتا ہے اور سٹ Y اس کی سعت (range)۔

تلازم کا طریقہ کئی طرح سے مکمل کیا جا سکتا ہے۔ اگرچہ عام طور سے یہ حاصل کیا جاتا ہے ایک ایسی مساوات سے جیسے $y = \sqrt{1 - x^2}$، اور/یا جدول سے یا بذریعہ گراف۔ اہم نقطہ یہ ہے کہ تفاعل جوڑا بناتا ہے **ایک اور صرف ایک** ہی Y کے عنصر سے X کے ہر ایک عنصر کے ساتھ۔ مندرجہ بالا مثال میں علاقہ ذیل کا سٹ ہے

$$X = \{x | x \in R \ \& \ -1 \leq x \leq 1\}$$

اور سعت سٹ ہوگا

$$Y = \{y | y \in R \ \& \ 0 \leq y \leq 1\}.$$

اکثر ہم زیادہ صراحت کریں گے۔ اگر تفاعل کی علامت f کو علاقہ کے عنصر x کے ساتھ مجتمع کر دیں اور $f(x)$ کو سعت کا مطابق عنصر کی حیثیت سے مانیں تو ہم لکھ سکتے ہیں $f: x \to f(x)$ اس لیے

$-2x + 1$ ہے

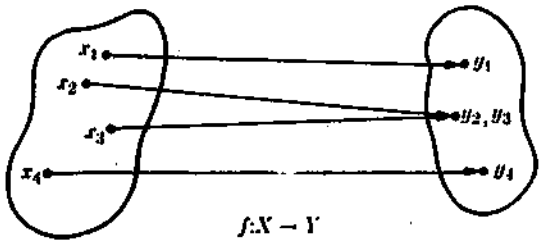
$2x + 3y$ جبکہ $x = -2$ اور $y = 3$ .28 $4x - 3y$ جبکہ $x = -1$ اور $y = 3$ ہے

$2x^2 - 3xy + y^2$ جبکہ $x = 2$ اور $y = -3$

$3x^2 + 2xy - 4y^2$ جبکہ $x = -3$ اور $y = 1$

علامت "$f(x)$ کو ہم x پر f کی قیمت کی حیثیت سے مانتے ہیں اور پڑھتے ہیں" f ، x کا۔ ہماری مثال میں جب $x = 0$ تو $f(0) = 1$ جب $x = 1$ تو $x = \frac{1}{2}$ اور جب $f(1) = 0$ $f(\frac{1}{2}) = \sqrt{3}/2$ ۔ بہت سے حالات میں ہم آگے بھی جا سکتے ہیں۔ اگر تفاعل f کے تلازم کی تعریف کے طریقے میں y کی تصریحی مساوات x کے ارکان میں ایسے دی ہوئی ہے جیسے $y = \sqrt{1 - x^2}$ تو ہم لکھ سکتے ہیں $f: x \to \sqrt{1 - x^2}$ ، اس بحث میں اس پر زور دیا جائے کہ x علاقہ f کے کسی بھی عنصر کا قائم مقام ہے اور y [یا $f(x)$] سعت میں مطابق عنصر کا قائم مقام۔ بے شک دوسرے حروف u ، v یا t علاقہ کے عناصر کی نمائندگی کر سکتے ہیں ساتھ ہی سعت کے مطابق عناصر کی نمائندگی $f(u)$ ، $f(v)$ یا $f(t)$ سے کی جا سکتی ہے۔ ایسا کوئی بھی استعمال سیاق و سباق سے واضح ہو جائے گا۔ صرف f سے تفاعل کی تعبیر کرنے میں کوئی خصوصیت نہیں ہے۔ دوسرے حروف جیسے g یا h بھی اس کی تعبیر کر سکتے ہیں۔ عام طور سے ایک تفاعل $f: X \to Y$ کی تعبیر شکل 2-5 کی طرح کی جا سکتی ہے جہاں X کے دو مختلف عناصر کو Y کے ایک ہی عنصر کے ساتھ ملتزم کیا ہے لیکن Y کے کوئی بھی دو صریح عناصر X کے ایک ہی عنصر کے جوابی (مطابق) عنصر نہیں ہیں۔

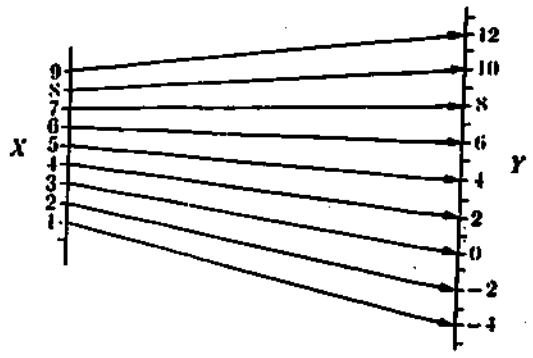
اب ہمیں نظریہ تفاعل کا خلاصہ بیان کرنا چاہیے۔ اس کے تین اہم حصے ہیں علاقہ X یا x ارقام کا سٹ، سعت Y یا y ارقام کا سٹ اور یہ اصول تعلق یا وہ مطابقت جس سے ان دونوں سٹوں میں ایک مخصوص طریقے سے تلازم پیدا کرتا ہے۔



شکل 2-5

---

* اس علامت $f(x)$ کو f اور x کے حاصل ضرب سے گڈمڈ نہ کیا جائے۔



شکل 3-5

جب تک اس کے خلاف کچھ نہ کہا جائے کسی تفاعل کے علاقے اور رسم دونوں ہی موزوں حقیقی اعداد کے ممکن ترین بڑے سے بڑے سٹ ہوں گے۔

تمثیل 1 : اُس تفاعل پر غور کرو جس کی تعریف مساوات $y = 2x - 6$ اُن تمام مثبت صحیح اعداد کے لیے کرتی ہے جو دس سے کم ہوں اس لیے $f: x \to 2x - 6$ جہاں $X = \{1, 2, \ldots, 9\}$ اس تفاعل کے لیے، $f(1) = -4$ ، $f(2) = -2$ وغیرہ۔ تفاعل f کی تمثیل شکل 3-5 میں ہے۔

تمثیل 2 : ہم یاد کریں کہ نصف قطر r والے دائرے کا رقبہ A کا ضابطہ ہے: $A = \pi r^2$ ، کیوں کہ π وہ مقدار ہے جس کی قیمت ایک ہی رہتی ہے (مستقل کہلاتی ہے)۔ ہم $A(r) = \pi r^2$ کو بہ حیثیت ایسی مساوات کے زیرِ غور لائیں جو اُس تفاعل کی وضاحت کرتا ہے جو نصف قطر اور اُس کے مطابق دائرے کے رقبے کی اقدار کے درمیان تلازمہ کا اظہار کرتا ہے۔ اس تفاعل کو اس طرح لکھا جا سکتا ہے $A: r \to \pi r^2$ ، $(r \geq 0)$ ۔ مثلاً $A(0) = 0$ ، $A(1) = \pi$ ، $A(2) = 4\pi$ وغیرہ۔ تفاعل کے علاقے اور رسم کی تمام قیمتیں مثبت اور حقیقی ہیں اور صفر بھی۔

تمثیل 3 : ایک بہت ہی ادنا مگر اہم تفاعل وہ ہے جو تمام حقیقی اعداد کو ایک ہی مقررہ عدد سے ملتزم کرتا ہے۔ ایسا تفاعل جو مستقل تفاعل کہلاتا ہے، ایسے لکھا جاتا ہے $f: x \to c$ ، اس تعریف کی بنا پر $f(0) = c$ ، $f(1) = c$ یا $f(\pi) = c$ اور درحقیقت $f(x) = c$ اُن تمام $x \in R$ تاکہ تفاعل کا علاقہ سٹ R ہے لیکن اس کی رسم ایک ہی حقیقی عدد c ہے۔

تمثیل 4 : یاد کرو کہ دفعہ 2-2 میں ہر ایک حقیقی عدد x کے لیے $(x \neq 0)$ بہ لحاظ ضرب ایک یکتا معکوس $1/x$ (مقلوب) کا وجود تھا۔ یہ تلازمہ تفاعل کو اس طرح بیان کرتا ہے $r: x \to 1/x$ جس کا علاقہ اور سعت سٹ R میں سوائے صفر کے لیے۔

ان تمثیلات کو ذہن میں رکھتے ہوئے یہ صاف ظاہر ہے کہ تفاعل مرتّب جوڑوں کے سٹ کی تعریف (وضاحت) اس مزید شرط کے ساتھ کرتا ہے کہ کسی بھی دو جوڑوں کے پہلے عناصر ایک نہیں ہیں۔ مثلاً تمثیل 4 میں $(1, 1)$ ، $(2, \frac{1}{2})$ ، $(-3, -\frac{1}{3})$ اور $(\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ وہ مخصوص مرتّب جوڑے ہیں جو تفاعل r سے متعلق ہیں۔ اگر یہی نظریہ رکھا جائے تو سٹ X میں مشتمل ہوں گے۔ مرتّب جوڑوں کے پہلے ارکان اور سٹ Y میں دوسرے۔ ہم مندرجہ ذیل ہم معنی تعریف بھی استعمال کر سکتے ہیں۔

تعریف 2-5 : X سے Y کو تفاعل مرتّب جوڑوں (x, y) کا ایسا ایک سٹ ہے کہ ہر اُس x کے مطابق جو $x \in X$ ایک یکتا y ہوگا جو $y \in Y$

اس لیے ہم تفاعل کو ظاہر کرنے کے لیے سٹ کا علامتی اظہار استعمال کرتے ہیں:

$$\{(x, y) | y = f(x)\}.$$

اگر مرتّب جوڑا (a, b) تفاعل سے تعلق رکھتا ہے یعنی اگر $f(a) = b$ تو ہم کہتے ہیں کہ f کے تحت b عکس ہے a کا تاکہ عام طور پر سعت ہوگا اس کے علاقے کا۔

تمثیل 5 : اگر $y = a(x)$ کی تعریف اس طرح کی جائے کہ

$$a(x) = \begin{cases} x \text{ کے لیے } x \geq 0, \\ -x \text{ کے لیے } x < 0, \end{cases}$$

تو تفاعل کو جس کی تعریف علاقہ کے مختلف ذیل سٹوں کی مختلف عبارات سے کی گئی ہے۔ اس طرح لکھا جا سکتا ہے $a: x \to |x|$ ، اس تفاعل کی سعت اور علاقہ کیا ہے؟ مرتّب جوڑے $(3, 3)$ اور $(-4, 4)$ اسی تفاعل سے تعلق رکھتے ہیں۔ ایسے ہی اور مرتّب جوڑے بتائیے جو a سے بھی متعلق ہوں۔

مزید ایک تمثیل ظاہر کر دے گی کہ تلازم کا طریقہ میں مساوات ہونا ضروری نہیں ہے۔

تمثیل 6 : مان لو کہ s ایک ایسا تفاعل ہے $s: \theta \to s(\theta)$ جہاں $\theta \in R$ ، $s(\theta)$ کو ہم بہ حیثیت اکائی دائرہ کے اُس نقطہ کے معین کی تعریف کرتے ہیں جو دائرہ (جس کی مساوات $x^2 + y^2 = 1$ ہے) کے نقطہ $(1, 0)$ سے چل کر اور قوس کی لمبائی دائرہ کے ساتھ ساتھ $|\theta|$ ناپ کر پہنچا جائے۔ اگر $\theta > 0$ تو گھڑی کی سُوئیوں کے برعکس سمت میں اور اگر $\theta < 0$ تو گھڑی کی سُوئیوں کی سمت میں ناپا جائے۔ $s(\theta)$ کی اس تفاعلی قیمت کی وضاحت (تعریف) ایک اُصول سے ہی کی جاسکتی ہے اور یہ الجبرائی مساوات کی شکل میں ظاہر نہیں کی جاسکتی۔ جانچ کرو کہ $s(0) = 0$ ، $s(\pi) = 0$ ، $s(-\pi/2) = -1$ ، $s(\pi/2) = 1$ ، $s(3\pi/2) = -1$ ، اور $s(4\pi) = 0$ [اشارہ: یاد رکھو کہ اکائی دائرے کا محیط 2π ہوتا ہے۔ اس تفاعل کا علاقہ R ہے۔ اس کی وسعت کیا ہوگی؟]۔

ایک ایسے تفاعل کی تعریف میں $f: x \to y$ ، y کی قیمت x کی کسی مخصوص قیمت کے مطابقت میں لیتا ہے۔ بہرحال ایسی دوسری ممکن صورتوں کا وجود بھی ہوسکتا ہے کہ x کی ایک دی ہوئی قیمت کے لیے y کی ایک، دو، تین یا لامتناہی مطابق قیمتوں کا بھی وجود ہو۔ مثلاً اگر ہم اکائی دائرہ کی مساوات $x^2 + y^2 = 1$ کو y کے لیے حل کریں تو ہمیں حاصل ہوگا

$$y = \pm\sqrt{1 - x^2}$$

اگر یہی وہ مساوات ہے جو X اور Y کے درمیان تلازم قائم کرتی ہے تو y کی دو قیمتیں ہوں گی جو x کی -1 ، اور 1 کے درمیان والی کسی قیمت کے مطابق ہوگی۔ اگرچہ یہ کہلایا جاسکتا ہے دوہری قیمت والا (اور عام طور سے کثیر القیمت) تفاعل لیکن ہم اس کو بجائے ایک کسی قسم کے تفاعل کہنے کے ایسی مطابقت کو ایک تعلق کہنا موزوں سمجھتے ہیں۔ اس کا علامتی طور پر اس طرح اظہار کیا جاسکتا ہے:

$$\{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}$$

یہ بات واضح رہنی چاہیے کہ کوئی بھی تفاعل ایک تعلق ہوسکتا ہے لیکن بہت سے ایسے تعلق کا وجود ہے جو تفاعل نہیں کہے جاسکتے۔ جیسا کہ تفاعل کی حالت میں، تعلق کا علاقہ اور وسعت ہوتی ہے۔ اگرچہ اس کتاب میں تعلقات کا ذکر کیا جائے گا لیکن جہاں بھی ممکن ہوسکے گا ہم اپنی بحث تفاعل تک ہی محدود رکھیں گے۔

سوالات

1. مندرجہ ذیل تفاعل میں جہاں $y \in R$ اور x کا علاقہ اور سعت نکالو:

(a) $f: x \to x$ (b) $g: x \to \sqrt{x}$
(c) $p: x \to x^2$ (d) $f: x \to \sqrt{4 - x^2}$
(e) $g: x \to \sqrt{x^2 - 1}$ (f) $h: x \to \frac{x}{1 - x}$
(g) $f: x \to \frac{1}{x^2 - 1}$ (h) $g: x \to |x| - 2$

2. ذیل میں سے کون سے سٹ تفاعل کا اظہار کرتے ہیں اور کون سے صرف تعلق بتاتے ہیں؟

(a) $\{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$ (b) $\{(1, 2), (1, 3), (2, 4)\}$
(c) $\{(x, y) | y = 2x + 4\}$ (d) $\{(x, y) | 2x + 3y = 6\}$
(e) $\{(x, y) | x + y^2 = 1\}$ (f) $\{(x, y) | y + x^2 = 1\}$
(g) $\{(x, y) | (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 9\}$
(h) $\{(x, y) | x \leq y\}$ (i) $\left\{(x, y) \middle| x + \frac{1}{y - 3} = 7\right\}$
(j) $\{(x, y) | |x| + |y| = 1\}$

3. سوال 2 میں ہر ایک تفاعل اور تعلق کا علاقہ اور سعت کیا ہے؟

4. اگر $f: x \to 2x - 5$ تو معلوم کرو (a) $f(0)$, (b) $f(1)$, (c) $f(3)$, (d) $f(-1)$

5. اگر $f: x \to x^2 - 7x + 10$ تو معلوم کرو

(a) $f(2)$, (b) $f(5)$, (c) $f(3)$, (d) $f(0)$

6. اگر $f: x \to 1/(x - 3)$ تو معلوم کرو (a) $f(4)$, (b) $f(2)$, (c) $f(-1)$

(d) $f(3)$ کے متعلق کیا جا سکتا ہے؟

7. اگر $e: x \to 2^x$ جس میں کہ علاقہ سٹ I ہے تو معلوم کرو

(a) $e(0)$, (b) $e(1)$, (c) $e(5)$, (d) $e(-5)$

8. اگر $g: x \to x^{1/2}$ تو معلوم کرو (a) $g(0)$, (b) $g(2)$, (c) $g(4)$, (d) $g(\frac{1}{9})$

9. اس تفاعل پر غور کرو جس کا اظہار یہ سٹ $\{(x, y) | 10^y = x\}$ کرتا ہے۔ اگر $y = f(x)$ کے تو معلوم کرو (a) $f(1)$, (b) $f(10)$, (c) $f(100)$, (d) $f(\frac{1}{100})$

10. اگر $a: x \to |x - 2|$ تو معلوم کرو (a) $a(0)$, (b) $a(2)$, (c) $a(4)$, (d) $a(-2)$

اگر f ایک مستقل تفاعل ہو تو $f(2)$ معلوم کرو اگر

(a) $f(1) = 6$, (b) $f(6) = -3$, (c) $f(-3) = 4$

اگر کسی مربع کے ایک ضلع کی لمبائی x ہو تو احاطہ P کو x کے ارکان میں ظاہر کرو۔ P کے لیے اس ضابطے کو استعمال کرنے میں ہم لمبائی x اور دیے ہوئے مربع کے احاطے میں مطابقت ثابت کر سکتے ہیں۔ یہ تلازم کون سے مخصوص تفاعل کو بیان کرتا ہے؟

سوال 12 میں رقبہ A کو x کے ارکان میں لکھو۔ یہ تلازم کون سے مخصوص تفاعل کو بیان کرتا ہے؟

اگر ایک متساوی الاضلاع مثلث کے ایک ضلع کی لمبائی x ہو تو احاطہ P کو x کی ارقام میں لکھو۔ رقبہ A کو x کی ارکان میں لکھو۔

اشارہ: ایک $30°$-$60°$ مثلث میں وتر چھوٹے ساق سے دوگنا ہوتا ہے۔ اونچائی معلوم کرنے کے لیے فیثاغورث کے مسئلے کو استعمال کرو اور یاد رکھو کہ (اونچائی)(قاعدہ)$\frac{1}{2} = A$

ان میں سے ہر ایک مساوات ایک مختلف تفاعل کی تعریف کرتا ہے۔ یہ کون سے دو تفاعل ہیں؟

ایک گیند 32 فٹ فی سکنڈ کی رفتار سے اوپر کی طرف پھینکی گئی اور t سکنڈ کے بعد زمین سے اُس کی اونچائی s فٹ میں $s = f(t) = -16t^2 + 32t$ دیتی ہے جہاں t سکنڈ میں اور s فٹ میں ناپا گیا ہے تو $f(0)$، $f(\frac{1}{2})$، $f(1)$، $f(\frac{3}{2})$ اور $f(2)$ کی قیمت نکالو اور نتیجے کی وضاحت کرو۔

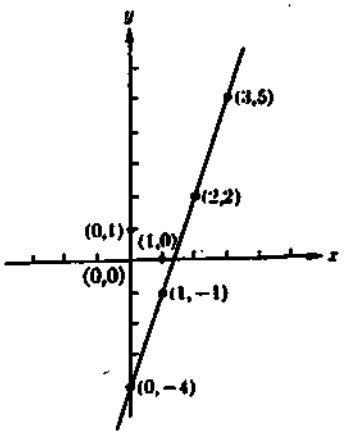
تمثیل 6 میں دیے ہوئے تفاعل کی قیمتوں کی جانچ کرو۔

اسی θ کے لیے جس کو تمثیل 6 میں بیان کیا گیا ہے $c(\theta)$ کی تعریف بجائے اُس کے معین کے اکائی دائرہ کے دیے ہوئے نقطہ کے فصلہ کی حیثیت سے کرو۔ اور $c(0)$، $c(\pi/2)$، $c(\pi)$، $c(3\pi/2)$، $c(-\pi/2)$ اور $c(4\pi)$ معلوم کرو۔

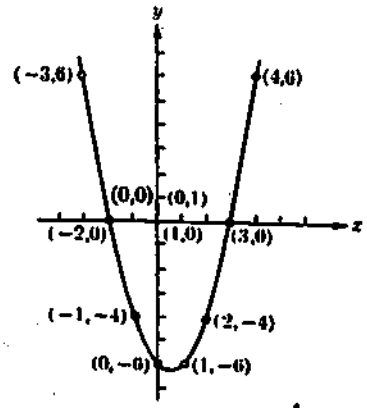
اگر ایک تفاعل f کی تعریف اس طرح کی جائے کہ $f(x) = x^2$ تو ثابت کرو کہ $f(x) = f(-x)$، کوئی بھی تفاعل جو اس شرط کو کہ $f(x) = f(-x)$ کو مطمئن کرے ایک جفت تفاعل کہلاتا ہے۔ ایسے تفاعل کی ایک اور مثال دیجیے۔

*19 اگر ایک تفاعل کی تعریف اس طرح کی جائے کہ $f(x) = x^3$ تو ثابت کرو کہ $f(-x) = -f(x)$ ، کوئی بھی تفاعل جو اس شرط کو مطمئن کرتا ہے ایک طاق تفاعل کہلاتا ہے۔ طاق تفاعل کی ایک اور مثال دو۔

5-2 . **تفاعل اور تعلق کی گرافی تعبیر:** مستطیلی نظام محصات کی دفعہ 4-4 کی بحث کو استعمال کرکے ہم کسی مخصوص تفاعل کی حالت میں x اور y کے درمیان (یا کوئی دو مقدار متغیر) تلازم ظاہر کرسکتے ہیں حالانکہ تمام نقاط (x, y) جن کے محصات ایک دی ہوئی مساوات کو مطمئن کریں پلاٹ نہیں کیے جاسکتے، پھر بھی عام طور سے ایک کافی تعداد میں ایسے پلاٹ کیے جاسکتے ہیں تاکہ تفاعل کی تقریباً ایک اچھی تصویر حاصل ہوسکے۔ ان تمام نقاط کا مجموعہ ایک تفاعل f کا گراف بناتا ہے یا اُس منحنی کا جو اس تفاعل کی نمائندگی کرتا ہے (یاد رکھو تعریف 4-9)۔



شکل 4-5



شکل 5-5

مثال 1 : تفاعل $f: x \to 3x - 4$ کا گراف کھینچو۔

حل : x کو اختیاری قیمت دے کر اُس کے مطابق y کی قیمتوں کا تخمینہ کرکے ہمیں (x, y) کے بہت سے ایسے نقاط مل سکتے ہیں جن کے محصات مساوات $y = 3x - 4$ کو مطمئن کریں اُن نقاط کو جو مندرجہ ذیل جدول میں ترتیب دیا گیا ہے۔ پلاٹ کرکے ایک بسیط منحنی میں جوڑ دیا گیا ہے۔

اس تفاعل کی نمائندگی ایک خط مستقیم کرتا ہے (شکل 4-5)۔

x	0	1	2	3	4
$y = f(x)$	−4	−1	2	5	8

مثال 2 : تفاعل $q: x \to x^2 - x - 6$ کا گراف بناؤ۔

حل : دوبارہ x کو قیمت دے کر y کی مطابق قیمتوں کا تخمینہ $y = q(x)$ سے کرو اور نتائج کو ایک جدول میں ترتیب دو۔

x	0	1	2	3	4	−1	−2	−3
$y = q(x)$	−6	−6	−4	0	6	−4	0	6

اگر ہم ان نقاط میں سے ایک بسیط منحنی اُس نقطہ سے شروع کرکے جس کا فصلہ 3− ہے کھینچیں اور پھر 2− ، 1− وغیرہ میں سے گزاریں تو نتیجے کے طور پر شکل 5-5 ہوگی۔ یہ منحنی جس کو قطع مکافی (شلجمی شکل) کہتے ہیں، مطلوبہ گراف ہے۔ اکثر گراف کو صحیح طور پر پورا کرنے کے لیے مزید نقاط [مثلاً $(\frac{1}{2}, -6\frac{1}{4})$] جن کے مختصات مطلوبہ شرائط کو مطمئن کرتے ہیں، معلوم کرنا چاہیے۔ جن نقاط کا بھی مقام دیا گیا ہے اُن میں سے بہت سی مختلف منحنی کھینچی جا سکتی ہیں لیکن مطلوبہ منحنی اور پلاٹ کیے ہوئے نقاط کے معقول "ادراج" سے ہی حاصل ہو سکتا ہے۔

ہم نے دونوں مثالوں 1 اور 2 میں دیکھا کہ تفاعل کا گراف x-محور سے گزرتا ہے۔ کسی بھی ایسے نقطے پر y مختص صفر ہے ایسے نقاط پر کی x-قیمت تفاعل کا صفر کہلاتی ہے۔ مثال 1 میں تفاعل کا صفر $x = 4/3$ اور مثال 2 میں تفاعل کے دو صفر ہیں 2− اور 3، عام طور پر تفاعل کا صفر اُس نقطے کا فصلہ ہے جہاں تفاعل کا گراف اُفقی محور کو کاٹتا ہے یا چھوتا ہے۔

مثال 3 : اُس تفاعل کا گراف کھینچو جس کی نمائندگی سٹ کے مرتب جوڑے $\{(x, y) | y = |x - 2|\}$ کرتے ہیں۔

حل : مندرجہ ذیل جدول بناؤ:

x	0	1	2	3	4	5	−1
y	2	1	0	1	2	3	3

نقاط کو پلاٹ کرو اور گراف کھینچو (دیکھیے شکل 6-5)۔ نوٹ کرو کہ تفاعل کا صفر $x = 2$ ہے حالانکہ x- محور منحنی کو نہیں کاٹتا۔

کسی بھی تعلق کی تعبیری نمائندگی ٹھیک اسی طریقے سے کی جا سکتی ہے۔ ایسا ایک گراف شکل 4-7 میں ذیل کے تعلق کے لیے دیا جا چکا ہے:

$$\{(x, y) | (x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2\}$$

یہ بات نظر میں رہے کہ کوئی بھی انتصابی خط تفاعل کے گراف کو زیادہ سے زیادہ ایک دفعہ ہی کاٹ سکتا ہے جبکہ کسی بھی تعلق (رشتہ) کے گراف کو کتنی ہی بار کاٹے (کیوں؟)۔

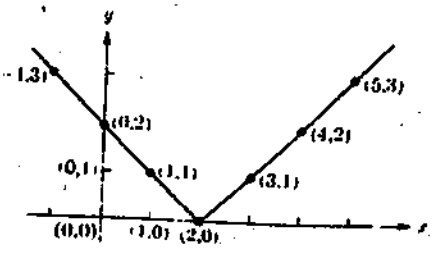
مثال 4 : تعلق $\{(x, y) | y^2 = x\}$ کے گراف کا خاکہ کھینچو۔

حل : اگر ہم $y^2 = x$ کو y کے لیے حل کریں تو ہمیں حاصل ہوگا $y = \pm\sqrt{x}$ تاکہ جدول بنانے میں نسبتاً آسانی ہو۔

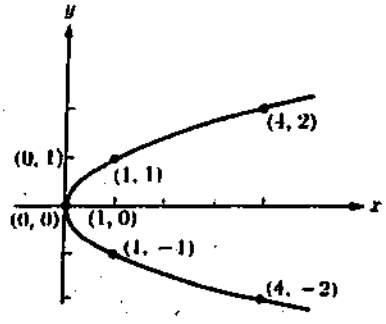
x	0	1	2	4
y	0	± 1	$\pm\sqrt{2}$	± 2

جیسا کہ اُمید ہے ہم دیکھتے ہیں کہ x کی ہر قیمت کے لیے y کی دو ملتزم قیمتیں ہیں۔ اس کا گراف شکل 7-5 میں دکھایا گیا ہے۔

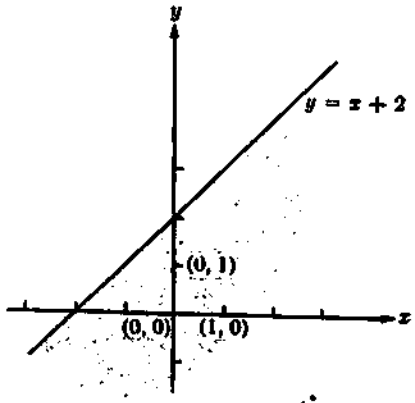
مثال 5 : تعلق $\{(x, y) | y \leq x + 2\}$ کا گراف کھینچو۔



شکل 6-5



شکل 7-5



شکل 5-8

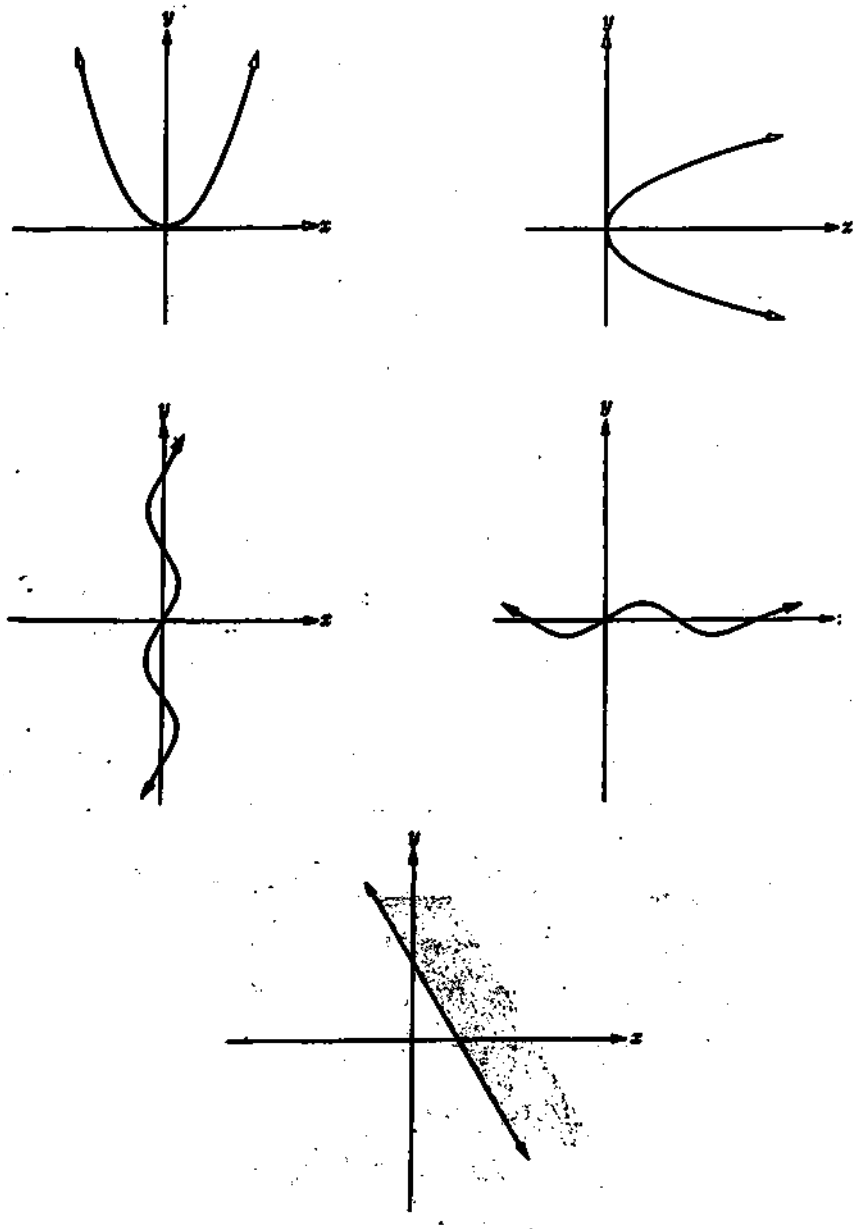
حل : اس تعلق کے گراف کے لیے ہم پہلے خط $y = x + 2$ کو پلاٹ کرتے ہیں اور یہ محسوس کرتے ہیں کہ کسی مخصوص x کے لیے نقطہ (x, y) مطلوبہ سٹ کا رکن ہوگا اگر اُس کا y مخصص برابر ہو یا کم ہو بہ نسبت اس کے کہ اگر نقطہ خط پر ہوتا۔ اس طرح مطلوبہ سٹ خط $y = x + 2$ ہوگا اور تمام نقاط اس خط کے نیچے ہوں گے۔ شیڈ کیا گیا رقبہ (شکل 5-8) اس تعلق کے گراف کو بتاتا ہے۔

سوالات

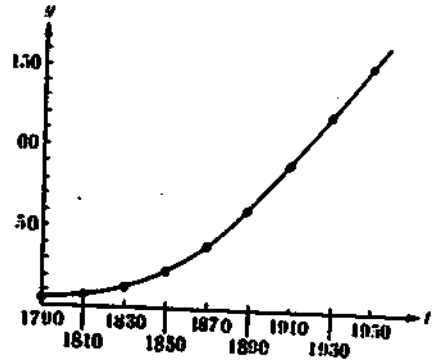
سوال 1 سے 12 تک کے ہر ایک تفاعل کی مساوات کا گراف کھینچو۔ دونوں محاور پر پیمانہ کا اظہار کرو اور ہر تفاعل کے صفر بتاؤ۔

1. $y = 2x + 5$
2. $y = 6 - 3x$
3. $y = x^2/16$
4. $y = -4x^2$
5. $y = x^2 - 7x + 10$
6. $y = -x^2 - x + 30$
7. $y = |x - 1|$
8. $y = |2x - 3|$
9. $y = \sqrt{x - 1}$ [اشارہ: y کبھی منفی نہ ہوگا]
10. $y = x^3$
11. $y = x^3 - x$
12. $y = \sqrt{x(2 - x)}$ اس تفاعل کا علاقہ اور وسعت کیا ہے؟
13. دفعہ 5-1 کے سوال 1 میں دیے گئے ہر ایک تفاعل کا گراف کھینچو۔
14. شکل 5-9 کون سے گراف، تفاعل کی اور کون سے تعلق کی نمائندگی کرتے ہیں؟ کیوں؟
15. دفعہ 5-1 کے سوال 2 کے تعریف کیے گئے ہر ایک سٹ کا گراف کھینچو۔
16. مندرجہ ذیل ہر ایک سٹ کا گراف کھینچو۔ ان میں سے کون سا تفاعل ہے؟

(a) $\{(x, y) | yx^2 = 1\}$ (b) $\{(x, y) | y^2x = 1\}$



شکل 9-5



شکل 10-5

5-3 . سادہ اعداد و شمار (آنکڑوں) کی گرافی تعبیر: کچھ تفاعل یا تعلقات کا وضاحت کے ساتھ اظہار شماریاتی جدول یا سائنسی اعداد و شمار سے ہوتا ہے۔ اکثر یہ مواد کسی ریاضی کے ضابطے سے بھی ظاہر نہیں کیا جا سکتا لیکن اس کے لیے گراف کھینچنے کے طریقے کا تصرف کیا جا سکتا ہے۔ اس مثال پر، جو بتاتی ہے کہ ہماری آبادی کیسے بڑھی، اس پر غور کرو۔ ذیل کا جدول 1790 سے، جب پہلی مردم شماری ہوئی تھی، ہر 20 سال کے وقفے سے کل آبادی بتاتا ہے۔

(t) سال	1790	1810	1830	1850	1870	1890	1910	1930	1950
آبادی دس لاکھ میں (y)	3.9	7.2	12.9	23.2	39.8	62.9	92.0	122.8	150.7

اگر t کی قیمتوں کو علاقہ سمجھا جائے اور y کی قیمتوں کو سعت تو ہمیں مرتب جوڑوں کا ایسا متناہی سٹ حاصل ہوگا جو تفاعل $y = f(t)$ کو مرتب کرے گا۔ یہ تفاعل سابق میں غور کیے گئے بہت سے تفاعلوں سے مختلف ہے کیوں کہ اس کا علاقہ اعداد صحیح کا متناہی سٹ ہے لیکن ہم ان اعداد و شمار کی واضح نمائندگی حاصل کرنے کے لیے اپنے گراف کھینچنے کے طریقے کی تطبیق استعمال کر سکتے ہیں۔ t محور کو افقی اخذ کر کے مرتب جوڑوں کو بہ حیثیت نقاط (t, y) پلاٹ کر لیے جائیں اور ان نقاط میں سے نکلتی ہوئی ایک بسیط منحنی کھینچی جائے جو عام میلان (رُخ) کی وضاحت کرتی ہے۔ اس کا گراف شکل 10-5 میں دکھایا گیا ہے۔

سوالات

مندرجہ ذیل میں سے ہر سوال میں دیے ہوئے اعداد و شمار کی وضاحت کرنے کے لیے گراف بناؤ۔ ہر سوال

میں پیمانہ کی وضاحت کرو :

1. مندرجہ ذیل جدول میں امریکہ کی غیر ملک میں پیدا ہوئی آبادی کی فی صد 1890 سے شروع ہو کر دس سالہ وقفہ سے دی گئی ہے :

(t) سال	1890	1900	1910	1920	1930	1940	1950
(y) فی صدی	14.7	13.6	14.7	13.2	11.6	8.7	6.7

2. مندرجہ ذیل جدول میں 1860 سے امریکہ میں معدنی ایندھن اور آبی طاقت سے استعمال کی گئی کل گھوڑا طاقت گھنٹوں کی توانائی (دس کھرب میں) دی گئی ہے :

(t) سال	1860	1880	1900	1920	1940	1950
(y) توانائی	25	40	78	190	280	410

3 امریکہ میں 1839 سے بعض سالوں کے لیے فی کس سالانہ آمدنی کی طاقت خرید کی فہرست کی جدول دی گئی ہے۔ اعداد و شمار جدید طاقت خرید کی نمائندگی کرنے کے لحاظ سے ترتیب دیے گئے ہیں:

(t)	1839	1859	1879	1899	1919	1929	1933	1941
(y)	198	296	309	482	620	681	495	792

4. امریکہ کے پبلک مدارس کے طلبا کی حاضری (دس لاکھ میں) 1880 سے اس فہرست میں دی گئی ہے:

(t)	1880	1890	1900	1910	1920	1930	1940	1950
(y)	6.1	8.2	10.6	12.8	16.2	21.3	22.0	21.7

5 امریکہ میں 1880 سے اساتذہ کی تعداد (دس ہزار کی اکائیوں میں) اس فہرست میں دی گئی ہے :

(t)	1880	1890	1900	1910	1920	1930	1940	1950
(n)	28.7	36.4	42.3	52.3	67.9	85.4	87.5	85.9

باب 6

دائری تفاعل

6-1. مثلثات : تقریباً 1600 میں بارتھولوماس پٹسکس (Bartholomaus Pitiscus) نے جو ہیڈل برگ میں ریاضی کے پروفیسر تھے، پہلی درسی کتاب بہ عنوان مثلثات لکھی۔ وہ خوب جانتے تھے کہ اس نام سے کیا مُراد ہے : مثلث کی پیمائش۔ اگرچہ درحقیقت مثلثات کا مادّہ اوائل تاریخی زمانہ کا ہے۔ یہ اُس آسمانی کرّہ کے مطالعہ کی کوشش کا ایک حصّہ تھا جس میں چاند، سورج اور ستاروں کو حرکت کرتے ہوئے مانا گیا تھا۔ اور زاویوں کے ذریعے ان آسمانی اجسام کا مقام معلوم کرنا تھا۔ اس کے ارتقا میں دلچسپی لینے والے سب سے زیادہ مشہور آدمی دو یونانی عالم فلکیات نیسیا کے ہپارکس (Hipparchus of Nicaea) (دوسری صدی قبل مسیح) اور کلاڈیس ٹولیمی (Claudius Ptolemy) (دوسری صدی بعد مسیح) تھے۔ نتیجے کے طور پر ہمیں اکثر یہ تصوّر ہوتا ہے کہ مثلثات کا مکمل اطلاق تو اصول مثلث کا حل کرنا ہے۔ اور اس لیے مثلثات کا اطلاق فلکیات، فن جہازرانی اور سروے (زمین پیمائی) کے میدان میں ہی سمجھا جاتا ہے۔ یہ بات شاید دو ہزار سال قبل یا شاید چار سو سال قبل صحیح ہوتی لیکن اس زمانے میں ایسا نہیں ہے۔

مثلثات کے ارتقا کے ساتھ ساتھ دائری تفاعل کے عام مطالعے میں بھی ترقّی ہوئی ہے۔ درحقیقت اب ہم مثلثات کی تعریف ریاضی کی اُس شاخ کی حیثیت سے کرتے ہیں جس کا تعلق دائری یا مثلثاتی تفاعل کے اطلاق اور خصوصیات سے ہو۔

ہمیں دائری تفاعلات کی اس طرح تعریف کرنا چاہیے تاکہ علاقہ اور وسعت دونوں ہی حقیقی اعداد

ہوں جیسا کہ ہم دیکھیں گے تعریف کے اس عام قاعدے سے ان تفاعل کے اطلاق میں بہت سے بڑے بڑے فائدے ہیں۔

6-2 . دائری تفاعل کی تعریفیں :

اُس اکائی دائرہ پر جس کی مساوات $x^2 + y^2 = 1$ ہے، اس طرح غور کرو تاکہ اس کا مرکز قائم محتصاتی نظام کا مبدا ہو (شکل 6-1)۔ اگر ایک نقطہ P، نقطہ A $(1, 0)$ سے چلنا شروع کرتا ہے اور دائرے کے محیط کے گرداگرد $|\theta|$ اکائی چلے گھڑی کی سُوئیوں کے خلاف سمت میں اگر $\theta > 0$ اور سُوئیوں کی سمت میں اگر $\theta < 0$ تو ہم θ کی کسی مخصوص قیمت کے لیے P کا صحیح مقام معلوم کر سکتے ہیں۔ اگر $|\theta| > 2\pi$ ہے (دائرے کا محیط) تو دائرے کے گرداگرد چلتے ہوئے A سے گزر جائیں گے حتیٰ کہ ہم پورا فاصلہ طے کر لیں کیونکہ دائرے کی قوسی لمبائی اچھی طرح واضح ہے (تعریف 10-4)۔ θ کی ہر قیمت کے ساتھ ایک نقطہ ملتزم ہے جسے نقطۂ مختتم کہتے ہیں اور اس کا فاصلہ قوس کے ساتھ ساتھ $(1, 0)$ سے $|\theta|$ اکائی ہے۔ اگر ہم اس مختتم نقطہ کو $P(\theta)$ سے نامزد کریں تو ہم نے ایسے تفاعل کی تعریف کی

$$\boxed{P: \theta \to P(\theta),} \qquad (6\text{-}1)$$

جس کا علاقہ ست R ہے اور اُس کی رسمت ان تمام نقاط کا سٹ یا مرتب جوڑے ہوں گے $\{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}$ بدقسمتی سے ایسے تفاعل کی بحث کرنا جو مرتب جوڑوں کے ساتھ حقیقی اعداد کو متلازم کرتے ہیں کسی قدر بے قاعدہ ہے۔ ہم اس صورت کی پیچیدگی کو ایسے دو تفاعل کی تعریف کر کے آسان کر سکتے ہیں جن میں ایک وہ ہے جو θ کو x میں شریک کر لیتا ہے اور دوسرا وہ جو θ کو y میں۔ مخصوص طور پر

$\cos: \theta \to x$ جہاں x، $P(\theta)$ کا فصلہ ہے

اور

$\sin: \theta \to y$ جہاں y، $P(\theta)$ کا معین ہے

کیوں کہ cos، کوسائن (cosine) کا اختصار ہے اور sin، سائن (sine) کا اختصار ہے تو ان دونوں تفاعل کی تفاعلی قیمتیں لکھی جاتی ہیں $x = \cos(\theta)$ یا عموماً $x = \cos\theta$ اور ان کو پڑھا جاتا ہے کہ "x برابر ہے θ کے cosine کے" اور اسی طرح $y = \sin\theta$ جس کو

پڑھا جاتا ہے "y کے θ کے sine"۔

اب ان تعریفوں کو اُن کی تعریفی مساوات کے ذریعے دُہرائیں۔

تعریف 6-1 : اگر مختتم نقطہ $P(\theta)$ کے مستطیل مختصات x اور y ہوں تو

$$\cos\theta = x \quad \text{اور} \quad \sin\theta = y. \tag{6-2}$$

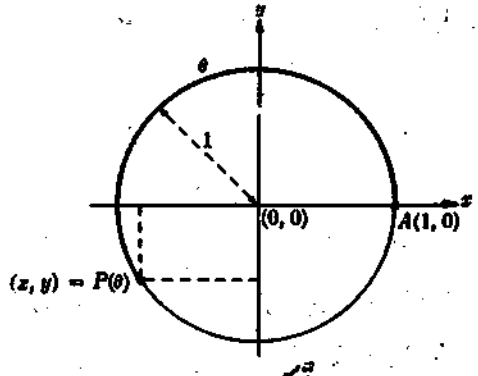
ہر تفاعل کا علاقہ R ہے۔ ہر ایک کی سعت R کا یہ ذیل سٹ ہے $\{r \mid -1 \le r \le 1\}$ (کیوں؟) اگر ہم یاد رکھیں کہ اکائی دائرہ کے محیط کی لمبائی 2π اکائیاں ہے تو مندرجہ ذیل جدول واضح ہو جائے گا:

θ	$P(\theta)$	$\cos\theta$	$\sin\theta$
0	(1, 0)	1	0
$\pi/2$	(0, 1)	0	1
π	(−1, 0)	−1	0
$3\pi/2$	(0, −1)	0	−1
2π	(1, 0)	1	0

ایک مساوی اہمیت کا دائری تفاعل یعنی مماسی تفاعل کی بھی تعریف کرنا چاہیے۔

تعریف 6-2 : اگر نقطۂ مختتم $P(\theta)$ کے مستطیلی مختصات x اور y ہوں تو مندرجہ ذیل مماسی تفاعل کی تعریفی مساوات ہے۔

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0) \tag{6-3}$$



شکل 6-1

اس تفاعل کا علاقہ سٹ R ہے جس میں اعداد $\pi/2 + n\pi$ جہاں $n \in I$ مستثنیٰ ہیں (کیوں؟). اس کی سعت مکمل سٹ R ہے۔ ان تینوں تفاعل کے آپس کے تعلق کو جن کی ہم نے تعریف کی ہے نوٹ کرو۔ کیوں کہ $\tan\theta = y/x$ تو ہمیں حاصل ہوگا

$$\tan\theta \equiv \frac{\sin\theta}{\cos\theta}, \qquad (6\text{–}4)$$

جو کہ θ کی تمام قیمتوں کے لیے صحیح ہے سوائے جبکہ $\cos\theta = 0$ اس حالت میں $\tan\theta$ غیر واضح ہے (کیوں؟)۔

دفعہ 4–4 سے ہم مختلف ربع میں نقاط کے مختصات کی علامات کو یاد کریں۔ یہ نوٹ کر کے کہ $P(\theta)$ کون سے ربع میں ہے اور x اور y کی علامات کیا ہیں ہم یہ معلوم کر سکتے ہیں کہ دائری تفاعل کون سے ربع میں مثبت یا منفی ہے۔ مطالعہ کرنے والے کو مندرجہ ذیل جدول کی جانچ کرنا چاہیے :

ربع جس میں $P(\theta)$ ہو	$\sin\theta = y$	$\cos\theta = x$	$\tan\theta = y/x$
I	+	+	+
II	+	−	−
III	−	−	+
IV	−	+	−

تفاعل قیمتیں جو ہم نے پہلی جدول میں دیکھیں وہ قطعی طور پر مخصوص تھیں۔ یہ حقیقت کہ محیط کی لمبائی 2π ایک غیر ناطق عدد ہے اور کسی عدد صحیح کا جفت اضعاف نہیں ہے، بتاتا ہے کہ ایسے مختتم نقاط جیسے $P(1)$ ، $P(2)$ وغیرہ کے مختصات ابتدائی طریقوں سے آسانی سے نہیں نکالے جا سکتے۔ یہی دراصل امر واقعہ ہے اور ہم بعد میں یہ دیکھیں گے کہ مناسب جدول کے استعمال سے ایسا کیسے کرتے ہیں۔

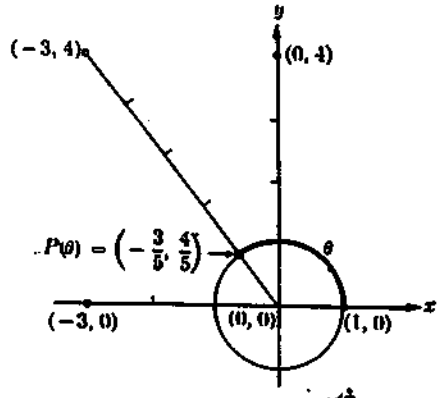
بہرحال پھر بھی θ کی کچھ ایسی مخصوص قیمتیں ہیں جن کے دائری تفاعل ہم معلوم کر سکتے ہیں اور یہ ہم دفعہ 6–4 میں کریں گے۔ اس دفعہ میں تو یہ زیادہ مناسب معلوم ہوتا ہے کہ تفاعل کے آپس میں تعلق پر زور دیں۔

مثال 1 : ایک دیے ہوئے θ کے لیے مان لو کہ مختتم نقطہ $P(\theta)$ خط کے اُس قطع پر ہے جو نقاط $(0, 0)$ اور $(-3, 4)$ کو آپس میں ملاتی ہے جیسا کہ شکل 6-2 میں۔ تو $\sin\theta$ ، $\cos\theta$ اور $\tan\theta$ نکالو۔

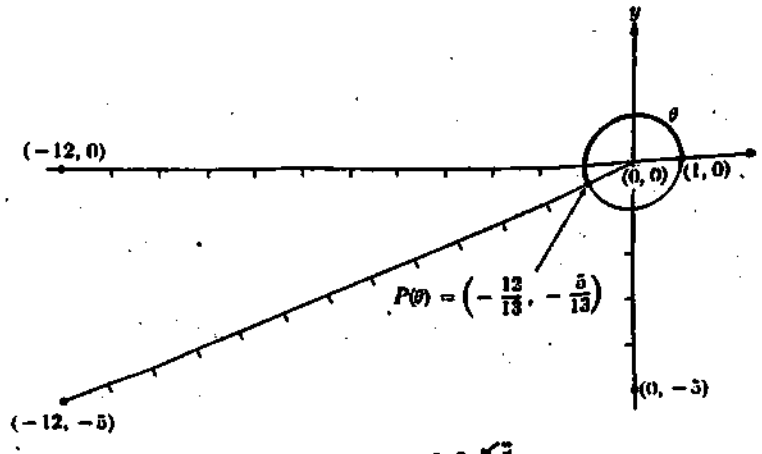
حل : $(0, 0)$ سے $(-3, 4)$ کا فاصلہ $\sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$ ہے

ہم چاہتے ہیں $P(\theta)$ کے مختصات، جو نقطہ کہ اُسی خطِ مستقیم پر ہے لیکن $(0, 0)$ سے ایک اکائی فاصلہ پر ہو تاکہ $P(\theta)$ کے مختصات ہوں $(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ ۔ (ثابت کرو کہ یہ مشابہ مثلث سے سچ ہے)

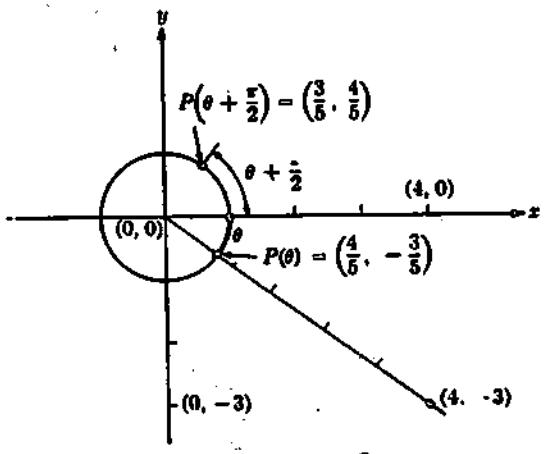
اس لیے $\sin\theta = \frac{4}{5}$ ، $\cos\theta = -\frac{3}{5}$ اور $\tan\theta = -\frac{4}{3}$



شکل 6-2



شکل 6-3



شکل 6–4

مثال 2 : اگر $\tan\theta > 0$ اور $\sin\theta = -\frac{5}{13}$ تو $\tan\theta$ ، $\cos\theta$ کی قیمت معلوم کرو۔

حل : کیوں کہ $\sin\theta = -\frac{5}{13}$ ، y ۔مختص ہے ایک نقطہ کا جو اس اکائی دائرہ $x^2 + (-\frac{5}{13})^2 = 1$ پر ہے اس لیے $x^2 = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169}$ تاکہ $x = \pm\frac{12}{13}$ لیکن چونکہ $\sin\theta < 0$ اور $\tan\theta > 0$ تو نقطہ مختتم $P(\theta)$ تیسرے ربع میں ہوگا۔ اس لیے $x = \cos\theta = -\frac{12}{13}$ اور $\tan\theta = \frac{5}{12}$ (دیکھیے شکل 6–3)۔

مثال 3 : مان لو کہ θ کوئی حقیقی عدد ہے اور اس کا ملتزم نقطہ مختتم $P(\theta)$ اُس قطع خط پر ہے جو نقاط $(0, 0)$ اور $(4, -3)$ کو آپس میں ملاتا ہے (دیکھو شکل 6–4 ، 6–5) تو $\theta + \pi/2$ اور $\theta + \pi$ کے sine ، cosine اور tangent نکالیے۔

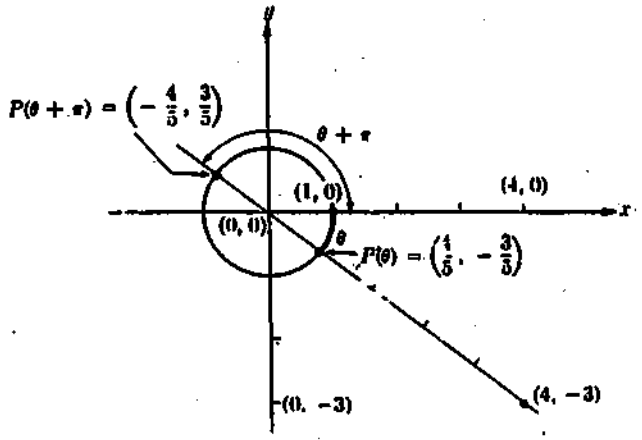
حل : مثال 1 سے ہمیں فوراً ہی حاصل ہوگا $P(\theta) = (\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$ ۔ اس لیے عامل مثلث سے

$P(\theta + \pi/2) = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ اور $P(\theta + \pi) = (-\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$ تاکہ

$$\sin(\theta + \pi/2) = \tfrac{4}{5}, \qquad \sin(\theta + \pi) = \tfrac{3}{5},$$
$$\cos(\theta + \pi/2) = \tfrac{3}{5}, \qquad \cos(\theta + \pi) = -\tfrac{4}{5},$$
$$\tan(\theta + \pi/2) = \tfrac{4}{3}, \qquad \tan(\theta + \pi) = -\tfrac{3}{4}.$$

اگر θ کو 2π کے اضعاف صحیح سے بڑھایا گھٹا دیا جائے تو $P[\theta + k(2\pi)]$ اصل

$P(\theta)$ سے اس طرح منطبق ہو جائے گا کہ دونوں مختتم نقاط کے مختصات ایک سے ہوں گے اس لیے ہمیں حاصل ہوگا:



شکل 5-9

مسئلہ 6-1 : کسی بھی $\theta \in R$ اور $k \in I$ کے لیے

$$\sin [\theta + k(2\pi)] = \sin \theta, \tag{6-5}$$

اور

$$\cos [\theta + k(2\pi)] = \cos \theta. \tag{6-6}$$

چنانچہ اگر ہمیں $\sin \theta$ اور $\cos \theta$ کی قیمتیں سلسلہ $0 \leq \theta \leq 2\pi$ میں معلوم ہوں تو ہمیں اُن کی قیمتیں تمام θ کے لیے معلوم ہو سکتی ہیں۔ یہ sine اور cosine تفاعل دَوری تفاعل کہلاتے ہیں جن کا دَور* 2π ہے۔

---

* عام طور سے کوئی بھی تفاعل f دَوری کہلاتا ہے جس کا دَور p ہو بہ شرطیکہ تفاعل $\theta + p$ برابر ہو θ کے تفاعل کے یعنی $f(\theta + p) = f(\theta)$ تمام θ کے لیے۔ نوٹ کرو کہ مساوات (6-5) میں $k = 1$ ، p اور 2π کی کمترین قیمت دیتا ہے جس کے لیے یہ سچ ہے۔ عام طور سے یہی p کی کمترین قیمت دور کہلاتی ہے۔

مماسی تفاعل sine اور cosine کے تفاعل سے دور میں مختلف ہے کیوں کہ $\tan \theta = y/x = -y/-x$ اور نقطہ $(-x, -y)$ ، $P(\theta + \pi)$ بھی ہے اس لیے ہمیں ملے گا

مسئلہ 6-2 : کسی بھی $\theta \in R$ اور $k \in I$ کے لیے

$$\tan (\theta + k\pi) \equiv \tan \theta. \qquad (6\text{-}7)$$

مماسی تفاعل دوری ہے جس کا دور π ہے۔

تین دوسرے دائری تفاعل اور ہیں، ان کی اہمیت اُن تفاعلوں سے جن کی اب تک تعریف کی جا چکی ہے کم ہے۔ cosecant (قاطع التمام)، secant (قاطع) اور cotangent (مماس التمام) تفاعل کی تعریف $P(\theta) = (x, y)$ کے مختصات میں اس طرح کی جاتی ہے :

تعریف 6-3 :

$$\csc \theta = \frac{1}{y} \quad (y \neq 0), \qquad (6\text{-}8)$$

$$\sec \theta = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0), \qquad (6\text{-}9)$$

اور

$$\cot \theta = \frac{x}{y} \quad (y \neq 0). \qquad (6\text{-}10)$$

مساوات (6-2) اور (6-3) کے استعمال سے یہ فوراً ہی سمجھ میں آجائے گا کہ

$$\sin \theta \csc \theta \equiv 1, \qquad (6\text{-}11)$$

اور

$$\cos \theta \sec \theta \equiv 1, \qquad (6\text{-}12)$$

$$\tan \theta \cot \theta \equiv 1. \qquad (6\text{-}13)$$

کیوں کہ مساوات (6-11) سے لے کر (6-13) تک کے تینوں تفاعل جن کی تعریف (6-3) میں کی گئی ہے متکافی تفاعل کہلاتے ہیں۔ دفعہ 2-2 کے موضوعہ 6 میں متکافی عدد کی تعریف یاد کرو۔ اگر $\sin \theta$ ، $\cos \theta$ اور $\tan \theta$ معلوم ہوں تو دوسرے تینوں تفاعلوں میں سے

کوئی بھی فوراً معلوم کیا جا سکتا ہے۔ اس وجہ سے ہم اس پر آگے بحث نہیں کریں گے۔

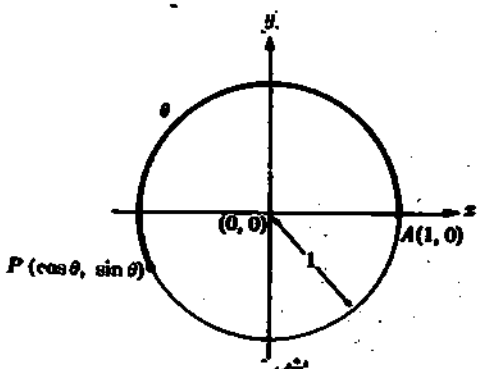
سوالات

مندرجہ ذیل میں سے کون سی رقم مثبت ہوگی؟ کون سی منفی؟

sin 2	.1	cos 2	.2	tan 4	.3
cos 5	.4	tan 3.5	.5	sin 4.5	.6
sin (−1)	.7	cot (−2)	.8	tan (−2.2)	.9
cos 2π/3	.10	tan 5π/4	.11	sin (−11π/6)	.12
cot 9π/7	.13	sec (−7π/8)	.14	csc (−π/8)	.15

یہ مانتے ہوئے کہ $\theta \in R$، وہ ربع معلوم کریں جن میں تعمیری نقطہ $P(\theta)$ مندرجہ ذیل شرائط کے تحت ہو سکیں گے:

$\sin\theta > 0$	.16	$\cos\theta > 0$	.17
$\tan\theta > 0$	.18	$\sin\theta < 0$	.19



شکل 6-6

$\cos\theta < 0$	. 20	$\sec\theta > 0$	. 21
$\sin\theta > 0$ اور $\cos\theta > 0$	. 22	$\sin\theta < 0$ اور $\cos\theta > 0$	. 23
$\sin\theta > 0$ اور $\tan\theta > 0$	. 24	$\cos\theta < 0$ اور $\sin\theta > 0$	. 25
$\sin\theta < 0$ اور $\cos\theta < 0$	. 26		

مندرجہ ذیل میں سے ہر ایک میں قطع $P(\theta)$ اس قطع نظیر ہے جو مبدا کو مظہرہ نقطہ سے آپس میں

ملاتی ہے۔ اس کی شکل بناؤ اور ہر ایک حقیقی عدد θ کے دائری تفاعل کی قیمتیں معلوم کرو :

27. (3, 4)	28. (−5, 12)	29. (−4, 3)
30. (24, −7)	31. (−8, −15)	32. (10, −8)
33. (0, −2)	34. (−1, 7)	35. (6, 0)

ذیل کی شرائط کے تحت $\sin\theta$ ، $\cos\theta$ اور $\tan\theta$ کی قیمتیں دریافت کرو :

36. $\sin\theta = \frac{5}{13}$ ، θ پہلے ربع میں ہے۔

37. $\cos\theta = -\frac{3}{5}$ ، θ تیسرے ربع میں ہے۔

38. $\tan\theta = -\frac{1}{3}$ ، θ دوسرے ربع میں ہے۔

39. $\sin\theta = \frac{2}{3}$ ، θ پہلے ربع میں نہیں ہے۔

40. $\cot\theta = \frac{4}{3}$ ، θ پہلے ربع میں نہیں ہے۔

41. $\cos\theta = \frac{5}{6}$ ، θ پہلے ربع میں نہیں ہے۔

42. $\tan\theta = \frac{1}{2}$ ، اور $\sin\theta$ مثبت ہے۔

43. $\sin\theta = -\frac{3}{5}$ اور $\tan\theta$ مثبت ہے۔

44. $\cos\theta = -\frac{7}{9}$ اور $\tan\theta$ منفی ہے۔

45. $\tan\theta = \frac{3}{4}$

46. $\sec\theta = -\frac{5}{3}$

47. $\csc\theta = \frac{13}{12}$

سوال 48 سے 52 تک مختتم نقط $P(\theta)$ اُس قطع خط پر ہے جو (0, 0) کو (8, 15) سے ملاتا ہے :

48. شکل بناؤ اور $\theta + \pi/2$ کے دائری تفاعل معلوم کرو۔

49. شکل بناؤ اور $\theta + \pi$ کے دائری تفاعل معلوم کرو۔

50. شکل بناؤ اور $\theta + 3\pi/2$ کے دائری تفاعل معلوم کرو۔

• ہم کہتے ہیں کہ θ کسی مخصوص ربع میں ہے اگر $P(\theta)$ اُسی ربع میں ہو۔

51. شکل بناؤ اور $\pi - \theta$ کے دائری تفاعل معلوم کرو۔

52. شکل بناؤ اور $\pi/2 - \theta$ کے دائری تفاعل معلوم کرو۔

*53. واضح کرو کہ $P(\theta)$ ، جو اکائی دائرہ کا نقطہ منتہی ہے۔ θ کی کسی بھی دی ہوئی حقیقی قیمت کے مطابق $(\cos\theta, \sin\theta)$ کے مختصات کیوں ہیں (دیکھو شکل 6-6)؟ یہ بہت ہی اہم نظریہ ہے۔

*54. $\tan\theta$ ، $\cot\theta$ ، $\sec\theta$ اور $\csc\theta$ کی دائری تفاعل قیمتیں (اگر اُن کا وجود ہو) 2π، $3\pi/2$، π، $\pi/2$، و $\theta = 0$ کے لیے نکالو۔ اگر ضرورت ہو تو اس دفعہ میں دی ہوئی جدول کو دیکھو۔

6-3 . سائن (sine) اور کوسائن (cosine) تفاعل کا طریق عمل :

دفعہ 2-6 کے سوال 54 اور جدول کو اگر ہم یاد کریں تو θ کی (کوئی بھی حقیقی عدد جو کہ $\pi/2$ کا عدد اضعافی ہو) کسی بھی ربعی قیمت کی تفاعلی قیمتیں نقطہ $P(\theta)$ کے اکائی دائرہ پر مختصات کو نوٹ کر کے بھی حاصل کی جا سکتی ہیں۔

اب یہ صاف ہے کہ ان تفاعل کی قیمتیں کس طرح تبدیل ہوتی ہیں جب 0 صفر سے 2π تک بڑھتا ہے۔ مندرجہ ذیل جدول کی جانچ کرو :

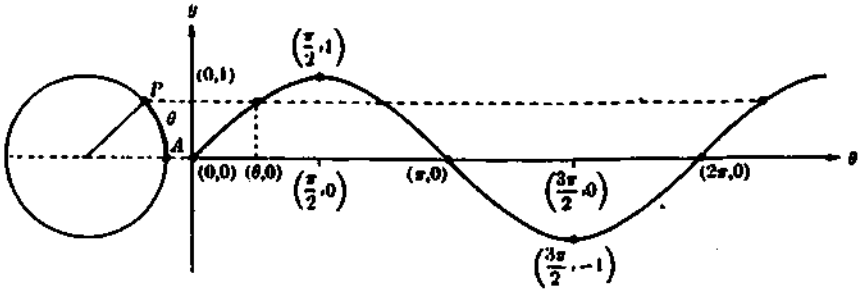
ربع جس میں $P(\theta)$ ہے	θ بدلتا ہے	$\sin\theta$ کی قیمتیں بدلتی ہیں	$\cos\theta$ کی قیمتیں بدلتی ہیں
I	0 سے $\pi/2$ تک	0 سے 1 تک	1 سے 0 تک
II	$\pi/2$ سے π تک	1 سے 0 تک	0 سے -1 تک
III	π سے $3\pi/2$ تک	0 سے -1 تک	-1 سے 0 تک
IV	$3\pi/2$ سے 2π تک	-1 سے 0 تک	0 سے 1 تک

یہ حقیقت کہ سائن اور کوسائن (sine اور cosine) تفاعل کی قیمتیں ایک سے کبھی بھی بڑی نہیں ہوتی ہیں۔ جدول سے ظاہر ہے یہ کہ ایسا ہی ہوگا صاف ہے کیوں کہ یہ قیمتیں اکائی دائرہ پر کسی نہ کسی نقطہ کے مختصات ہیں۔ اگرچہ مماس (tangent) کی قیمت کوئی بھی مثبت یا منفی حقیقی

عدد ہو سکتا ہے۔

نقطہ P $(\cos\theta, \sin\theta)$ کے اکائی دائرہ کے گرد اگرد گھومنے سے $\sin\theta$ اور $\cos\theta$ میں جو تبدیلیاں ہوتی ہیں ہم نے دیکھی ہیں۔ اگر ہم اکیلے $\sin\theta$ کا طریق عمل پر غور کرنا چاہتے ہیں تو ہم آسانی سے $y = \sin\theta$ کے گراف کا مطالعہ کر سکتے ہیں جس میں θ کی قیمتیں اُفقی محور پر پلاٹ کی گئی ہیں اور y کی قیمتیں انتصابی محور پر۔ ایسا گراف سیدھا اکائی دائرہ سے حاصل ہو سکتا ہے۔

ایسے مستطیلی نظام مختصات پر غور کرو جس میں θ کی محور پر $\pi/2$ لمبائیاں کاٹی گئی ہیں جیسے شکل 7-6 میں۔ ایک اکائی دائرہ ایسے کھینچا گیا ہے کہ اس کا مرکز θ-محور پر ہے۔ $y = \sin\theta$ کا گراف حاصل کرنے کے لیے $P(\theta)$ کا معین اُس نقطہ پر لے جایا جاتا ہے جس کا فاصلہ θ ہے۔ چاروں ربع میں سے ہر ایک ربع کے قوس کی تنصیف کر کے اور پھر نتیجے کے طور پر حاصل شدہ قوس کی تنصیف کر کے اور اسی طرح آگے عمل کرتے ہوئے ہم اپنی خواہش کے مطابق نقاط (جتنے چاہیں) گراف پر حاصل کر سکتے ہیں۔



شکل 7-6

اس طرح حاصل کیے گئے نقاط کے مقامات سے ایک بسیط منحنی کھینچ کر ہمیں $y = \sin\theta$ * کا گراف حاصل ہوگا۔ یہ منحنی لامتناہی طور پر دائیں اور بائیں کو کھینچا جا سکتا ہے لیکن ہمیں صرف $0 \le 2\pi$ تک کا کھینچنا ہے (کیوں؟)۔ نوٹ کرو کہ $y = \sin\theta$ کے گراف سے مندرجہ ذیل خصوصیات کتنی

---

* ایسا ایک گراف اُن نقاط کو استعمال کر کے جن کے مختصات ضمیمہ کے جدول I میں دیے گئے ہیں پلاٹ کیا جا سکتا ہے۔ دائری تفاعل کا گراف کھینچنے کی مزید بحث باب 14 میں آئے گی۔

واضح طور پر نمایاں ہیں۔

1. یہ تفاعل دَوری ہے جس کا دَور 2π ہے (یاد کرو مساوات 6-5)۔
2. اگر θ پہلے ربع میں ہو تو یہ تفاعل "تفاعل تکثیری" ہے (کون سے دوسرے ربع میں ایسا ہی ہوگا؟)۔
3. $\sin\theta$ کی قیمتیں اگر θ پہلے یا دوسرے ربع میں ہو، مثبت ہوتی ہیں اور منفی اگر تیسرے اور چوتھے ربع میں ہو۔
4. $\sin\theta$ کی قیمتیں -1 اور $+1$ کے درمیان ہوں گی۔
5. $\sin\theta$ کے صفر π کے اضعاف صحیح ہوں گے جب $\sin k\pi = 0 \quad (k \in I)$
6. اس تفاعل کی یہ خصوصیت ہے کہ $f(\theta) = -f(-\theta)$ مخصوص طور پر $\sin\theta = -\sin(-\theta)$ {دیکھو مساوات 6-27} اس لیے سائن (sine) تفاعل طاق ہے [دفعہ 1-5 کے سوال 18 کو یاد رکھو]۔

شکل 6-8 میں $y = \cos\theta$ کا گراف دکھایا گیا ہے۔ اس کی ساخت بالکل ایسے ہی طریقے سے عمل میں آسکتی ہے جس کو ابھی بیان کیا گیا ہے۔ اس گراف کے استعمال سے cos تفاعل کی ایسی ہی خصوصیات کی فہرست ممکن ہے جیسی کہ مندرجہ بالا میں sine تفاعل کی دی گئی ہیں۔

ہم مختلف تفاعلوں کے درمیان کچھ تعلقات اس سے قبل دیکھ چکے ہیں مثلاً مساوات (6-4) (6-11)، (6-12)، (6-13) اور دوسرے بھی نکالے جاسکتے ہیں کیونکہ $\cot\theta \equiv 1/\tan\theta$ مساوات {6-13} اور $\tan\theta \equiv \sin\theta/\cos\theta$ (مساوات 6-4)،

$$\boxed{\cot\theta \equiv \frac{\cos\theta}{\sin\theta}.} \qquad (6\text{-}14)$$

مندرجہ ذیل نتائج بہرحال زیادہ اہم ہیں، کیوں کہ اکائی دائرہ پر کسی بھی نقطہ کے مختصات $(\cos\theta, \sin\theta)$ ہوتے ہیں اور ان مختصات کو اکائی دائرہ کی مساوات $x^2 + y^2 = 1$ کو مطمئن کرنا چاہیے، اس لیے

---

* اگر $\theta_1 > \theta_2$ تو $\sin\theta_1 > \sin\theta_2$

θ کی کسی بھی قیمت سے ہمیں ملے گا :

$$\boxed{\sin^2\theta + \cos^2\theta \equiv 1} \qquad (6\text{–}15)$$

جہاں $\sin^2\theta$ حسب معمول $(\sin\theta)^2$ کی علامت ہے وغیرہ۔

مساوات (6–15) کے ہر ایک رکن کو $\cos^2\theta$ سے تقسیم کرکے حاصل ہوگا

$$\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} + 1 \equiv \frac{1}{\cos^2\theta},$$

یا

$$\boxed{\tan^2\theta + 1 \equiv \sec^2\theta.} \qquad (6\text{–}16)$$

مساوات (6–15) کے ہر ایک رکن کو $\sin^2\theta$ سے تقسیم کرکے حاصل ہوگا

$$1 + \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} \equiv \frac{1}{\sin^2\theta},$$

یا

$$\boxed{1 + \cot^2\theta \equiv \csc^2\theta.} \qquad (6\text{–}17)$$

مثال : اگر $\cos\theta = \frac{3}{5}$ تو θ کے تمام چھ تفاعلوں کی قیمت نکالو۔

حل : یہ مثال دفعہ 6–2 کے سوال 2 کے مشابہ ہے۔ ہم اسے ایک دوسرے طریقے سے حل کرسکتے ہیں۔ مساوات (6–12) کے استعمال سے $\sec\theta = \frac{5}{3}$ ۔ مساوات (6–15) سے

$$\sin\theta \equiv \pm\sqrt{1 - \cos^2\theta} = \pm\sqrt{1 - \tfrac{9}{25}} = \pm\sqrt{\tfrac{16}{25}} = \pm\tfrac{4}{5}$$

علامت کا انحصار اس بات پر ہے کہ $P(\theta)$ کس ربع میں ہے، کیوں کہ $\cos\theta > 0$ اس لیے ہم جانتے ہیں $P(\theta)$ یا تو پہلے یا چوتھے ربع میں ہوگا۔ اگر یہ پہلے ربع میں ہوگا تو $\frac{4}{5}$ کی علامت علامت جوڑ (+) ہوگی اور اگر یہ چوتھے ربع میں ہوگا تو علامت نفی (−) اخذ کی جائے گی۔ مساوات (6–4) سے

$$\tan\theta = \sin\theta/\cos\theta = \pm\tfrac{4}{5}/\tfrac{3}{5} = \pm\tfrac{4}{3}$$

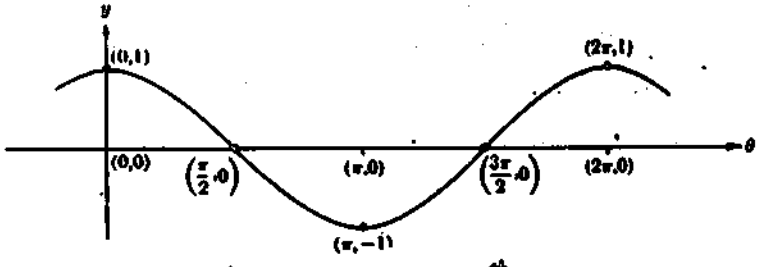
مساوات (6–11) کے استعمال سے $\cot\theta = \pm\frac{3}{4}$ اور مساوات (6–8) سے ہمیں ملے گا

$$\csc\theta = \pm\tfrac{5}{4}$$

سوالات

1. θ کی صفر اور 2π کی قیمتوں سے حاصل کی گئیں چھ دائری تفاعلوں کی قیمتوں کا موازنہ کرو؟

2. $-\pi/2$ کے چھ دائری تفاعلوں کی قیمتیں کیا ہیں؟



شکل 6-8

3. θ کی مندرجہ ذیل قیمتوں کے لیے چھ دائری تفاعلوں کی قیمتیں معلوم کرو؟

$9\pi/2$ (c)	$7\pi/2$ (b)	2π (a)
100π (f)	15π (e)	16π (d)
5π (i)	4π (h)	$5\pi/2$ (g)

4. θ کی مندرجہ ذیل قیمتوں کے لیے چھ دائری تفاعلوں کی قیمتیں کیا ہوں گی؟

$-3\pi/2$ (c)	$-\pi/2$ (b)	-5π (a)
-40π (f)	$-11\pi/2$ (e)	-6π (d)
$-5\pi/2$ (i)	$-7\pi/2$ (h)	$-\pi$ (g)

5. اس دفعہ کے جدول کی جانچ $\sin\theta$ اور $\cos\theta$ کے تغیر کے لیے کرو۔

6. $\tan\theta$ اور $\cot\theta$ کے تغیر کے لیے اسی قسم کی جدول بناؤ۔

7. $\sec\theta$ اور $\csc\theta$ کے تغیر کے لیے اسی قسم کی جدول بناؤ۔

8. دفعہ 6-2 کے سوال 36 سے 47 تک تمام سوالوں کو اس دفعہ کی مثال میں سمجھائے گئے طریقے سے حل کرو۔

9. ثابت کرو کہ $\sin(k\pi) = 0$ اور $\cos(k\pi) = (-1)^k$ کسی بھی k کے لیے جو $k \in I$

*10. $y = \cos\theta$ کا گراف شکل 6-8 کی طرح بناؤ اور عمل واضح کرو۔ گراف سے $\cos\theta$ کی خصوصیات کی فہرست $\sin\theta$ کی خصوصیات کی فہرست کے مشابہ بناؤ۔

.1 ایک ہی مستطیلی نظام محتصات میں $y = \sin\theta$ اور $y = \cos\theta$ دونوں ہی کی منحنی کی تصویر اس طرح کھینچو کہ ایک منحنی دوسرے پر متراکب (قائم) ہو۔ حالانکہ مندرجہ ذیل حقائق اسی باب میں بعد میں ثابت کیے جائیں گے۔ کیا ان کا اس شکل سے استنباط کیا جاسکتا ہے؟

(a) $\sin(\pi/2 + \theta) \equiv \sin(\pi/2 - \theta)$ (b) $\sin(-\theta) \equiv -\sin\theta$

(c) $\cos(\pi/2 - \theta) \equiv -\cos(\pi/2 + \theta)$ (d) $\cos(-\theta) \equiv \cos\theta$

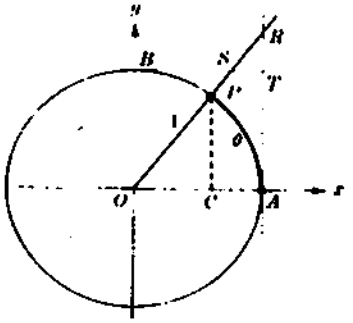
(e) $\cos\theta \equiv \sin(\pi/2 - \theta)$ (f) $\sin\theta \equiv \cos(\pi/2 - \theta)$

.*12 ایک ایسے قوس کی لمبائی کے لیے (ایک اکائی دائرہ میں) جس کے مطابق قوس کی لمبائی $|\theta|$ ہو، θ کی ارقام میں ضابطہ نکالو۔ [اشارہ: شکل 6-6 میں A کے محتصات $(1, 0)$ ہیں اور $P(\theta)$ کے $(\cos\theta, \sin\theta)$۔ اگر ہم فاصلہ کا ضابطہ (مساوات 4-9) استعمال کریں تو حاصل ہوگا

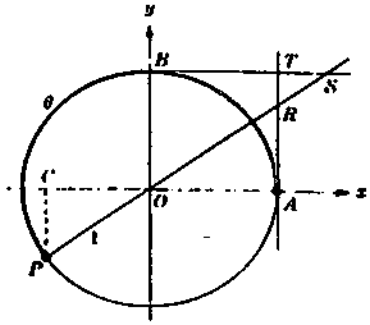
$$AP = \sqrt{(1 - \cos\theta)^2 + \sin^2\theta}$$

$$= \sqrt{1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta},$$

یا وتر کی لمبائی $= \sqrt{2 - 2\cos\theta}$.] (6-18)



شکل 6-9



شکل 6-10

.13 ایک اکائی والے دائرے کے وتر کی لمبائی معلوم کرو اگر مطابق قوس کی لمبائی ہو (a) $\pi/2$

(b) π

.14 شکل 6-9 میں اکائی دائرہ پر θ کے حقیقی عدد کے مطابق ایک مختتم نقطہ $P(\theta)$ ہے۔ نقطہ $A(1, 0)$ پر دائرہ کو مماس کھینچو اور مبدا O سے ایک خط جو $P(\theta)$ سے گزرے۔

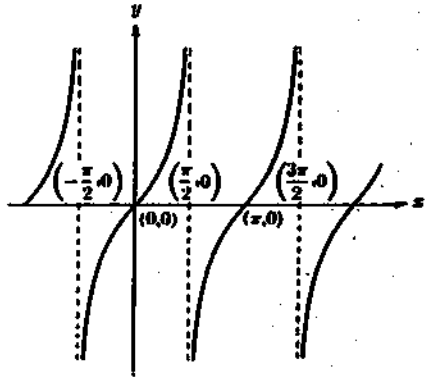
وہ نقطہ جس پر یہ دونوں خطوط قطع کریں R کہلائے گا۔ اسی دائرہ پر $B\ (0, 1)$ سے گزرنے والا مماس کھینچو۔ یہ مماسی خط دونوں خطوط کو، ایک وہ جو O سے کھینچا گیا ہے اور $P(\theta)$ سے گزرتا گزرتا ہے، دوسرا وہ مماسی خط جو دائرہ کو A نقطہ پر کھینچا گیا ہے، قطع کرے گا۔ ان نقاط قاطعہ کو علی الترتیب S اور T لکھو:

(a) اس شکل کے لیے جانچ کرو کہ $\tan\theta$ کی مقدار خطی قطع AR کی لمبائی کے برابر ہے۔

$P(\theta)$ سے ایک خط x۔ محور کے عمودی کھینچو۔ اس پائے عمود کو C لکھو تو مثلث OPC اور مثلث ORA آپس میں مشابہ ہوں گے۔ نتیجہ نکالنے کے لیے ان مثلثین کے مشابہ اضلاع کی نسبت استعمال کرو۔

(b) امتحان کرو کہ $\cot\theta$ کی مقدار خطی قطع BS کی لمبائی کے برابر ہے۔

15. شکل 6-10 اسی طریقے سے کھینچی گئی ہے جیسے شکل 6-9 سوائے اس کے کہ $P(\theta)$ تیسرے ربع میں ہے۔ اسی طریقے سے دوسری دو اشکال اور بناؤ۔ ایک وہ جس میں $P(\theta)$ دوسرے ربع میں ہو اور دوسری وہ جس میں $P(\theta)$ چوتھے ربع میں ہو۔



شکل 6-11

16. سوال 15 کے اشکال، شکل 6-9، شکل 6-10 اور سوال 14 کے نتائج استعمال کرکے اس بات کی جانچ کرو کہ مندرجہ ذیل تعریفیں اصل تعریفوں کے مساوی ہیں:

(a) $\tan\theta$ نقطہ R کا y۔ مختص ہے (b) $\cot\theta$ نقطہ S کا x۔ مختص۔

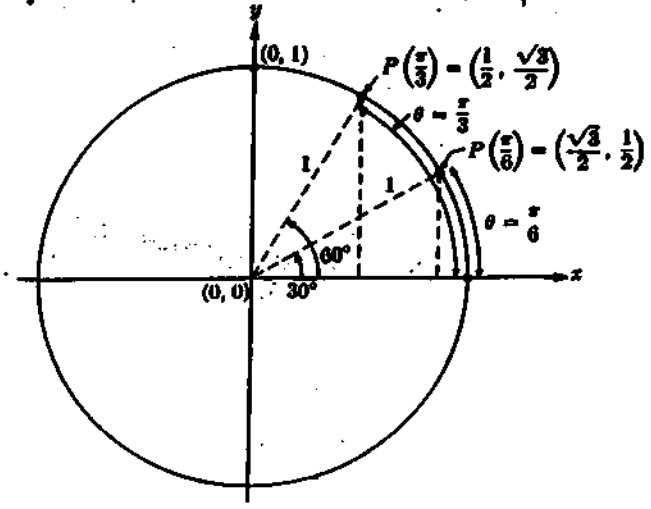
17*. اکائی دائرہ اور سوال 16 میں دی ہوئی $\tan\theta$ کی تعریف استعمال کرکے $y = \tan\theta$ کا گراف کھینچو (دیکھو شکل 6-11)۔

18. شکل 6-11 میں دیے گئے $y = \tan\theta$ کے گراف سے اس تفاعل کی خصوصیات کی فہرست مرتب کرو جو سائن (sine) تفاعل کی مرتب شدہ خصوصیات سے مشابہ ہوں۔

19*. θ کی ایسی قیمتوں کے لیے جن میں کہ $0 < \theta < \pi/2$، ثابت کرو کہ $\sin\theta < \theta < \tan\theta$ [اشارہ: دفعہ 6-4 کے سوال 9 کو دیکھو]

6-4. مخصوص حقیقی اعداد کے لیے دائری تفاعل کی قیمتیں:

دفعہ 6-2 میں ہم نے ذکر کیا تھا کہ کچھ مخصوص اعداد کے لیے دائری تفاعل کی قطعی قیمتیں (یعنی قیمتوں سے مختلف) معلوم کی جاسکتی ہیں۔ ایسی دو قیمتیں $\pi/6$ اور $\pi/3$ ہیں۔ شکل 6-12 میں اگر P_1 اور P_2 اکائی دائرہ کے قوس جس کی لمبائی (1, 0) سے (0, 1) ہے نقاط تثلیث ہوں تو $P_1 = P(\pi/6)$ اور $P_2 = P(\pi/3)$، اگر ہم ہندسۂ مستوی سے یہ یاد کریں کہ $30°$-$60°$ کے قائم الزاویہ مثلث میں وتر کی لمبائی چھوٹی ساق سے دوگنی ہوتی ہے تو یہ صاف ظاہر



شکل 6-12

ہے کہ $P(\pi/6) = (\sqrt{3}/2, \frac{1}{2})$ جبکہ $P(\pi/3) = (\frac{1}{2}, \sqrt{3}/2)$ (کیوں کہ شکل میں دکھائے گئے کسی بھی قائم الزاویہ مثلث میں وتر کی لمبائی اگر 1 ہو تو چھوٹی ساق کی لمبائی $\frac{1}{2}$ ہوگی اور مسئلہ فیثاغورثی سے تیسری ساق کی لمبائی $\sqrt{3}/2$ ہوگی)

اس لیے

$$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, \qquad \cot \frac{\pi}{6} = \sqrt{3},$$

$$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \sec \frac{\pi}{6} = \frac{2}{\sqrt{3}},$$

$$\tan \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad \csc \frac{\pi}{6} = 2.$$

اسی طرح $P(\pi/3)$ استعمال کر کے ہمیں حاصل ہوگا

$$\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \cot \frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \qquad \sec \frac{\pi}{3} = 2,$$

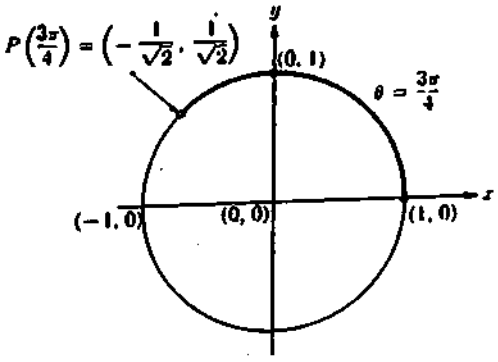
$$\tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}, \qquad \csc \frac{\pi}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

ایک اکائی دائرہ میں $30°$-$60°$ قائم الزاویہ مثلث کو ایسے مناسب طریقے سے بنا کر جس میں وتر کا ایک سرا مرکز پر ہو θ کی غیر ربعی قیمت کے لیے جس کا ناپ $k(\pi/6)$ ہو جہاں $k \in I$ دیے ہوئے ختم نقطہ کے مختصات معلوم کیے جا سکتے ہیں۔ ان مختصات سے ایسے کسی حقیقی عدد کے دائری تفاعل کی قیمتیں نتیجے کے طور پر لگائی جا سکتی ہیں

ایک دوسری مخصوص قیمت $\pi/4$ کی کوئی بھی طاق ضعف ہے مثلاً اگر $\theta = 3\pi/4$ تو $P(3\pi/4)$ اُس قوس کا جو $(0, 1)$ سے $(-1, 0)$ تک ہے نقطۂ تنصیف ہوگا (دیکھو شکل 13-6)۔ یہ نقطہ اکائی دائرہ پر ہے اور اس کے x اور y مختص ناپ میں برابر ہیں اور ساتھ ہی $y = -x$، اس لیے بدل رکھ کر ہمیں حاصل ہوگا

$$x^2 + x^2 = 2x^2 = 1 \text{ یا } x = \pm 1/\sqrt{2}$$

کیوں کہ $P(3\pi/4)$ دوسرے ربع میں ہے اس لیے ہم علامت نفی اخذ کریں گے تاکہ $x = -1/\sqrt{2}$



شکل 6-13

اس لیے :

$$\sin\frac{3\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cot\frac{3\pi}{4} = -1,$$

$$\cos\frac{3\pi}{4} = \frac{-1}{\sqrt{2}}, \quad \sec\frac{3\pi}{4} = -\sqrt{2},$$

$$\tan\frac{3\pi}{4} = -1, \quad \csc\frac{3\pi}{4} = \sqrt{2}.$$

$\pi/4$ کے کسی دوسرے طاق ضعف کے دائری تفاعل کی قیمتیں اسی قسم کے طریقوں سے نکالی جا سکتی ہیں۔

سوالات

اکائی دائرہ میں θ کو ہر ایک حقیقی عدد کے لیے دکھاتے ہوئے شکل کھینچو اور مندرجہ ذیل کی جانچ ٹھیک ٹھیک قیمتیں نکال کر کرو :

.1 (a) $\sin \pi/3 = \cos \pi/6$
(b) $\sin \pi/6 = \cos \pi/3$

.2 (a) $\sin \pi/6 = \sin 5\pi/6$
(b) $\cos 5\pi/6 = -\cos \pi/6$

.3 (a) $\tan \pi/4 = \tan 5\pi/4$
(b) $\cot 3\pi/4 = \cot 7\pi/4$

.4 (a) $\sec 11\pi/6 = \sec \pi/6$
(b) $\csc 2\pi/3 = -\csc 4\pi/3$

.5 (a) $\sin 2\pi/3 = \sin (4\pi/3)$
(b) $\cos 7\pi/6 = \cos (-5\pi/6)$

.6 (a) $\sin \pi/3 = 2 \sin \pi/6 \cos \pi/6$
(b) $\sin \pi/2 = 2 \sin \pi/4 \cos \pi/4$

.7 (a) $\sin\frac{\pi}{6} = \sqrt{\frac{1 - \cos \pi/3}{2}}$

(b) $\cos\frac{\pi}{6} = \sqrt{\frac{1 + \cos \pi/3}{2}}$

$$\tan\frac{\pi}{6} = \frac{1-\cos\pi/3}{\sin\pi/3} = \frac{\sin\pi/3}{1+\cos\pi/3} \quad .8$$

$$\cos\frac{\pi}{3} = \cos^2\frac{\pi}{6} - \sin^2\frac{\pi}{6} = 2\cos^2\frac{\pi}{6} - 1 \quad .9$$

مندرجہ ذیل کی ٹھیک ٹھیک عددی (شماری) قیمتیں نکالو:

(a) $\sin^2\frac{\pi}{6} + \cos^2\frac{\pi}{6}$ (b) $\sin^2 0 + \cos^2 0$ .10

(a) $\sec^2\frac{\pi}{3} - \tan^2\frac{\pi}{3}$ (b) $\sec^2\frac{5\pi}{4} - \tan^2\frac{5\pi}{4}$ .11

(a) $\csc^2\frac{7\pi}{4} - \cot^2\frac{7\pi}{4}$ (b) $\csc^2\frac{3\pi}{4} - \cot^2\frac{3\pi}{4}$ .12

$$\sin\frac{2\pi}{3} + \cos\frac{7\pi}{6} + \tan\frac{5\pi}{3} \quad .13$$

$$\tan\frac{5\pi}{4} + \cot\frac{7\pi}{4} - \sec\frac{5\pi}{6} \quad .14$$

$$\csc\frac{5\pi}{6} - \cos\frac{4\pi}{3} + \tan\frac{2\pi}{3} \quad .15$$

$$\sin\frac{2\pi}{3}\cos\frac{5\pi}{6} + \cos\frac{2\pi}{3}\sin\frac{5\pi}{6} \quad .16$$

$$\cos\frac{3\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{3\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4} \quad .17$$

$$\sin\frac{11\pi}{6}\cos\frac{\pi}{3}\tan\frac{3\pi}{4} \quad .18$$

$$\left(\cos\frac{11\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{3}\right)\left(\tan\frac{\pi}{6} + \cot\frac{4\pi}{3}\right) \quad .19$$

$$\left(\tan\frac{5\pi}{4} + \sin\frac{3\pi}{2}\right)\cos\frac{5\pi}{6} \quad .20$$

مندرجہ ذیل میں ہر ایک مساوات کو مطمئن کرنے والی θ کی وہ تمام قیمتیں نکالو جو صفر اور 2π کے درمیان ہوں:

.21

$\cos\theta = -\frac{1}{2}$ .22 $\sin\theta = \frac{1}{2}$ .23

$\sin\theta = -\sqrt{3}/2$ .24 $\tan\theta = 1/\sqrt{3}$ .25

$\cos\theta = -\sqrt{2}/2$ .26 $\tan\theta = -1$ .27

27. $\sin\theta = \sqrt{2}/2$ 28. $\sec\theta = 2$
29. $\cot\theta = -\sqrt{3}$ 30. $\csc\theta = 2/\sqrt{3}$

31. اکائی دائرہ میں θ کی ہر ایک مندرجہ ذیل قیمت کے لیے شکل کھینچ کر ہر ایک قیمت کے تمام چھ دائری تفاعل کے جدول بناؤ (بائیں سے دائیں) :

$0, \pi/6, \pi/4, \pi/3, \pi/2, 2\pi/3, 3\pi/4, 5\pi/6, \pi, 7\pi/6, 5\pi/4,$
$4\pi/3, 3\pi/2, 5\pi/3, 7\pi/4, 11\pi/6, 2\pi.$

32. مساوات (6-18) کو استعمال کرکے ایک اکائی دائرہ میں وتر کی لمبائی θ کی مندرجہ ذیل مطابق قیمتوں کے لیے نکالو :

(a) $\pi/6$ (b) $\pi/3$ (c) $2\pi/3$

6-5. $\theta = \pi/5$ کے لیے دائری تفاعل کی ٹھیک ٹھیک قیمتیں :

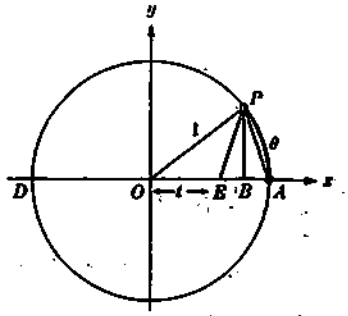
ایک اور مخصوص قیمت باعث دلچسپی ہے۔ حالانکہ $\pi/5$ کے لیے ذرا پیچیدہ عمل کی ضرورت ہے لیکن اس عدد کے دائری تفاعل کی ٹھیک ٹھیک قیمتیں ہم نکال سکتے ہیں اور اس طرح ہم تمام مندرجہ ذیل کے تفاعل کی ٹھیک ٹھیک قیمتیں نکال سکتے ہیں :

$\pi, \pi/2, \pi/3, \pi/4, \pi/5$ & $\pi/6$

اب ایک اکائی دائرہ لو جس کا مرکز O اور نصف قطر OA ہو (دیکھو شکل 6-14)۔ نصف قطر OA پر نقطہ E کا ایسا مقام معلوم کرو تاکہ :

$$\frac{OE^{\bullet}\ \text{لمبائی}}{EA\ \text{لمبائی}} = \frac{OA\ \text{لمبائی}}{OE\ \text{لمبائی}}$$

• یہ تعین مقام پیمانہ اور پرکار کی مدد سے ممکن ہے اور لازمی طور پر ویسا ہی جیسا کہ منتظم مخمس کے عمل میں استعمال کیا جاتا ہے۔



شکل 6-14

لمبائی OE کو t سے تعبیر کرکے ہمیں یہ نسبت حاصل ہوگی

$$\frac{1}{t} = \frac{t}{1-t} \qquad (6\text{-}19)^*$$

اس دو درجی مساوات کو t کی مثبت قیمتوں کے لیے حل کرکے ہمیں معلوم ہوگا کہ $t = (\sqrt{5} - 1)/2$

P کا تعین مقام اس طرح کرو کہ وتر AP کی لمبائی t کے برابر ہو۔ تب مثلث OPA اور AEP متشابہ ہوں گے اور اس طرح مثلث AEP مساوی الساقین تاکہ PE کی لمبائی t کے

---

* مساوات (6-19) میں تعریف کی گئی نسبت یونانی ریاضی دانوں کے زمانے سے ہی زیرِ غور رہی ہے اور زرّیں تراش (golden section) سے موسوم ہے۔ اس مضمون پر بہت کچھ لکھا جا چکا ہے جو کہ طالب علم کے لیے باعث دلچسپی ہوگا مثلاً

(1) ایچ۔ وی۔ باراوِل (H. V. Barravalle) کی "دی جیومیٹری آف دی پینٹاگون اینڈ دی گولڈن سیکشن" میتھیمیٹکس ٹیچر۔ جنوری 1948

(2) ڈبلیو۔ ڈبلیو۔ راؤز بال، میتھیمیٹیکل ری کریشنس اینڈ ایسیز۔ نظر ثانی کیا ہوا از ایچ۔ ایس۔ ایم۔ کاکزیٹر، طباعت یازدہم، لندن۔ میکمیلن اینڈ کمپنی لمٹیڈ، 1940

(3) آر۔ کورانٹ اور ایچ۔ رابنس کی "وہاٹ از میتھیمیٹکس؟ نیویارک آکسفورڈ یونیورسٹی پریس 1941

(4) دی ایلیمنٹس آف ڈائنمک سمٹری، از جے۔ ہیمبرج، نیویارک، برینٹینو کار 1926

(5) بی کوئسٹ آف گریکس، از ٹو بیاز دانسزگ، 1955

برابر ہو ورنہ مثلث OEP بھی مساوی الساقین ہو۔ اس سے یہ بالواسطہ ثابت ہوتا ہے کہ زاویہ OAP دوگنا ہے زاویہ POA کے (دیکھو سوال 3، 4، 5) کیوں کہ $\angle OAP$ کا ناپ ہے $\frac{1}{2}\overset{\frown}{PD}$*، $\angle POA$ کا ناپ ہوگا $\frac{1}{4}\overset{\frown}{PD}$، $\overset{\frown}{PA}$ کا ناپ بھی ہوگا $\angle POA$۔ اس طرح $\overset{\frown}{PD}$ کی لمبائی ہوگی $|\overset{\frown}{PD}| = 4|\overset{\frown}{AP}|$ لیکن $|\overset{\frown}{PD}| + |\overset{\frown}{AP}| = \pi$ اس لیے بالواسطہ نتیجے کے طور پر

$$|\overset{\frown}{AP}| = \pi/5$$

بہ لحاظ اس کے کہ PB عمود ہے OA کو نقطہ B پر، OB اور PB کی ٹھیک ٹھیک لمبائی آسانی سے معلوم کر سکتے ہیں یعنی P کے x اور y مختص $P(\pi/5) =$ یا $\pi/5$ کے cos اور sine۔ EA کی لمبائی ہوگی

$$1 - t = 1 - \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{3-\sqrt{5}}{2};$$

پس EB کی لمبائی ہوگی $(3 - \sqrt{5})/4$ اس لیے OB کی لمبائی ہوگی

$$OB = \frac{\sqrt{5}-1}{2} + \frac{3-\sqrt{5}}{4} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}.$$

قائم الزاویہ مثلث OPB میں بھی

$$(PB \text{ کی لمبائی})^2 = 1 - \left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2 = \frac{5-\sqrt{5}}{8}.$$

اس لیے

$$\sin\frac{\pi}{5} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}, \qquad \cos\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}. \tag{6-20}$$

اگر دوسرے تفاعل کی عددی (شماری) قیمتیں نکالنی ہوں تو وہ بھی معلوم کی جا سکتی ہیں۔

سوالات

مندرجہ ذیل کو بہ حوالہ شکل 6-14 تفصیلی طور پر ثابت کرو:

1. مثلث AEP مساوی الساقین ہے۔

---

* دو درجی مساوات کے حل کو دفعہ 4-7 میں زیر بحث لایا گیا ہے (دیکھو سوال 3 دوسری جدول)

† ہندسۂ مستوی کے اُس مسئلہ کو استعمال کیا جاتا ہے جس میں بیان کیا گیا ہے کہ دائرے کے اندر بنایا گیا زاویے کا ناپ قطع کیے گئے قوس کے نصف کے برابر ہوتا ہے۔

2. مثلث OEP مساوی الساقین ہے۔

3. زاویہ AOP ، OPE اور EPA برابر ہیں۔

4. زاویہ $\angle OAP$ = زاویہ $\angle OPA$

5. زاویہ $\angle POA$ = زاویہ $\angle PAO$

6. مساوات (6–18) کو استعمال کر کے ایک اکائی دائرہ میں وتر کی لمبائی معلوم کرو اگر θ کی مطابق قیمت $\pi/5$ ہے۔ اس قیمت کا π کی قیمت سے کیا موازنہ ہے؟

6–6 . بُنیادی دائری تفاعل متماثلہ :

گزشتہ چند دفعات میں ہم نے مختلف دائری تفاعل کے درمیان کچھ مفید تعلّقات (رشتوں) پر غور کیا تھا۔ ان میں سے آٹھ وہ ہیں جنھیں بُنیادی دائری تفاعل متماثلہ کہتے ہیں اور ان سے دوسرے آسان متماثلات ثابت کیے جاسکتے ہیں۔ یہ مشتمل ہیں تین مقلوب تعلّقات پر مساوات (6–11) ، (6–12) اور (6–13) ، خاص اور خاص التمام تعلّقات ، مساوات (6–4) اور (6–14) اور فیثاغورث کے تعلّقات (6–15) ، (6–16) ، (6–17)

ان تعلقات کے استعمال سے تمام دائری تفاعلوں کو ایک ہی دائری تفاعل کی ارقام میں ظاہر کرسکتے ہیں۔ مندرجہ ذیل مثال پر غور کرو۔

مثال 1 : θ کے سب چھ دائری تفاعلوں کو $\sin\theta$ میں ظاہر کرو۔

حل : درحقیقت $\sin\theta = \sin\theta$ (از مساوات (6–15))،

$$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta,$$

اور اس لیے

$$\cos\theta = \pm\sqrt{1 - \sin^2\theta},$$

جہاں علامت کا چُناؤ اس بات پر منحصر ہوگا کہ θ کس ربع میں ہے۔ اس سے اور مساوات (6–4) سے

$$\tan\theta = \pm\frac{\sin\theta}{\sqrt{1 - \sin^2\theta}}.$$

یہ مقلوب تعلّقات مساوات (6–11) سے (6–13) تک دوسرے تین تفاعل کے لیے استعمال ہوتے ہیں :

$$\csc\theta \equiv \frac{1}{\sin\theta},$$

$$\sec\theta \equiv \pm \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\theta}},$$

$$\cot\theta \equiv \pm \frac{\sqrt{1-\sin^2\theta}}{\sin\theta}.$$

ایک دوسری مثال کسی دائری تفاعل متماثلہ کو بنیادی متماثلہ کی امداد سے ثابت کرنے کے طریقے کو واضح کر دے گا۔ ہر قدم کی وجہ بتاؤ۔

مثال 2 : بائیں ممبر کو دائیں ممبر کی شکل میں تبدیل کر کے ثابت کرو کہ :

$$\frac{1}{\sin\theta} - \sin\theta \equiv \cot\theta\cos\theta.$$

حل :

$$\frac{1}{\sin\theta} - \sin\theta \equiv \frac{1-\sin^2\theta}{\sin\theta} \equiv \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta} \equiv \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\cos\theta \equiv \cot\theta\cos\theta.$$

بدقسمتی سے متماثلہ کو ثابت کرنے کے لیے کوئی یکساں طریقہ اختیار نہیں کیا جا سکتا۔ اجزاءِ ضربی نکالنا اور کسور کو جوڑنا یا دوسرے جبریہ اختصار اکثر مفید ہوتے ہیں لیکن جہاں تک ممکن ہو سکے علامتِ جذر کے استعمال سے احتراز کرنا چاہیے۔ اگر کبھی تذبذب ہو تو یہ مفید ہوگا کہ تمام تفاعل سائن اور کوسائن میں ظاہر کر کے حل کر لیے جائیں۔ متماثلہ کو مکمل طور سے تحویل کرنے سے اس طرح ثابت کیا جا سکتا ہے کہ :

(1) بائیں ممبر کو ٹھیک ٹھیک دائیں ممبر کی ارقام میں تبدیل کر دیا جائے

(2) دائیں کو ٹھیک ٹھیک بائیں کی شکل میں

(3) طرفین کو علاحدہ علاحدہ ایک ہی شکل میں۔

مندرجہ ذیل مثالوں میں ہر قدم کے لیے وجہ بتاؤ۔

مثال 3 : طرفین کو علاحدہ علاحدہ ایک ہی شکل میں تحویل کر کے ثابت کرو کہ

$$\tan\theta\sin\theta \equiv \sec\theta - \cos\theta$$

حل :

$$\tan\theta \sin\theta \quad \sec\theta - \cos\theta$$

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\sin\theta \quad \frac{1}{\cos\theta} - \cos\theta$$

$$\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} \quad \frac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta}$$

$$\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} \equiv \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}.$$

مثال 4 : ذیل کی متماثلہ ثابت کرو :

$$\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta} \equiv \frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}.$$

حل :

$$\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta} \equiv \frac{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)}{\cos\theta(1+\sin\theta)}$$

$$\equiv \frac{1-\sin^2\theta}{\cos\theta(1+\sin\theta)}$$

$$\equiv \frac{\cos^2\theta}{\cos\theta(1+\sin\theta)}$$

$$\equiv \frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}.$$

مندرجہ ذیل قسم کے سوالات کی مساوات متماثلہ کو ثابت کرنا سیکھنے کی تین مختلف وجوہ ہیں۔ ایسے تعلقات کو ثابت کرنے اور اُن سے کام کرنے میں ہم دائری تفاعل کی تعریفوں اور ضابطوں پر زیادہ آسانی سے دسترس حاصل کر سکتے ہیں۔ کچھ مخصوص جبریائی مسئلوں کی بحث کے اکتساب یا نظرثانی کے ذریعے از روئے علم ریاضی ہم پختہ کار بن سکتے ہیں۔ اہم ترین بات بہرحال یہ ہے کہ بہت سی ایسی مساوات متماثلہ زیادہ اعلا ریاضی اور عملی اطلاق میں اکثر استعمال ہوتی ہیں۔

سوالات

بُنیادی متماثلہ کے ذریعے مندرجہ ذیل میں سے ہر ایک کو صرف $\sin\theta$ کی ارقام میں ظاہر کرو :

1. $\csc\theta$
2. $\cos^2\theta$
3. $\cos\theta$
4. $\sec\theta$
5. $\tan\theta$
6. $\cot\theta$

بذریعۂ بنیادی متماثلہ مندرجہ ذیل میں سے ہر ایک کو صرف $\cos\theta$ کی ارکان میں ظاہر کرو :

7. $\sec\theta$ 8. $\sin^2\theta$ 9. $\sin\theta$
10. $\csc\theta$ 11. $\tan\theta$ 12. $\cot\theta$

13. θ کے سب چھ تفاعل $\tan\theta$ کے ارکان میں ظاہر کرو :

[اشارہ : $\sec^2\theta \equiv 1 + \tan^2\theta$ متماثلہ کو استعمال کرو۔]

14. $(\sin\theta + \tan\theta)/(\sec\theta + 1)$ کو صرف $\sin\theta$ کی ارقام میں ظاہر کرو۔

15. $(\tan\theta + \cot\theta)/(\sec\theta \sin\theta)$ کو صرف $\cos\theta$ کی ارقام میں ظاہر کرو۔

مندرجہ ذیل متماثلہ ثابت کرو :

16. $\tan\theta + \cot\theta \equiv \sec\theta \csc\theta$

17. $1 - 2\sin^2\theta \equiv 2\cos^2\theta - 1$

18. $\sin\theta \cos\theta \sec\theta \csc\theta \equiv 1$

19. $\dfrac{1}{1+\sin\theta} + \dfrac{1}{1-\sin\theta} \equiv 2\sec^2\theta$

20. $\cos\theta + \tan\theta \sin\theta \equiv \sec\theta$

21. $\cos^4\theta - \sin^4\theta \equiv \cos^2\theta - \sin^2\theta$

22. $\dfrac{\tan\theta - \cot\theta}{\tan\theta + \cot\theta} \equiv 2\sin^2\theta - 1$

23. $\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta} + \dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta} \equiv 2\csc\theta$

24. $\dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta} \equiv \dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$

25. $\cos^2\theta - \sin^2\theta \equiv \dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$

26. $\cot\theta + \tan\theta \equiv \cot\theta \sec^2\theta$

27. $\dfrac{1+\tan^2\theta}{\tan^2\theta} \equiv \csc^2\theta$

28. $(\csc\theta - \cot\theta)^2 \equiv \dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$

29. $(\sec\theta - \tan\theta)^2 \equiv \dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}$

30. $(\cos\theta - \sin\theta)^2 + 2\sin\theta\cos\theta \equiv 1$

31. $\dfrac{\cot^2\theta - 1}{1+\cot^2\theta} \equiv 2\cos^2\theta - 1$

32. $\dfrac{1+\csc\theta}{\csc\theta - 1} \equiv \dfrac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}$

33. $\dfrac{\tan\theta}{1-\cot\theta} + \dfrac{\cot\theta}{1-\tan\theta} \equiv 1 + \tan\theta + \cot\theta$

34. $\dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} \equiv 1 - 2\sin^2\theta$

35. $\frac{2\sin^2\theta - 1}{\sin\theta\cos\theta} \equiv \tan\theta - \cot\theta$

36. $\sec\theta\csc\theta - 2\cos\theta\csc\theta \equiv \tan\theta - \cot\theta$

37. $\frac{\cos\theta - \sin\theta}{\cos\theta + \sin\theta} \equiv \frac{\cot\theta - 1}{\cot\theta + 1}$

38. $\frac{\sin\theta}{\csc\theta - \cot\theta} \equiv 1 + \cos\theta$

39. $\frac{(\cos^2\theta - \sin^2\theta)^2}{\cos^4\theta - \sin^4\theta} \equiv 1 - 2\sin^2\theta$

40. $\frac{\sec^2\theta}{1 + \sin\theta} \equiv \frac{\sec^2\theta - \sec\theta\tan\theta}{\cos^2\theta}$

41. $1 + \cot\theta \equiv \frac{(1 - \cot^2\theta)\sin\theta}{\sin\theta - \cos\theta}$

42. $\frac{\sec\theta + \tan\theta}{\cos\theta - \tan\theta - \sec\theta} \equiv -\csc\theta$

43. $\sin\theta + \cos\theta + \frac{\sin\theta}{\cot\theta} \equiv \sec\theta + \csc\theta - \frac{\cos\theta}{\tan\theta}$

44. $\frac{\sin\theta\cos\theta + \cos\theta\sin\theta}{\cos\theta\cos\theta - \sin\theta\sin\theta} \equiv \frac{\tan\theta + \tan\theta}{1 - \tan\theta\tan\theta}$

6-7 $\cos(\alpha - \beta)$ کے ضابطہ کا ثبوت :

اب ہم ایسی مناسب جگہ پر ہیں کہ دو ضمنی مروّجہ قسم کے دائری تفاعل تعلقات پر بحث کر سکتے ہیں۔ اب تک کے مطالعے میں آئے ہوئے تفاعلوں سے وہ اس بات میں مختلف ہیں کہ ان میں ایک سے زیادہ عدد کے تفاعل شامل ہیں۔ $\pi/2$ کا کوئی ضعف بہ حیثیت صرف θ کے تفاعل کے جمع (+) θ کے دائری تفاعل کے اظہار کا مسئلہ (جیسا کہ دفعہ 6-2 کی مثال 3 میں) ہی مطلق ایسی صورت نہیں ہے جس سے ہمیں بار بار دوچار ہونا پڑے بلکہ اکثر دو اعداد کے دائری تفاعل پر ہم بحث کرنا چاہتے ہیں۔ ہم دیکھیں گے کہ ایسے تفاعل کا اظہار ہر عدد کے علاحدہ علاحدہ تفاعل کے ارکان میں کیا جا سکتا ہے۔ مخصوص طور پر ہم جانتے ہیں کہ $\sin(\pi/4 + \pi/3)$ برابر نہیں ہے $\sin\pi/4 + \sin\pi/3$ کے کیوں کہ آخرالذکر برابر ہے $(1/\sqrt{2} + \sqrt{3}/2)$ کے (قیمت 1 سے بڑی ہے) جو کہ 'سائن' تفاعل کے لیے ناممکن قیمت ہے پھر بھی $\sin(\pi/4 + \pi/3)$ کا اظہار $\pi/4$ اور $\pi/3$ کے تفاعل کے ارکان میں کیا جا سکتا ہے اور اس کی قیمت آسانی سے نکالی جا سکتی ہے۔ ہمیں یہ آسان معلوم ہوتا ہے کہ ہم پہلے $\cos(\alpha - \beta)$ کے لیے ایک ضابطے کی تکمیل کریں جو کہ واقعی طور پر مثلثات کے بنیادی ضابطوں میں سے ایک ہے۔

مسئلہ 6-3 : کسی بھی α، β کے لیے جہاں $\alpha, \beta \in R$

$$\cos(\alpha - \beta) \equiv \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta. \qquad (6\text{-}21)$$

ثبوت : جیسا کہ شکل 6-15 میں ہے، مان لو کہ α اور β دو کوئی حقیقی اعداد ہیں اور اُن کے مطابق $P(\alpha)$ اور $P(\beta)$ اکائی دائرہ پر مختتم نقطہ ہیں۔ کیوں کہ $P(\alpha)$ کے مختصات ہیں $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ اور $P(\beta)$ کے مختصات ہیں $(\cos\beta, \sin\beta)$ ان دونوں نقاط کے درمیان کا فاصلہ d (مساوات (4-9)) سے ہوگا

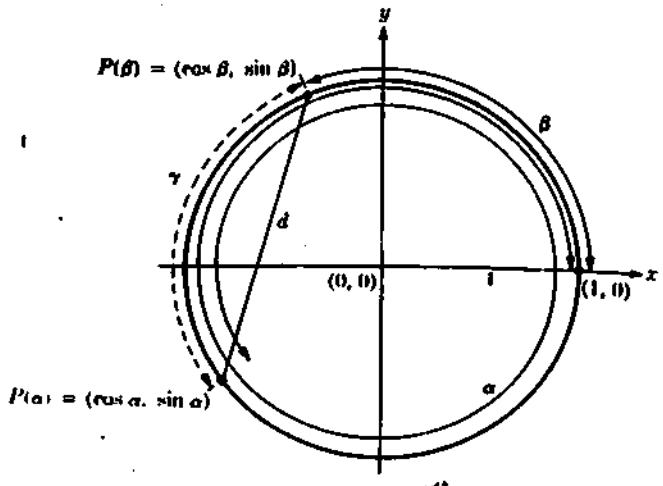
$$d = \sqrt{(\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2}$$

$$= \sqrt{\cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta + \sin^2\alpha - 2\sin\alpha\sin\beta + \sin^2\beta}$$

$$= \sqrt{2 - 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)}.$$

از روئے مساوات (6-18) کسی وتری لمبائی کا ضابطہ جس کے مطابق قوس کی لمبائی اکائی دائرہ میں $|\theta|$ ہے ہمیں d کے لیے ایک دوسرا ضابطہ حاصل ہوتا ہے کیوں کہ d اُس وتر کی لمبائی کی نمائندگی کرتا ہے جس کا ملتزم عدد γ ہے جہاں کہ

$$\gamma = (\alpha - \beta) \pm (2\pi \text{ کا کوئی ضعف صحیح})$$



شکل 6-15

$$d = \sqrt{2 - 2\cos\gamma}$$

$$= \sqrt{2 - 2\cos(\alpha - \beta)}.$$

d کے ان دو ضابطوں کو برابر رکھ کر حل کرنے سے ہمیں حاصل ہوگا

$$\cos(\alpha - \beta) \equiv \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta,$$

جس کو ثابت کرنا تھا۔ یہ بات بہت اہم ہے کہ یہ ضابطہ $(\alpha - \beta)$ کے 'کوسائن' کو α اور β خود کی ہی تفاعلی قیمتوں کے ارکان میں اظہار کرتا ہے اور α، β کی کسی بھی قیمت کے لیے صحیح ہے۔ اس حیثیت سے اس ضابطہ کی اہمیت بڑھ جاتی ہے جیسا کہ اس باب کے باقی دفعات میں ظاہر ہوگا۔

6-8 مخصوص تحویلی ضابطہ : جیسا کہ شاید اب تک کسی قدر صاف ظاہر ہوگیا ہوگا کہ کسی بھی حقیقی عدد کے کسی بھی دائری تفاعل کو بہ حیثیت ایک ایسے حقیقی عدد کے تفاعل کے ظاہر کر سکتے ہیں جو صفر اور $\pi/4$ کے درمیان ہو۔ ان کو ثابت کیا جاتا ہے ایسے مقررہ تحویلی ضابطوں کے استعمال سے جو مساوات (6-21) سے α یا β کی مخصوص قیمتوں کے لیے حاصل کیے گئے ہوں۔

اگر ہم مساوات (6-21) میں α کو $\pi/2$ سے تبدیل کر دیں تو ہمیں حاصل ہوگا

$$\cos(\pi/2 - \beta) \equiv \cos\pi/2\cos\beta + \sin\pi/2\sin\beta.$$

کیوں کہ $\cos\pi/2 = 0$ اور $\sin\pi/2 = 1$ ہمیں حاصل ہوگا

$$\boxed{\cos(\pi/2 - \beta) \equiv \sin\beta.} \qquad (6\text{-}22)$$

اس بات پر دوبارہ زور دیا جانا چاہیے کہ مساوات (6-22) جیسے رشتے تمام حقیقی اعداد α یا β کے لیے سچ ہیں اور مطالعہ کرنے والے کو اُن کی پابندی اُسی طرح کرنا چاہیے جیسے کہ ضابطے نکالے گئے ہیں۔

اگر ہم مساوات (6-22) میں β کو $\beta - \pi/2$ سے تبدیل کر دیں تو تعلق

$$\cos[\pi/2 - (\pi/2 - \beta)] \equiv \sin(\pi/2 - \beta)$$

تمام β کے لیے صحیح ہے۔

مختصر کرنے سے ہمیں حاصل ہوگا

$$\boxed{\sin(\pi/2 - \beta) \equiv \cos\beta.} \qquad (6\text{-}23)$$

مساوات (6-22) اور (6-23) سے ہمیں فوراً ہی حاصل ہوگا

$$\boxed{\tan(\pi/2 - \beta) \equiv \cot\beta,} \qquad (6\text{-}24)$$

اور

$$\boxed{\cot(\pi/2 - \beta) \equiv \tan\beta.} \qquad (6\text{-}25)$$

اگرچہ یہ چاروں ضابطے تمام قیمتوں کے لیے سچ ہیں پھر بھی یہ مخصوص طور پر ایسے عدد کے تفاعل قیمتوں کے تخمینہ میں مفید ہیں جو $\pi/2$ سے کم ہوں۔

تمثیل 1 : (a)

$$\sin 1 = \cos(\pi/2 - 1) \approx \text{تقریباً } \cos(1.5708 - 1) = \cos(\quad)$$

$$\tan \pi/3 = \cot \pi/6 \qquad (b)$$

ہم نے یہ نوٹ کیا ہے کہ دائری تفاعل کے نام ایسے ہیں کہ ان کے جوڑے بنائے جا سکتے ہیں۔ ہر جوڑے میں ایک تفاعل دوسرے کا ہم تفاعل ہے، sine ہم تفاعل ہے cosine کا اور کوسائن ہم تفاعل ہے سائن کا وغیرہ۔ مندرجہ بالا چاروں تعلقات کو اس طرح بیان کیا جا سکتا ہے

کسی بھی عدد کا ہم تفاعل برابر ہے $\pi/2$ عدد کے تفاعل کے۔

کسی بھی عدد اور اُس کے نفی کے تفاعل کے درمیان تعلق بہت مفید ہے اور یہی مساوات (6-21) سے ثابت بھی ہوتا ہے، $\alpha = 0$ مان کر

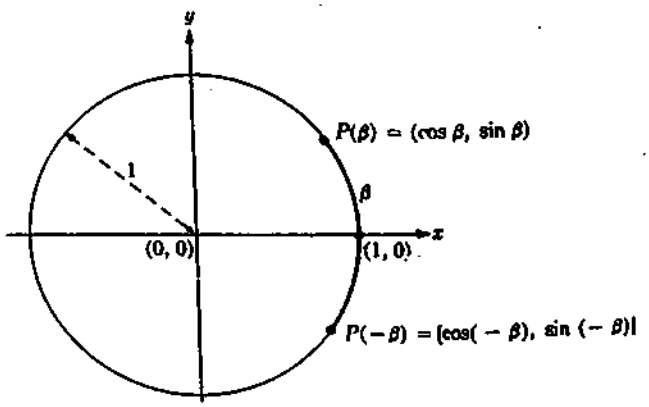
$$\cos(0 - \beta) \equiv \cos 0 \cos\beta + \sin 0 \sin\beta$$

کیوں کہ $\cos 0 = 1$ اور $\sin 0 = 0$

$$\boxed{\cos(-\beta) \equiv \cos\beta.} \qquad (6\text{-}26)$$

مزید اگر مساوات (6-22) میں $(-\beta)$ کو β سے تبدیل کریں تو

$$\cos(\pi/2 + \beta) \equiv \sin(-\beta)$$



شکل 6-16

کیوں کہ

$$\pi/2 + \beta = \beta - (-\pi/2),$$

$$\begin{aligned}\sin(-\beta) &= \cos[\beta - (-\pi/2)] \\ &= \cos\beta\cos(-\pi/2) + \sin\beta\sin(-\pi/2) \\ &= (\cos\beta)(0) + (\sin\beta)(-1),\end{aligned}$$

یا

$$\boxed{\sin(-\beta) = -\sin\beta.} \qquad (6\text{-}27)$$

مساوات (6-26) اور (6-27) سے براہ راست یہ ثابت ہوتا ہے کہ

$$\tan(-\beta) = -\tan\beta. \qquad (6\text{-}28)$$

تمثیل 2 :

(a) $\sin(-\pi/4) = -\sin\pi/4.$

(b) $\tan(-\pi/3) = -\tan\pi/3.$

(c) $\cos(-\pi/6) = \cos\pi/6.$

شکل (6-16) میں مساوات (6-26) اور مساوات (6-27) کی اہمیت کو نوٹ کرو۔

6-9 . عام جمعی ضابطہ : اب ہمیں دو اعداد کے جوڑ یا نفی کے (sine) ، (cosine) یا مماس کے عام ضابطے نکالنے چاہئیں۔ کیوں کہ

$$\begin{aligned}\cos(\alpha + \beta) &= \cos[\alpha - (-\beta)] \\ &= \cos\alpha\cos(-\beta) + \sin\alpha\sin(-\beta).\end{aligned}$$

ہمیں حاصل ہوا

$$\boxed{\cos(\alpha + \beta) \equiv \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.} \qquad (6\text{–}29)$$

نیز

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &\equiv \cos[\pi/2 - (\alpha + \beta)] \\ &\equiv \cos[(\pi/2 - \alpha) - \beta] \\ &\equiv \cos(\pi/2 - \alpha)\cos\beta + \sin(\pi/2 - \alpha)\sin\beta,\end{aligned}$$

اور ہمیں حاصل ہوگا

$$\boxed{\sin(\alpha + \beta) \equiv \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.} \qquad (6\text{–}30)$$

مساوات (6–30) میں β کو $-\beta$ سے تبدیل کرکے ہمیں فوراً معلوم ہوگا کہ

$$\boxed{\sin(\alpha - \beta) \equiv \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.} \qquad (6\text{–}31)$$

مماسی ضابطہ

$$\boxed{\tan(\alpha + \beta) \equiv \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}} \qquad (6\text{–}32)$$

اور

$$\boxed{\tan(\alpha - \beta) \equiv \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta},} \qquad (6\text{–}33)$$

اس حقیقت کا نتیجہ ہیں کہ $\tan\theta \equiv \sin\theta/\cos\theta$

مساوات (6–29) اور (6–30) کے استعمال سے حاصل ہوگا

$$\begin{aligned}\tan(\alpha + \beta) &\equiv \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} \\ &\equiv \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta} \\ &\equiv \frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} + \dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} - \dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} \\ &\equiv \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}.\end{aligned}$$

مساوات (6–33) کو بھی اسی طریقے سے نکال سکتے ہیں یا مساوات (6–28) کے استعمال سے

مثال 1 : $\pi/3$ اور $\pi/4$ کے تفاضل سے $\sin 7\pi/12$ کا تخمینہ کرو۔

حل :
$$\begin{aligned}\sin 7\pi/12 &= \sin(\pi/3 + \pi/4)\\ &= \sin \pi/3 \cos \pi/4 + \cos \pi/3 \sin \pi/4\\ &= \sqrt{3}/2 \cdot \sqrt{2}/2 + \tfrac{1}{2} \cdot \sqrt{2}/2\\ &= \sqrt{6}/4 + \sqrt{2}/4 = (\sqrt{6} + \sqrt{2})/4.\end{aligned}$$

مثال 2 : $\cos \pi/12$ کی قیمت کا محاسبہ کرو۔

حل
$$\begin{aligned}\cos \pi/12 &= \cos(\pi/3 - \pi/4)\\ &= \cos \pi/3 \cos \pi/4 + \sin \pi/3 \sin \pi/4\\ &= \tfrac{1}{2} \cdot \sqrt{2}/2 + \sqrt{3}/2 \cdot \sqrt{2}/2\\ &= \sqrt{2}/4 + \sqrt{6}/4 = (\sqrt{2} + \sqrt{6})/4.\end{aligned}$$

مثال 3 : اگر $\sin \alpha = \frac{12}{13}$ اور $P(\alpha)$ ربع اوّل میں ہو۔ اور $\cos \beta = \frac{3}{5}$ اور $P(\beta)$ ربع اوّل میں تو بتاؤ کہ $P(\alpha + \beta)$ کون سے ربع میں ہوگا؟

حل : کیوں کہ $P(\alpha)$ اور $P(\beta)$ دونوں ہی ربع اوّل میں ہیں، اس لیے $P(\alpha + \beta)$ اوّل ربع میں ہوگا یا دوسرے میں۔ کیوں کہ (cosine) مثبت ہوتی ہے اوّل ربع میں اور منفی دوسرے میں، اس لیے $\cos(\alpha + \beta)$ نکالنا کافی ہوگا۔

دفعہ 2-6 کی طرح ہم $\cos \alpha$ اور $\sin \beta$ نکال سکتے ہیں: $\cos \alpha = \frac{5}{13}$ اور $\sin \beta = \frac{4}{5}$

اس لیے
$$\begin{aligned}\cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta\\ &= \tfrac{5}{13} \cdot \tfrac{3}{5} - \tfrac{12}{13} \cdot \tfrac{4}{5}\\ &= \tfrac{15}{65} - \tfrac{48}{65} = -\tfrac{33}{65}.\end{aligned}$$

کیوں کہ $\cos(\alpha + \beta)$ منفی ہے، اس لیے $P(\alpha + \beta)$ دوسرے ربع میں ہوگا۔

مثال 4 : ثابت کرو کہ $\sin(3\pi/2 - \theta) \equiv -\cos \theta$

حل : مساوات (6-31) میں فرض کرو کہ $\alpha = 3\pi/2$ اور $\beta = \theta$

اس لیے
$$\begin{aligned}\sin(3\pi/2 - \theta) &\equiv \sin 3\pi/2 \cos \theta - \cos 3\pi/2 \sin \theta\\ &\equiv (-1)\cos \theta - (0)\sin \theta\\ &\equiv -\cos \theta.\end{aligned}$$

مثال 5 : $3 \sin \theta + 4 \cos \theta$ کو $k \sin(\theta + \theta_1)$ کی شکل میں ظاہر کرو جبکہ

تو معلوم کرو۔

$\sin(\alpha+\beta)$, (a)	$\cos(\alpha+\beta)$, (b)	$\tan(\alpha+\beta)$, (c)
$\sin(\alpha-\beta)$, (d)	$\cos(\alpha-\beta)$. (e)	$\tan(\alpha-\beta)$. (f)

7. (a) سوال 5 میں $P(\alpha+\beta)$ کون سے ربع میں ہوگا؟

(b) سوال 6 میں $P(\alpha-\beta)$ کون سے ربع میں ہوگا؟

$\sin(\alpha+\beta)$ اور $\cos(\alpha+\beta)$ معلوم کرو۔ اگر دیا ہوا ہے کہ:

8. $\tan\alpha = \frac{3}{4}$ ، $\sec\beta = \frac{13}{5}$ اور نہ ہی $P(\alpha)$ اور نہ $P(\beta)$ ہی ربع اوّل میں ہیں

9. $\tan\alpha = -\frac{15}{8}$ ، $\sin\beta = -\frac{7}{25}$ اور نہ ہی $P(\alpha)$ اور نہ $P(\beta)$ ہی چوتھے ربع میں ہیں۔

ذیل میں سے ہر ایک کو صرف θ کے تفاعل کے ارکان میں ہی نکالو:

10. $\cos(\pi/4+\theta)$	11. $\tan(\theta+\pi/6)$	12. $\sec(\theta-\pi/4)$
13. $\cot(\pi/4+\theta)$	14. $\sin(\theta+\pi/3)$	15. $\csc(\theta-\pi/6)$
16. $\cos(\pi/6-\theta)$	17. $\sin(\theta-\pi/4)$	

ثابت کرو کہ مندرجہ ذیل بیانات سچ ہیں:

18. $\tan(\theta+\pi/4) - \tan(\theta-3\pi/4) \equiv 0$

19. $\sin(\theta-\pi/6) + \cos(\theta-\quad) \equiv \sqrt{3}\sin\theta$

20. $\cot(\alpha+\beta) \equiv \dfrac{\cot\alpha\cot\beta - 1}{\cot\alpha + \cot\beta}$

21. $\tan(\theta+\pi/4) \equiv (1+\tan\theta)/(1-\tan\theta)$

22. $\sin(\alpha+\beta)/\cos\alpha\cos\beta \equiv \tan\alpha + \tan\beta$

*23. (a) $\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) \equiv 2\sin\alpha\cos\beta$

(b) $\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) \equiv 2\cos\alpha\sin\beta$

24. (a) $\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) \equiv 2\cos\alpha\cos\beta$

(b) $\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) \equiv -2\sin\alpha\sin\beta$

*25. $\alpha+\beta = x$ اور $\alpha-\beta = y$ مان کر اور سوال 23 (a) اور (b) کے متعلقہ ممبروں کو تقسیم کر کے ثابت کرو کہ

$$\frac{\sin x - \sin y}{\sin x + \sin y} \equiv \frac{\tan\frac{1}{2}(x-y)}{\tan\frac{1}{2}(x+y)}$$

ثابت کرو کہ مندرجہ ذیل تعلق سچ ہیں :

.26 (a) $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta) \equiv \sin^2\alpha - \sin^2\beta$

(b) $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) \equiv \cos^2\alpha - \sin^2\beta$

.27 $\cos(\alpha+\beta)\cos\beta + \sin(\alpha+\beta)\sin\beta \equiv \cos\alpha$

.28 $\sin(\alpha-\beta)\cos\beta + \cos(\alpha-\beta)\sin\beta \equiv \sin\alpha$

اگر θ کی قیمت $\pi/2$ اور $-\pi/2$ کے درمیان ہو تو مندرجہ ذیل کو $k\sin(\theta+\theta_1)$ کی شکل میں ظاہر کرو :

.29 $5\sin\theta + 12\cos\theta$

.30 $15\sin\theta + 8\cos\theta$

.31 $4\sin\theta - 3\cos\theta$

.32 $24\sin\theta + 7\cos\theta$

.33 $\sin\theta + \cos\theta$

.34 $2\sin\theta - 5\cos\theta$

6-10 عام تحویلی ضابطے :

یہ اکثر ضروری ہو جاتا ہے کہ کسی دیے ہوئے عدد کے دائری تفاعل کو ایک ایسے عدد کے تفاعل کے ارکان میں ظاہر کیا جائے جو صفر اور $\pi/2$ کے درمیان ہو۔ یہ ہم مساوات (6-21) سے حاصل کیے گئے تحویلی ضابطوں کی امداد سے کر سکتے ہیں، اگر ہم کسی عدد کی تحویل $\pi/2$ کے اضعاف میں کرنا چاہتے ہیں تاکہ ایک چھوٹے عدد سے کام نکال سکیں تو ہم یاد رکھیں (دفعہ 6-3 کا سوال 9) کہ

$$\sin(2k\cdot\pi/2) = 0 \quad \text{اور} \quad \cos(2k\cdot\pi/2) = (-1)^k$$

کسی بھی عدد صحیح $k \in I$ کے لیے۔

چونکہ $\sin(2k\cdot\pi/2+\beta) \equiv \sin(2k\cdot\pi/2)\cos\beta + \cos(2k\cdot\pi/2)\sin\beta,$

ہمیں حاصل ہوگا

$$\sin(2k\cdot\pi/2+\beta) \equiv (-1)^k\sin\beta. \qquad (6\text{-}34)$$

اور اسی طرح

$$\cos(2k\cdot\pi/2+\beta) \equiv (-1)^k\cos\beta. \qquad (6\text{-}35)$$

یہ تعلق (رشتے) اُس β کے لیے ہیں جو بڑھایا یا گھٹایا گیا ہے $\pi/2$ کے جفت اضعاف سے۔ تفاعل نہیں بدلا ہے حالانکہ علامت شاید بدل گئی ہو۔ $\pi/2$ کے طاق اضعاف کے لیے تفاعل اُس کے ہم تفاعل سے بدل گیا ہے اور علامت کا بدلنا بھی ممکن ہے کیوں کہ :

$$\begin{aligned}\sin[(2k+1)\pi/2+\beta] &\equiv \sin[\pi/2+(2k\cdot\pi/2+\beta)]\\ &\equiv \sin\pi/2\cos(2k\cdot\pi/2+\beta)+\cos\pi/2\sin(2k\cdot\pi/2+\beta)\\ &\equiv \cos(2k\cdot\pi/2+\beta).\end{aligned}$$

اور اس لیے مساوات (6-35) سے

$$\sin[(2k+1)\pi/2+\beta] \equiv (-1)^k\cos\beta. \qquad (6\text{-}36)$$

مزید برآں

$$\begin{aligned}\cos[(2k+1)\pi/2+\beta] &\equiv \cos[\pi/2+(2k\cdot\pi/2+\beta)]\\ &\equiv \cos\pi/2\cos(2k\cdot\pi/2+\beta)-\sin\pi/2\sin(2k\cdot\pi/2+\beta)\\ &\equiv -(-1)^k\sin\beta,\end{aligned}$$

اور اسی طرح

$$\cos[(2k+1)\pi/2+\beta] \equiv (-1)^{k+1}\sin\beta. \qquad (6\text{-}37)$$

مساوات (6-34) اور (6-35) کا مخصوص معاملہ جس میں k کی قیمت 2 ہے اہم ہے کیوں کہ

$$\sin(\beta+2\pi) \equiv \sin\beta \qquad (6\text{-}38)$$

اور

$$\cos(\beta+2\pi) \equiv \cos\beta. \qquad (6\text{-}39)$$

یہی وجہ تھی کہ ان تفاعلوں کو ایسے دَوری تفاعل جن کے دَور 2π ہیں کہا گیا تھا [مساوات (6-5) اور (6-6) کو یاد رکھو]۔

یہ ضابطے جب ان کو زاویائی پیمائش کے لیے استعمال کیا جائے تو مخصوص اہمیت کے حامل اور مفید ترین ہیں۔ اس کی وضاحت باب 15 میں کی جائے گی۔

مثال 1 : $\sin 10.8909$ کو بہ حیثیت ایک ایسے عدد کے تفاعل کے ظاہر کرو جہاں

$$0 < \theta < \pi/4\ (=0.7854)$$

حل : چونکہ

$$10.8909 = 6(1.5708) + 1.4661,$$

مساوات (6-34) کی مدد سے حاصل ہوگا۔

$$\sin 10.8909 = -\sin 1.4661$$

مساوات (6–22) سے $-\sin 1.4661 = -\cos(1.5708 - 1.4661)$

$= -\cos 0.1047,$

اور ہمیں حاصل ہوگا

$\sin 10.8909 = -\cos 0.1047.$

مثال 2 : $\cos 21.6945$ کو بہ حیثیت ایک عدد θ کے تفاعل کے ظاہر کرو جبکہ

$0 < \theta < \pi/4$

حل : پھر $21.6945 = 13(1.5708) + 1.2741$

پس (6–37) مساوات کے استعمال سے

$\cos 21.6945 = -\sin 1.2741$

اور بذریعہ مساوات (6–22) حاصل ہوگا

$\cos 21.6945 = -\cos 0.2967$

مثال 3 : $\cos(-8.6743)$ کے لیے بھی یہی کیجیے۔

حل : کیوں کہ $-8.6743 = -5(1.5708) - 0.8203,$

ہمیں حاصل ہوگا

$\cos(-8.6743) = -\sin 0.8203 = -\cos 0.7505.$

اب چونکہ طریقہ ہمارا جانا بوجھا ہے اس لیے ہم جواب مساوات (6–24) سے (6–37) کو بغیر استعمال کیے لکھ سکتے ہیں۔ ایک شکل کھینچو۔ ربع پر منحصر اُس تفاعلی قیمت کی علامت جس کو مختصر کرنا ہے اخذ کرو اور اِس علامت کے ساتھ مطابق عدد صفر اور $\pi/2$ کے درمیان لکھو۔ مثال 1 کی بحث میں کیوں کہ 10.8909 ایسا ہے کہ $P(10.8909)$ تیسرے ربع میں ہے، $\sin 10.8909$ منفی ہے اور متعلقہ θ کی قیمت ہے 1.4661 تاکہ

$\sin 10.8909 = -\sin 1.4661$

سوالات

ذیل میں سے ہر ایک کو ایک حقیقی عدد θ کے تفاعل کی حیثیت سے ظاہر کرو جہاں کہ

$0 < \theta < \pi/4 = 0.7854$

sin 5.5676	.3	cos 2.5656	.2	sin 3.4209	.1
cos 12.7060	.6	tan 5.1313	.5	cos 4.4331	.4
tan 17.5231	.9	cos (−7.3922)	.8	sin (−10.9083)	.7
tan 3	.12	cos 2	.11	sin 8	.10
sin 6	.15	tan 5	.14	cos 4	.13

مساوات (6-21) یا مساوات (6-29) سے (6-33) تک کے استعمال سے یہ ثابت کرو کہ مندرجہ ذیل میں سے ہر ایک بیان صحیح ہے۔ جن میں sines یا cosines شامل ہوں اُن کو مساوات (6-34) سے (6-37) تک کی مدد سے جانچو۔

$\cos(\pi + \theta) \equiv -\cos\theta$	.17	$\sin(\pi + \theta) \equiv -\sin\theta$	.16
$\cos(\pi - \theta) \equiv -\cos\theta$	.19	$\sin(\pi - \theta) \equiv \sin\theta$	.18
$\cos(\theta - \pi) \equiv -\cos\theta$	.21	$\tan(3\pi/2 - \theta) \equiv \cot\theta$	.20
$\sin(\theta + 3\pi/2) \equiv -\cos\theta$	.23	$\cos(3\pi/2 + \theta) \equiv \sin\theta$	.22
$\cos(2\pi - \theta) \equiv \cos\theta$	.25	$\tan(\pi + \theta) \equiv \tan\theta$	.24
		$\sin(2\pi - \theta) \equiv -\sin\theta$	.26

.27 سوال 24 میں ہم نے ثابت کیا کہ $\tan(\theta + \pi) \equiv \tan\theta$ ۔ یہ مساوات (6-7) کی مخصوص صورت کی حیثیت سے ثابت کیا گیا تھا جس میں $k = 1$ ، $\tan\theta$ کا دَور کیا ہوگا؟

.28 ماس التمام (cotangent)، قاطع (secant) اور قاطع التمام (cosecant) تفاعل کے دور کیا ہیں؟

6-11 . عام متماثلہ :

ہم نے ہر جگہ اس بات پر زور دیا ہے کہ عام متماثلہ

$$\sin(\alpha \pm \beta) \equiv \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta, \tag{6-40}$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) \equiv \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta. \tag{6-41}$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) \equiv \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta} \tag{6-42}$$

کو تمام حقیقی اعداد کے لیے ثابت کیا تھا۔ کیوں کہ آسان متماثلہ (دفعہ 6-6) کو ثابت کرنے کے لیے بنیادی متماثلہ استعمال کی گئی تھیں اس لیے ان کو دوسری متماثلہ کو ثابت کرنے کے لیے استعمال کیا جاسکتا ہے جن میں سے بہت سی آئندہ آنے والے سوالات کی فہرست میں نظر آئیں گی۔ ان کو اہم اضافی قیمت

کی متماثلہ حاصل کرنے کے لیے بھی استعمال کیا جاتا ہے۔ کیوں کہ مساوات (6-40) سے (6-42) تک α اور β کسی بھی قیمت کے لیے سچ ہیں اگر $\alpha = \beta$ مان لیں تو ہمیں فوراً حاصل ہوگا :

$$\sin 2\alpha \equiv \sin (\alpha + \alpha)$$
$$\equiv \sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha \sin \alpha,$$

یا

$$\boxed{\sin 2\alpha \equiv 2 \sin \alpha \cos \alpha.} \qquad (6\text{-}43)$$

نیز $\cos (\alpha + \alpha) \equiv \cos \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha,$

یا

$$\cos 2\alpha \equiv \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \qquad (6\text{-}44)$$
$$\equiv 1 - 2 \sin^2 \alpha \quad (\text{کیوں؟}) \qquad (6\text{-}45)$$
$$\equiv 2 \cos^2 \alpha - 1. \quad (\text{کیوں؟}) \qquad (6\text{-}46)$$

مزید $\tan (\alpha + \alpha) \equiv \dfrac{\tan \alpha + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha \tan \alpha},$

یا

$$\boxed{\tan 2\alpha \equiv \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}.} \qquad (6\text{-}47)$$

دوسری متماثلہ بھی $\theta/2$ کے ارکان میں آسانی سے ثابت ہوجاتی ہیں۔ اگر مساوات (6-45) کو اس طرح استعمال کریں کہ $2\alpha = \theta$ یا $\alpha = \theta/2$

$$\cos \theta \equiv 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

اور $\sin \theta/2$ کے لیے حل کرکے ہمیں حاصل ہوگا

$$2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \equiv 1 - \cos \theta, \qquad (6\text{-}48)$$

تاکہ

$$\boxed{\sin \frac{\theta}{2} \equiv \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}},} \qquad (6\text{-}49)$$

لفاظ جو مندرجہ ذیل جدول میں ترتیب دیا گیا ہے۔ پلاٹ کرکے ایک بسیط منحنی میں جوڑ دیا گیا ہے۔

جس میں علامت جذر کے قبل کی علامت کا انتخاب $\theta/2$ کے ناپ سے متعین ہوگا۔ اگر اسی طرح ہم مساوات (6–46) کا استعمال $\alpha = \theta/2$ کے تبادلے سے کریں تو

$$\cos\theta \equiv 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1,$$

اور $\cos\theta/2$ کے لیے حل کر کے ہمیں حاصل ہوگا

$$2\cos^2\frac{\theta}{2} \equiv 1 + \cos\theta, \tag{6–50}$$

یا

$$\boxed{\cos\frac{\theta}{2} \equiv \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}},} \tag{6–51}$$

جن میں کہ علامت کا انتخاب پھر $\theta/2$ کے ناپ پر منحصر ہوگا۔

$\tan\theta/2$ کی دو متماثلہ ہیں، اور ان کو مساوات (6–48) اور (6–50) کی امداد سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ اس میں متماثلہ ہیں

$$\tan\frac{\theta}{2} \equiv \frac{\sin\theta/2}{\cos\theta/2},$$

دائیں طرف کے نسب نما اور شمار کنندہ کو $2\sin\theta/2$ سے ضرب دے کر ہمیں حاصل ہوگا :

$$\tan\frac{\theta}{2} \equiv \frac{2\sin^2\theta/2}{2\sin\theta/2\cos\theta/2},$$

یا

$$\boxed{\tan\frac{\theta}{2} \equiv \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}.} \tag{6–52}$$

اسی ضابطہ میں $2\cos\theta/2$ سے ضرب دے کر ہمیں حاصل ہوگا

$$\tan\frac{\theta}{2} \equiv \frac{2\sin\theta/2\cos\theta/2}{2\cos^2\theta/2},$$

یا

$$\boxed{\tan\frac{\theta}{2} \equiv \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}} \tag{6–53}$$

مندرجہ ذیل مثالوں کے ذریعے سے ان متماثلہ کے چند استعمال واضح طور پر سمجھے جا سکیں گے۔

مثال 1 : $\pi/6$ کے تفاعل سے $\sin\pi/12$ اور $\cos\pi/12$ کی قیمت کا تخمینہ کرو۔

حل : مساوات (6-49) کو استعمال کریں تو حاصل ہوگا

$$\sin\frac{\pi}{12} = \sin\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{6} = \sqrt{\frac{1-\cos\pi/6}{2}} = \sqrt{\frac{1-\sqrt{3}/2}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

نیز مساوات (6-51) سے

$$\cos\frac{\pi}{12} = \cos\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{6} = \sqrt{\frac{1+\cos\pi/6}{2}} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{3}/2}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}.$$

دفعہ 6-9 کی مثال 2 اور اس مثال کے فرق کو واضح کرو۔

مثال 2 : اگر $x = \tan\theta$ تو $\sin 2\theta$ ، $\cos 2\theta$ اور $\tan 2\theta$ کو x کی ارقام میں نکالو۔

حل : پہلے ہمیں x کی ارقام میں $\sin\theta$ اور $\cos\theta$ معلوم کرنا چاہیے۔ کیوں کہ

$$\sec\theta = \pm\sqrt{1+\tan^2\theta} = \pm\sqrt{1+x^2},$$

$$\cos\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

نیز

$$\sin\theta = \tan\theta\cos\theta = \pm\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

اس لیے

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = \frac{2x}{1+x^2}.$$

یہ ثابت کرنے کے لیے کہ مندرجہ بالا مثال میں علامت صحیح ہے $P(\theta)$ کو اوّل، دوم، سوم اور چہارم ربع میں مان کر ایک مکمل تجزیہ ضروری ہے۔

مزید برآں ہمیں حاصل ہوگا

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

اور

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{2x}{1-x^2}.$$

مثال 3 : $\sin^4\theta$ کو ایک ایسی عبارت میں تحویل کرو جس میں θ کی تفاعل کی قوت صرف ہو۔

حل : مساوات (6–48) سے ہمیں حاصل ہے

$$\sin^2\theta \equiv \frac{1-\cos 2\theta}{2}$$

یہ بات قابل توجہ ہے کہ θ کو دوگنا کرنے سے دائری تفاعل کا قوت نما 2 سے 1 میں بدل گیا ہے

$$\sin^4\theta \equiv (\sin^2\theta)^2 \equiv \frac{(1-\cos 2\theta)^2}{4} \equiv \frac{1-2\cos 2\theta+\cos^2 2\theta}{4}$$

اور $\cos^2 2\theta$ کو $\frac{1+\cos 4\theta}{2}$ میں تبدیل کرکے (ایسا کیوں کر ممکن ہے ؟)، ہمیں حاصل ہوگا $\sin^4\theta \equiv \frac{3-4\cos 2\theta+\cos 4\theta}{8}$.

اس قسم کا تبادلہ احصا میں بے حد مفید ہے۔

سوالات

1. θ کی $\pi/3$ قیمت کے لیے $\sin 2\theta$ اور $\tan 2\theta$ کی متماثلہ کی جانچ کرو۔
2. $2\pi/3$ کے تفاعل سے $\sin 4\pi/3$ ، $\cos 4\pi/3$ اور $\tan 4\pi/3$ کے تخمینہ کے لیے دوہری قیمت والی متماثلہ استعمال کرو۔
3. $7\pi/6$ کے تفاعل کی قیمت سے $\sin 7\pi/12$ ، $\cos 7\pi/12$ اور $\tan 7\pi/12$ کا محاسبہ کرو۔
4. اگر $\sin\theta = \frac{3}{5}$ اور $P(\theta)$ ربع اوّل میں ہو تو مندرجہ ذیل کی ٹھیک ٹھیک قیمت دریافت کرو:

(a) $\sin 2\theta$ (b) $\cos 2\theta$ (c) $\tan 2\theta$
(d) $\sin \theta/2$ (e) $\cos \theta/2$ (f) $\tan \theta/2$

5. اگر $\cos\theta = -\frac{5}{13}$ اور $P(\theta)$ دوسرے ربع میں واقع ہو تو مندرجہ ذیل کی ٹھیک ٹھیک قیمت دریافت کرو:

(a) $\sin 2\theta$ (b) $\cos 2\theta$ (c) $\tan 2\theta$
(d) $\sin \theta/2$ (e) $\cos \theta/2$ (f) $\tan \theta/2$

6. $\sin^2\theta$ کو ایسے جبریائی جملے میں تحویل کرو جس میں θ کے دائری تفاعل کا قوت نما صرف 1 ہو۔
7. $\cos^4\theta$ کو ایسے جبریائی ضابطے میں تحویل کرو جس میں θ کے دائری تفاعل کا قوت نما صرف 1 ہو۔

8. متماثلہ (6-53) کو متماثلہ $\sin \omega/2 \equiv \sin(\omega - \omega/2)$ کا استعمال کرکے حاصل کرو۔

[اشارہ : $(1 + \cos \omega) \sin \omega/2 \equiv \sin \omega \cos \omega/2$ یا

$\sin \omega/2 \equiv \sin \omega \cos \omega/2 - \cos \omega \sin \omega/2$]

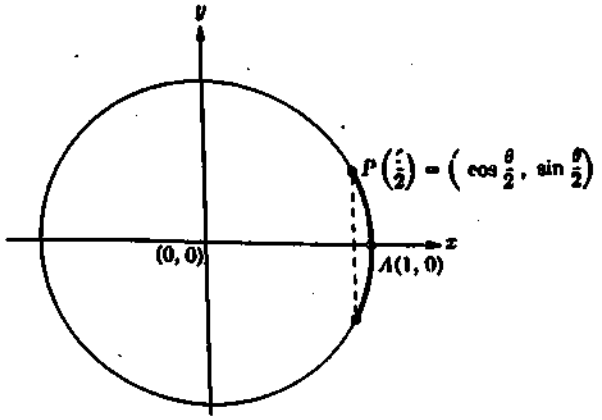
9. متماثلہ (6-52) کو مندرجہ ذیل متماثلہ کے استعمال سے حاصل کرو :

$$\cos \frac{\omega}{2} \equiv \cos\left(\omega - \frac{\omega}{2}\right).$$

10. ذیل کی متماثلہ کا استنباط کرو :

$$\tan \frac{\omega}{2} \equiv \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \omega}{1 + \cos \omega}}.$$

11. متماثلہ $\tan \omega/2 \equiv \csc \omega - \cot \omega$ کا استخراج کرو۔



شکل 6-17

مندرجہ ذیل متماثلہ ثابت کرو :

12. $\sin 3\theta \equiv 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta$

13. $\cos 3\theta \equiv 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$

14. $\sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \equiv \frac{\sin \theta}{2}$

15. $\frac{1 - \cos 2\theta}{\sin 2\theta} \equiv \tan \theta$

16. $\left(\cos \frac{\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2}\right)^2 \equiv 1 - \sin \theta$

17. $\csc 2\theta - \cot 2\theta \equiv \tan \theta$

18. $\csc 2\theta + \cot 2\theta \equiv \cot \theta$

19. $\tan 3\theta \equiv \frac{3 \tan \theta - \tan^3 \theta}{1 - 3 \tan^2 \theta}$

20. $\frac{\tan \theta/2 + \cot \theta/2}{\cot \theta/2 - \tan \theta/2} \equiv \sec \theta$

21. $\frac{\sin 2\theta}{\sin \theta} - \frac{\cos 2\theta}{\cos \theta} \equiv \sec \theta$

22. $\frac{\sin 3\theta}{\sin\theta} - \frac{\cos 3\theta}{\cos\theta} \equiv 2$

23. $\frac{\sin 3\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos 3\theta}{\sin\theta} \equiv 2\cot 2\theta$

24. $\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta} \equiv \sin 2\theta$

25. $\frac{\cot^2\theta - 1}{\csc^2\theta} \equiv \cos 2\theta$

26. شکل (6-17) میں A اکائی دائرہ کے اُس قوس کا نقطۂ تنصیف ہے جس کی لمبائی θ ہے اس شکل کے استعمال سے جہاں $0 < \theta < \pi$ اور مساوات (6-18) سے ثابت کرو کہ

$$\sin\frac{\theta}{2} \equiv \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}.$$

27. شکل 6-18 کے اکائی دائرہ میں P_2 نقطۂ تنصیف ہے قوس $\overset{\frown}{AP_1}$ کا جس کی لمبائی θ ہے جہاں کہ $0 < \theta < \pi/2$، BP_1 کو OP_2 کے متوازی اس طرح کھینچا تاکہ زاویہ P_2OA = زاویہ P_1BA کے (کیوں؟)

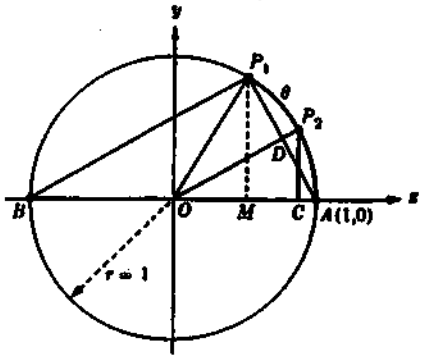
(a) امتحان کرو کہ $BP_1 = 2\cos\theta/2$ اور $P_1A = 2\sin\theta/2$

[اشارہ: $OC = OD = BP_1/2$ اور $CP_2 = AD = P_1A/2$]

(b) شکل کی امداد سے جانچ کرو کہ: $\sin\theta = 2\sin\theta/2\cos\theta/2$

(c) شکل کی امداد سے جانچ کرو کہ: $\sin\frac{\theta}{2} \equiv \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$.

(d) شکل کی امداد سے جانچ کرو کہ: $\cos\frac{\theta}{2} \equiv \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$.



شکل 6-18

6-12 . ضرب اور جوڑ کا مبادلہ : دو دائری تفاعل کے حاصل ضرب کو اُن دو تفاعلوں کے جوڑ میں تبدیل کرنا اور اُس کے برعکس کرنا اکثر ضروری ہوتا ہے۔ یہ متماثلہ (6-40) اور (6-41) کی امداد سے کیا جا سکتا ہے (مندرجہ ذیل متماثلہ اس قدر اہم نہیں ہیں جتنی کہ اسی باب کی سابقہ مساوات)۔ مساوات (6-40) دونوں متماثلہ کے طرفین کو جوڑ کر ہمیں حاصل ہوگا:

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\equiv 2\sin\alpha\cos\beta,$$

یا

$$\sin\alpha\cos\beta\equiv\tfrac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]. \qquad (6\text{-}54)$$

مساوات (6-40) کی دونوں متماثلہ کے طرفین کو تفریق کر کے ہمیں حاصل ہوگا

$$\cos\alpha\sin\beta\equiv\tfrac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]. \qquad (6\text{-}55)$$

اسی طریقے سے مساوات (6-41) میں پہلے جوڑ کر اور پھر تفریق کر کے ہمیں حاصل ہوگا :

$$\cos\alpha\cos\beta\equiv\tfrac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta), \qquad (6\text{-}56)$$

$$\sin\alpha\sin\beta\equiv\tfrac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]. \qquad (6\text{-}57)$$

مثال کے لیے $\cos 6\theta\cos 3\theta$ کے حاصل ضرب کو جوڑ میں تبدیل کیا جائے۔ مساوات (6-56) کے استعمال سے جس میں $\alpha=6\theta$ اور $\beta=3\theta$ ہمیں حاصل ہوگا

$$\cos 6\theta\cos 3\theta\equiv\tfrac{1}{2}(\cos 9\theta+\cos 3\theta).$$

یہی چار متماثلہ جوڑ کو حاصل ضرب میں تبدیل کرنے کے لیے بھی استعمال کی جا سکتی ہیں۔ ایسی تبدیلی لوکارتم کے استعمال کے وقت مفید ہوتی ہے کیونکہ ضرب کا حساب جوڑ کی بہ نسبت لوکارتم کی امداد سے بہ آسانی ہو سکتا ہے۔ آسانی کے مدنظر ہم علامتی اظہار کو $\alpha+\beta=\theta$ اور $\alpha-\beta=\omega$ مان کر بدل دیتے ہیں۔ ان مساوات کو α اور β کے لیے حل کر کے ہمیں حاصل ہوگا $\alpha=(\theta+\omega)/2$ اور $\beta=(\theta-\omega)/2$ ؛ مندرجہ بالا متماثلہ میں ان قیمتوں کو تبدیل کر کے اور مختصر کرنے سے ہمیں حاصل ہوگا :

$$\sin\theta+\sin\omega\equiv 2\sin\frac{\theta+\omega}{2}\cos\frac{\theta-\omega}{2}, \qquad (6\text{-}58)$$

$$\sin\theta-\sin\omega\equiv 2\cos\frac{\theta+\omega}{2}\sin\frac{\theta-\omega}{2}, \qquad (6\text{-}59)$$

$$\cos\theta + \cos\omega \equiv 2\cos\frac{\theta+\omega}{2}\cos\frac{\theta-\omega}{2}, \qquad (6\text{–}60)$$

$$\cos\theta - \cos\omega \equiv -2\sin\frac{\theta+\omega}{2}\sin\frac{\theta-\omega}{2} \qquad (6\text{–}61)$$

مثال : $\sin\theta + \sin 3\theta + \sin 5\theta + \sin 7\theta$ کو بہ حیثیت حاصل ضرب کے ظاہر کرو۔

حل : پہلے دو اور آخری دو ارکان کے جوڑے بنا کر اور مساوات (6–58) کی امداد سے حاصل ہوگا :

$$\sin\theta + \sin 3\theta + \sin 5\theta + \sin 7\theta$$

$$\equiv 2\sin\frac{\theta+3\theta}{2}\cos\frac{\theta-3\theta}{2} + 2\sin\frac{5\theta+7\theta}{2}\cos\frac{5\theta-7\theta}{2}$$

$$\equiv 2\sin 2\theta\cos(-\theta) + 2\sin 6\theta\cos(-\theta)$$

$$\equiv 2\cos\theta(\sin 2\theta + \sin 6\theta) \qquad \text{(کیوں؟)}$$

$$\equiv 2\cos\theta(2\sin 4\theta\cos 2\theta) \qquad \text{(کیوں؟)}$$

$$\equiv 4\cos\theta\cos 2\theta\sin 4\theta.$$

سوالات

مندرجہ ذیل میں ہر ایک حاصل ضرب کو بہ حیثیت جوڑ کے ظاہر کرو :

1. $\sin 3\theta\cos 5\theta$
2. $4\cos\pi/3\cos\pi/6$
3. $\cos 7\theta\sin 5\theta$
4. $6\sin 2\pi/3\sin\pi/3$
5. $\sin 5\theta\cos 2\theta$
6. $\cos 2\theta\cos 0\theta$
7. $\cos\theta\sin\theta/2$
8. $2\sin 7\theta\sin 2\theta$

مندرجہ ذیل میں سے ہر ایک جمع کو حاصل ضرب میں لکھو :

9. $\sin\pi/9 + \sin 2\pi/9$
10. $\cos 2\theta - \cos\theta$
11. $\cos 7\pi/9 + \cos 2\pi/9$
12. $\sin\pi/4 - \sin\pi/5$
13. $\sin 8\theta + \sin 4\theta$
14. $\cos 4\theta - \cos 8\theta$
15. $\sin 5\theta/3 - \sin 5\theta/6$
16. $\cos 6\theta + \cos 7\theta$

مندرجہ ذیل متماثلہ کو ثابت کرو :

17. $\dfrac{\sin 5\theta - \sin 3\theta}{\cos 5\theta + \cos 3\theta} \equiv \tan\theta$
18. $\dfrac{\cos 6\theta + \cos 4\theta}{\sin 6\theta - \sin 4\theta} \equiv \cot\theta$
19. $\dfrac{\sin 8\theta + \sin 2\theta}{\cos 8\theta + \cos 2\theta} \equiv \tan 5\theta$
20. $\dfrac{\sin 3\theta - \sin\theta}{\cos^2\theta - \sin^2\theta} \equiv 2\sin\theta$
21. $\dfrac{\sin\alpha - \sin\beta}{\cos\alpha + \cos\beta} \equiv \tan\dfrac{\alpha-\beta}{2}$
22. $\dfrac{\sin\alpha - \sin\beta}{\sin\alpha + \sin\beta} \equiv \dfrac{\tan\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\tan\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}$

23. $\dfrac{\sin\theta + \sin 3\theta + \sin 5\theta}{\cos\theta + \cos 3\theta + \cos 5\theta} \equiv \tan 3\theta$

24. $\sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \theta\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \theta\right) \equiv \dfrac{1}{2}\cos 2\theta$

6-13 . کسی عدد کی تفاعلی قیمتیں : اس باب کی بہت سی سابقہ دفعات میں ہم نے کچھ مخصوص اعداد کے لیے دائری تفاعل کی قیمتوں کا تخمینہ کیا تھا۔ ہم نے $\cos \pi/3 = 0.5000$ نکالا جو کہ درست اعشاریائی قیمت ہے جبکہ $\sin \pi/3 = \sqrt{3}/2$ اور $\tan \pi/3 = \sqrt{3}$ کو اپنے حسب خواہش قریب قریب صحیح اعشاریائی قیمت میں نکال سکتے ہیں۔ درست قیمتوں کے ایسے تقرب جنھیں علامت جذر میں ظاہر کیا گیا ہو صرف کچھ مخصوص صورتوں میں ہی حاصل ہو سکتے ہیں۔

کسی بھی دیے ہوئے عدد θ کے لیے تفاعل کی قیمت دریافت کرنا ہو تو ہم $|\theta|$ کو تقریباً صحیح ایک اکائی دائرہ کے قوس کے ساتھ ساتھ نقطہ $(1, 0)$ سے لے لیں گے اور اس طرح مختتم نقطہ $P(\theta)$ کا مقام ٹھیک طرح دریافت کر سکیں گے۔ نقطہ $P(\theta)$ کے x اور y مختصات ناپ کر ہم sine اور cosine تفاعل کی تقریباً ٹھیک قیمت دریافت کر سکیں گے۔ ناپ اور خاکہ کھینچنے کی غلطیوں کی وجہ سے اس طریقے کی واضح پابندیاں ہیں۔ تفاعل کی قیمتوں کو ایک خاص درجہ تک درست نکالنے کا حسب معمول طریقہ احصا پر مبنی ہے جو اس کتاب کی حدود سے باہر ہے۔

بہرحال اُن زاویوں کے تفاعل کی ٹھیک ٹھیک قیمت جو $\pi/60$ کے کوئی سے بھی صحیح ضعف ہوں نکالنے کے لیے ہم ایک مکمل ابتدائی عمل استعمال کرنے کے قابل ہیں۔ اگرچہ یہ طریقہ جدول بنانے کے لیے قیمت نکالنے کے لائق نہیں ہے پھر بھی اس مختصر بحث کے لیے تسلی بخش ریاضیاتی توجہ کا ضامن ہے

$$\theta = \pi/6,\ \pi/5,\ \pi/4,\ \pi/3 \ \&\ \pi/2$$

کے تفاعل کی ٹھیک ٹھیک قیمتوں (جو ہم پہلے ہی معلوم کر چکے ہیں) کو یکجا کر کے اور دفعہ 6-9 کے بعض تعلقات کو استعمال کر کے ہم ان سے نتائج حاصل کر سکتے ہیں۔ اب ہمیں $\sin \pi/60$ اور $\cos \pi/60$ کی درست قیمتیں نکالنا چاہئیں۔ دفعہ (6-5) میں $\cos \pi/5$ کی نکالی ہوئی قیمتوں کو مساوات (6-49) اور (6-50) میں استعمال کر کے ہمیں حاصل ہوگا :

$$\sin\frac{\pi}{10}=\sqrt{\frac{1-\cos\pi/5}{2}}=\sqrt{\frac{4-\sqrt{5}}{8}}$$

اور

$$\cos\frac{\pi}{10}=\sqrt{\frac{1+\cos\pi/5}{2}}=\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}.$$

نیز دفعہ (6-9) کی 2 کے سوال 2 سے ہمیں حاصل ہوگا

$$\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\quad\text{اور}\quad\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

چونکہ

$$\pi/10-\pi/12=\pi/60$$

مساوات (6-31) کے امداد سے ہمیں حاصل ہوگا

$$\begin{aligned}\sin\frac{\pi}{60}&=\sin\left(\frac{\pi}{10}-\frac{\pi}{12}\right)\\&=\sin\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{12}-\cos\frac{\pi}{10}\sin\frac{\pi}{12}\\&=\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{8}}\,\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}-\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}\,\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\\&=\sqrt{\frac{(3-\sqrt{5})(8+4\sqrt{3})}{128}}-\sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})(8-4\sqrt{3})}{128}},\end{aligned}$$

تاکہ

$$\sin\frac{\pi}{60}=\frac{\sqrt{12-2\sqrt{15}-4\sqrt{5}+6\sqrt{3}}-\sqrt{20-2\sqrt{15}+4\sqrt{5}-10\sqrt{3}}}{8}.\tag{6-62}$$

اسی طرح مساوات (6-21) کو استعمال کرکے ہمیں حاصل ہوگا

$$\cos\frac{\pi}{60}=\frac{\sqrt{20+2\sqrt{15}+4\sqrt{5}+10\sqrt{3}}+\sqrt{12+2\sqrt{15}-4\sqrt{5}-6\sqrt{3}}}{8}.\tag{6-63}$$

دوسرے تفاعل کی قیمتیں ان درست قیمتوں سے نکالی جاسکتی ہیں۔

درحقیقت تقریباً درست اعشاری قیمت کسی درجہ درستی تک خواہش کے مطابق حاصل کی جاسکتی ہیں لیکن واقعی تخمینہ لمبا ہوگا۔

دوسرے اعداد کی تفاعل قیمتیں اسی طرح نکالی جاسکتی ہیں۔ مثلاً

$\pi/30 = \pi/5 - \pi/6,\ \pi/20 = \pi/4 - \pi/5,\ \pi/15 = \pi/6 - \pi/10$

وغیرہ۔ اس بحث کا مقصد صرف یہ ظاہر کرنا تھا کہ ایک مکمل ابتدائی عمل سے کس طرح ایک قابل عمل جدول بنائی جاسکتی ہے۔

وہ مخصوص اعداد جن کو زیر بحث لایا گیا ہے مثلثاتی تفاعل قیمتوں کے جدول میں شامل ہیں جن کو کسی بھی دیے ہوئے عدد کے تفاعل کی تقریباً درست قیمت حاصل کرنے کے لیے استعمال کیا جاسکتا ہے یا اُس عدد کو جبکہ اُس عدد کے کسی تفاعل قیمت کی قیمت دی ہوئی ہو۔ ضمیمہ کے جدول اوّل میں اعداد کے سائن اور کوسائن، مماس اور مماس التمام کی قیمتیں تقریباً 0.0029 کے وقفے سے $\pi/2 = 1.5708$ تک مثبت اعداد کی قیمتوں کی فہرست جو تقریباً اعشاریائی چار مقام تک درست ہے دی گئی ہے۔ ان قیمتوں سے نیم قطریہ (ریڈین) کے سرخی والے کالم میں [نیم قطریہ (ریڈین) کی تعریف باب 15 میں دی جائے گی] سے کسی حقیقی عدد کے تفاعل کی تقریباً درست قیمتیں حاصل کی جاسکتی ہیں۔

کیوں کہ کسی بھی عدد کے دائری تفاعل وہی ہیں جو $\pi/2$ نفی اُسی عدد کے ہم تفاعل۔ جدول اوّل کو اس طرح بنایا گیا ہے کہ صفر سے لے کر $\pi/4 = 0.7854$ تک کے اعداد بائیں طرف ہیں جبکہ 0.7854 سے 1.5708 تک کے اعداد دائیں طرف ہیں۔ مزید یہ کہ دائری تفاعل جو اوپر لکھے ہوئے ہیں بائیں والے اعداد کے ساتھ لیے جاتے ہیں جبکہ نیچے لکھے گئے دائیں طرف والے اعداد کے ساتھ۔ مثلاً سائن والے کالم کے نیچے اور 0.4218 کے خلاف عدد ہے 0.4094 جو کہ $\sin 0.4218$ کی قیمت ہے۔ $\sin 1.1926 = 0.9293$ جو ہمیں sine کے کالم کے اوپر ملتی ہے کیوں کہ 1.1926 دائیں طرف دیا گیا ہے۔ ہمیں درمیانی قیمتوں کا اندراج نہیں کرنا چاہیے بلکہ صرف قریب ترین قیمت اخذ کرلیں جب تک کہ ہم اندراج اس کے صحیح وقت پر زیر بحث نہ لائیں۔

مثال 1 : $\cos 1$ معلوم کرو۔

حل : کیوں کہ 1 دائیں ہاتھ کے کالم میں جدول میں لکھے گئے عدد 1.007 کے قریب ترین ہے اس لیے $\cos 1$ تقریباً برابر ہے 0.5398 [cosine کے کالم میں نیچے سے پڑھو]

مثال 2 : $\cos 12$ معلوم کرو۔

حل : دفعہ 10-6 میں مکمل طور پر بیان کیے گئے طریقے سے ہمیں حاصل ہوگا

$$\cos 12 = \cos (7 \cdot 1.5708 + 1.0044) = \sin 1.0044 \quad (\text{مساوات } 6\text{-}37)$$

اس لیے $\cos 12 = 0.8434$

مثال 3 : اگر $\sin \theta = 0.6231$ تو θ کی قیمت 0 اور $\pi/2$ کے درمیان میں نکالو۔

حل : sine کالم میں 0.6231 قریب ہے 0.6225 کے بہ نسبت کسی دوسرے عدد کے اس لیے $\theta = 0.6720$ ؛ اس تعلق $\sin \theta = \sin (\pi - \theta)$ اور اس کے دوران کی وجہ سے θ کی اور بھی ممکنہ قیمتیں ہیں لیکن مطلوبہ سلسلہ میں نہیں۔ مثال کے طور پر کیونکہ $\theta = 0.6720$ ہم جانتے ہیں۔

$$\sin (3.1416 - 0.6720) = \sin 2.496 = 0.6231.$$

نیز وغیرہ۔

$$\sin (6.2832 + 0.6720) = \sin 6.9552 = 0.6231,$$

سوالات

1. مساوات (6-63) کو ثابت کرو۔
2. جیسے مندرجہ بالا میں اجتماعات استعمال کیے تھے ویسے ہی اب استعمال کرکے $7\pi/60$، $2\pi/15$ اور $3\pi/20$ کو ظاہر کرو اور ایسی قیمتوں کے سائن اور کوسائن نکالو۔
3. $11\pi/60$ ، $13\pi/60$ اور $7\pi/30$ کے ساتھ بھی ایسا ہی کرو۔
4. مساوات (6-42) اور (6-43) کو استعمال کرکے $\sin \pi/60$ اور $\cos \pi/60$ کے اعشاریائی قربت تخمینی مشین کے ذریعے، اگر آپ کو مل سکے، تو نکالو۔ اپنے جوابات کو جدول I کی قیمتوں سے جانچ کرو۔
5. جدول I کے استعمال سے مندرجہ ذیل میں سے ہر ایک کی قیمت نکالو:

(a) sin 0.4741	(b) cos 0.3860	(c) tan 1.15
(d) sin 0.17	(e) cos 3	(f) tan 4
(g) sin 30	(h) cos 60	

6. جدول I کو استعمال کرکے θ کی قیمت 0 اور $\pi/2 = 1.5708$ کے درمیان دریافت کرو اگر :

(a) $\sin\theta = 0.2979$, (b) $\cos\theta = 0.3365$,
(c) $\tan\theta = 2.25$, (d) $\sin\theta = 0.745$,
(e) $\cos\theta = 0.1423$, (f) $\cot\theta = 10$.

6-14 . چھوٹے اعداد کی تفاعلی قیمتوں کے تقریبات : ترتیب کی خصوصیات کے استعمال اور دائری قوس

کی لمبائی کی تعریف سے (تعریف 10-4) ہم θ کی چھوٹی مثبت قیمتوں کے لیے دائری تفاعل کی قریب قریب ٹھیک قیمت نکالنے کے لائق ہیں۔ $\sin\theta$ اور $\tan\theta$ کی تعریف کو دھیان میں رکھ کر (دفعہ 3-6 سوال 16) اور θ کے لیے چھوٹی مثبت قیمت کی پابندی لگا کر ہم توقع کریں گے کہ $\sin\theta$ اور $\tan\theta$ اور θ کی قیمتیں تقریباً ایک ہی ہوں گی۔ ہم دفعہ 4-6 سوال 9 ہمراہ شکل 10-4 اور دفعہ 3-6 کے سوال 19 کو دھیان میں رکھ کر کہ اگر $0 < \theta < \pi/2$ تو

$$\sin\theta < \theta < \tan\theta. \qquad (6\text{-}64)$$

غیر مساوات ہم کو θ کی چھوٹی قیمتوں کے لیے سائن اور مماس کی ٹھیک قریب قیمتیں نکالنے کے لائق بنا دے گی۔

مساوات (6-64) کے ہر رکن کو $\sin\theta$ سے تقسیم کر کے ہمیں ملے گا

$$1 < \frac{\theta}{\sin\theta} < \sec\theta.$$

مقلوب نکالنے سے ہمیں حاصل ہوگا

$$\cos\theta < \frac{\sin\theta}{\theta} < 1, \qquad (6\text{-}65)^*$$

---

* غیر مساوات (6-65) پر غور کرو۔ θ جیسے جیسے بذریعہ مثبت قیمت چھوٹے سے چھوٹا ہوتا جاتا ہے (صفر کے قریب آتا ہے) $\cos\theta$ 1 کے قریب آتا ہے۔ اگر θ منفی ہو تو ایسی ہی دلیل دی جا سکتی ہے، اس لیے $\sin\theta/\theta$ کی قیمت جیسے جیسے θ صفر کے قریب آتا ہے، ہمیشہ 1 اور ایک ایسے عدد کے جو 1 کے قریب آتا ہے کے درمیان ہوگی۔ اس لیے اس نسبت کو 1 کے کے قریب آنا چاہیے۔ اس کو اس طرح لکھتے ہیں : $\lim_{\theta\to 0} \sin\theta/\theta = 1$ اور پڑھتے ہیں: $\sin\theta/\theta$ کی انتہا جیسے θ صفر کے قریب قریب آتا ہے 1 ہے۔ اعلا علم ریاضی میں یہ اہم ترین نتیجہ ہے۔

اور کیوں کہ $\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta} > \sqrt{1-\theta^2}$ (کیوں؟)

ہمیں حاصل ہوگا

$$\sqrt{1-\theta^2} < \frac{\sin\theta}{\theta} < 1$$

یا

$$\theta\sqrt{1-\theta^2} < \sin\theta < \theta. \qquad (6\text{–}66)$$

یہ غیر مساوات sine تفاعل کے سلسلے میں مستعمل ہو سکتی ہے۔ پھر مساوات (6–64) کے ہر رکن کو $\tan\theta$ سے تقسیم دے کر ہمیں حاصل ہوگا :

$$\cos\theta < \frac{\theta}{\tan\theta} < 1 \qquad (6\text{–}67)$$

یا

$$\sqrt{1-\theta^2} < \frac{\theta}{\tan\theta} < 1.$$

مقلوب رشتہ کو استعمال کر کے ہمیں حاصل ہوگا

$$1 < \frac{\tan\theta}{\theta} < \frac{1}{\sqrt{1-\theta^2}}, \qquad (6\text{–}68)$$

یا

$$\theta < \tan\theta < \frac{\theta}{\sqrt{1-\theta^2}}. \qquad (6\text{–}69)$$

تعلقات (رشتے) (6–66) اور (6–69) ہم کو $\sin\theta$ اور $\tan\theta$ کی حدود بتاتے ہیں۔

مثال : $\sin \pi/60$ کی تقریباً درست قیمت نکالو۔

حل : (6–66) میں $\theta = \pi/60$ جہاں کہ $\pi = 3.1416$ کو تبدیل کر کے ہمیں حاصل ہوگا

$$0.05229 < \sin \pi/60 < 0.05236.$$

اس طرح اعشاریہ کے چار مقام تک صحیح $\sin \pi/60 = 0.0523$; جدول I میں دی گئی قیمت پر توجہ دو۔ θ کی چھوٹی مثبت قیمتوں کے لیے $\cos\theta$ کی قیمت نکالنا بھی ممکن ہے۔ کیوں کہ

$$\cos\theta \equiv 1 - 2\sin^2(\theta/2)$$

تو ہمیں حاصل ہوگا

$$\cos\theta > 1 - 2\frac{\theta^2}{4},$$

اور اس طرح

$$1 > \cos\theta > 1 - \frac{\theta^2}{2}. \qquad (6\text{–}70)$$

سوالات

1. مندرجہ بالا غیر مساوات کے استعمال سے اور $\pi = 3.1416$ لے کر $\sin \pi/30$ ، $\cos \pi/30$ اور $\tan \pi/30$ کی بہترین ممکن تقریباً ٹھیک ٹھیک قیمتیں نکالو۔

2. $\cos \pi/60$ اور $\tan \pi/60$ کے لیے تقریباً ٹھیک ٹھیک قیمتیں نکالو۔ ان قیمتوں کا جدول I میں دی ہوئی قیمتوں سے موازنہ کرو۔

3. مساوات (6–68) کو استعمال کر کے ثابت کرو کہ :

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\tan \theta}{\theta} = 1.$$

4. مساوات (6–65) یا مساوات (6–67) کی امداد سے $0 < \theta < \pi/2$ کے لیے غیر مساوات $\cos \theta = \frac{\sin \theta}{\tan \theta} < 1.$ کو ثابت کرو۔

5. سوال 4 کے نتائج کے استعمال سے ثابت کرو کہ :

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin \theta}{\tan \theta} = 1.$$

6. مساوات (6–65) اور (6–70) کی امداد سے $\sin \theta$ کے حدود نکالو کہ

$$\theta(1 - \tfrac{1}{6}\theta^2) < \sin \theta < \theta.$$

اس غیر مساوات میں جذر المربع نہیں ہے اس لیے بعض حالات میں یہ مفید ہے۔

7. r نصف قطر والے دائرہ میں ایک n ضلعی داخلی منتظم کے احاطہ P کی عبارت ہندسہ، مستوی (جیومیٹری) سے یاد کرو کہ

$$P = 2nr \sin (\pi/n)$$

اور

$$\lim_{n \to \infty} P = 2\pi r$$

(ایک n ضلعی منتظم کے احاطہ کی انتہا (limit) جبکہ اضلاع کی تعداد لامحدود طور پر بڑھتی ہے، کا محیط $2\pi r$ ہوگا) ان دونوں عبارتوں میں سے P کو خارج کر کے ایک انتہا مقرر کرو اور $\theta = \pi/n$ تبدیل کر کے ثابت کرو کہ

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1.$$

باب 7

خطّی اور دو درجی تفاعل

7-1 خطّی تفاعل : گزشتہ باب میں جو دائری تفاعل زیر بحث آئے تھے اُن کی تعریف جبریہ عبارت سے نہیں کی گئی تھی بلکہ کسی حد تک اصولی طور پر اور حقیقت میں بھی جبریہ طریقے سے ظاہر نہیں کیا جا سکتا۔ ایک غیر معروف جبریہ عبارت کے ذریعے شاید جس آسان ترین تفاعل کی ریاضی میں تعریف کی گئی ہے وہ تفاعل ہے جس کی تعریف $y = mx + b$ مساوات سے ہوتی ہے۔

تعریف 7-1 : تفاعل f، جس کی تعریف مندرجہ اوّل درجہ کی مساوات سے کی جائے :

$$\boxed{f(x) = mx + b,} \qquad (7\text{-}1)$$

جس میں m اور b مثبت عدد ہوں ایک خطّی تفاعل کہلاتا ہے۔

اس تفاعل کی وجہ تسمیہ اس حقیقت سے ہے کہ اس کا گراف ایک خطِ مستقیم ہوتا ہے۔ مزید یہ کہ ایسی ہی ایک مساوات سوائے $x = k$ (ایک خطِ مستقیم جو y محور کے متوازی ہو) کے، m اور b کی مناسب قیمتوں کے ساتھ ایک خطِ مستقیم کی نمائندگی کر سکتی ہے۔ ہمیں خطّی تفاعل کی جبریہ خصوصیات اور اُس کے صفروں سے سروکار رکھنا چاہیے نہ کہ کسی خصوصیات سے۔

یہ حقیقت کہ $y = mx + b$ ایک خطِ مستقیم کی نمائندگی کرتی ہے تحلیلی جیومیٹری میں ثابت کیا گیا ہے اور یہاں پر اس کو مان لیا گیا ہے۔

ہم یاد کریں (دفعہ 2-5) کہ کسی تفاعل کا صفر ہے x مختص یا x قیمت جس کے لیے y یعنی تفاعل کی قیمت صفر ہے۔ پس ہم $y = 0$ مان لیتے ہیں اور ہم خطّی تفاعل کا صفر مساوات $mx + b = 0$ کو x کے لیے حل کر کے نکال لیتے ہیں۔ عموماً کسی تفاعل کے صفر مساوات $f(x) = 0$ کی قیمتیں یا حل ہیں۔ قبل اس کے کہ ہم مخصوص طور پر ایسی خطّی مساوات کے حل کرنے پر غور کریں ہمیں کوئی بھی مساوات حل کرنے کے سوال پر سوچنا چاہیے۔

کسی بھی مساوات کو حل کرنے کے لیے بہت سے طریقے استعمال ہوتے ہیں۔ کوئی بھی عمل جس سے ایک ایسی معادل مساوات حاصل ہو جس کی قیمتیں اصل مساوات کی طرح ہوں اور دہی ہوں تو اُس کے استعمال کی اجازت ہے۔ ایسے طریقوں سے جیسے مربع کرنے سے نئے جزو داخل ہو سکتے ہیں یا تقسیم دینے سے کچھ جزو کم ہو سکتے ہیں، اس لیے ان کو استعمال کرتے وقت بہت محتاط رہنا چاہیے۔ مزید یہ کہ کسی بھی مفروضہ حل کی جانچ کرنا ہمیشہ دانش مندی ہوگی کیوں کہ کسی بھی عدد کے لیے مساوات کی قیمت ہونے کی یہ شرط نہیں کہ وہ کیسے حاصل ہوئی ہے بلکہ آیا وہ مساوات کو مطمئن بھی کرتی ہے۔ مندرجہ ذیل حل جائز کہلاتے ہیں کیوں کہ ان سے ہمیشہ ایسی مساواتیں حاصل ہوتی ہیں جو اصل کے معادل ہوں یعنی نئی مساوات کی ٹھیک ٹھیک وہی قیمتیں ہوں گی۔

(1) مساوات کے دونوں طرفین میں ایک ہی عدد یا جبریہ عبارت گھٹائی یا جوڑی جا سکتی ہے۔

(2) کسی بھی مساوات کے دونوں ممبروں کو کسی بھی غیر صفر عدد سے ضرب یا تقسیم دیا جا سکتا ہے۔

تمثیل 1 : $4x - 5 = x + 7$ کو حل کرتے وقت دونوں ممبروں میں 5 جوڑا جا سکتا ہے اور x گھٹایا جا سکتا ہے جس سے حاصل ہوگا $3x = 12$ ، پھر 3 سے تقسیم کرنے سے حاصل ہوگا $x = 4$

یہ واضح رہے کہ کوئی بھی جائز حل رجعت پذیر (اُلٹنے والا) ہے۔

متذکرہ جائز حل کے ساتھ ساتھ ایسا حل مثلاً مساوات کے دونوں ممبروں کو مربع کرنا بھی بعض اوقات استعمال ہوتا ہے۔ یہ طریقہ بہرحال رجعت پذیر نہیں ہے۔ حالانکہ اس طریقے سے اصل مساوات کے حل میں کوئی کمی نہیں آئے گی لیکن شاید کچھ نئے حل جو نئی مساوات کے حل ہوں گے اور اصل مساوات کے نہ ہوں گے اس میں شامل ہو جائیں گے۔ اگر اس قسم کا طریقہ کار اختیار کیا گیا ہو تو آخری مساوات کے حل کو اس بات کے لیے امتحان کرنا چاہیے کہ آیا وہ اصل مساوات کے حل بھی ہیں۔

تمثیل 2 : اگر مساوات $x - 1 = 3$ میں جس کا حل $x = 4$ ہے، دونوں طرفین کو مربع کر دیا جائے تو $(x - 1)^2 = 9$; اگر اس مساوات کو حل کیا جائے تو اس کا ایک حل (-2) ہوگا حالانکہ یہ اصل مساوات* کو مطمئن نہیں کرتا۔

تمثیل 3 : مساوات $\sin^2 \theta - \frac{1}{2} \sin \theta = 0$ کو θ کی 0 اور $\pi/2$ کے درمیان والی قیمتوں کے لیے حل کرنے سے ہمیں $\sin \theta$ کی قیمت 0 یا $\frac{1}{2}$ اور θ کی 0 یا $\pi/6$ ملتی ہے۔ اگر ہم دونوں ممبروں کو $\sin \theta$ سے تقسیم دیتے تو ہمیں $\sin \theta$ کی قیمت صرف $\frac{1}{2}$ حاصل ہوتی قیمت $\sin \theta = 0$ "ضائع"† ہو جاتی۔

آیئے اب ہم خطی مساوات کے حل پر غور کریں۔

مثال 1 : مندرجہ مساوات x کی تمام ممکن قیمتوں کے لیے حل کرو۔

$$\frac{2x + 5}{2} - \frac{5x}{x - 1} = x$$

حل : مساوات کو ہم پہلے اُس کے ادنا مشترک نسب نما $2(x - 1)$ سے ضرب دے کر کسور سے آزاد کر دیتے ہیں

$$(2x + 5)(x - 1) - (5x)(2) = (x)(2)(x - 1),$$

یا

$$2x^2 + 3x - 5 - 10x = 2x^2 - 2x.$$

یکساں ارکان کو مجتمع کرنے سے حاصل ہوگا

$$-7x - 5 = -2x.$$

$2x + 5$ دونوں طرف جوڑ کر

$$-5x = 5,$$

---

* کوئی بھی مساوات جس نے کسی بھی ریاضیاتی عمل کی وجہ سے کوئی بھی فاضل حل حاصل کر لیا ہو بعض اوقات **فاضل مساوات** کہلاتی ہے۔

† کوئی بھی مساوات جس کے حل کسی بھی ریاضیاتی عمل کی وجہ سے اُس کی اصل سے کم ہو جاتے ہیں **ناقص مساوات** کہلاتی ہے۔

اور -5 سے تقسیم کرکے $x = -1.$ حاصل ہوا۔

اصل مساوات میں نتیجے کی جانچ $x = -1$ رکھ کر کرنا چاہیے۔

مثال 2 : θ کی تمام قیمتوں کے لیے جو 0 اور 2π کے درمیان ہوں مساوات $2\cos\theta + 3 = 2$ کو حل کرو۔

حل : حالانکہ اس قسم کی تعدیل جبریہ نہیں ہے اور اس لیے خطی نہیں ہے۔ یہ θ کے دائری تفاعل میں خطی ہے اور اس کو بہ حیثیت خطی تعدیل کے $\cos\theta$ میں حل کیا جاسکتا ہے۔ پھر θ کی قیمت معلوم کی جاسکتی ہے۔ دفعہ 13-6 کا سوال 6 اس قسم کی ایک آسان مثال تھی۔

$$2\cos\theta + 3 = 2$$

$$2\cos\theta = -1$$

$$\cos\theta = -\tfrac{1}{2}$$

اس لیے $\theta = 2\pi/3$ یا $4\pi/3$ کیوں کہ $P(\theta)$ دوسرے یا تیسرے ربع میں ہونا چاہیے جبکہ اس کا x مختص منفی ہے۔

مثال 3 : $$s = \frac{a - rl}{1 - r}$$

مساوات کو r کے لیے حل کرو۔

حل : ایک ایسی مساوات جس میں بعض یا تمام دیے ہوئے ارکان کی نمائندگی حروف کرتے ہیں لفظی (literal) مساوات کہلاتی ہے۔ حل کے ہر قدم کا امتحان کرنا چاہیے۔

$$s = \frac{a - rl}{1 - r},$$

$$s(1 - r) = a - rl,$$

$$s - rs = a - rl,$$

$$rl - rs = a - s,$$

$$r(l - s) = a - s,$$

$$r = \frac{a - s}{l - s}, \quad \text{اگر } s \neq l.$$

سوالات

خطی تفاعل f کے تمام صفر معلوم کرو جن کو $f(x)$ کی مندرجہ ذیل عبارات سے متعارف کیا گیا ہے :

1. $2x + 4$ 2. $-5x + 10$ 3. $10 - 12x$
4. $8x - 9$ 5. $8x + 24$ 6. $5x - 17$

مندرجہ ذیل مساوات کو حل کرو اور جانچ بھی

7. $4x - 2 = 6x + 12$
8. $3x + 7 = 5x - 13$
9. $5 + 2(3 - x) = 4 + 2(x - 2) + 5x$
10. $x^2 - 7x + 10 = x^2 + 6x - 6$
11. $\frac{3x + 5}{12} - \frac{4 - x}{6} = \frac{x - 2}{3}$
12. $\frac{3x - 6}{5} = \frac{2x - 5}{10} + \frac{x - 4}{2}$
13. $\frac{3x + 2}{x - 1} - \frac{6}{5} = 0$
14. $\frac{2}{6x - 7} - \frac{5}{3x - 4} = 0$

θ کی 0 اور 2π کے درمیان والی اُن قیمتوں کو نکالو (اگر ضرورت ہو جدول I کو استعمال کرکے) جو ذیل میں دی ہوئی ہر ایک مساوات کو مطمئن کریں :

15. $2 \sin \theta - \sqrt{3} = 0$
16. $\frac{\cos \theta - 2}{3} = 3 - \frac{\cos \theta + 9}{3}$
17. $\frac{1 + \tan \theta}{1 - \tan \theta} = 2$
18. $\sin 3\theta = 2 - 3 \sin 3\theta$
19. $\frac{4 \cos (2\theta + \pi/6)}{5} = \frac{4 + \cos (2\theta + \pi/6)}{10}$
20. $\frac{1}{2 \tan (\theta + \pi)} = \frac{2}{\tan (\theta + \pi)} + 1$

مندرجہ ذیل مساوات مطلوبہ حروف کے لیے حل کرو۔

21. $ax - bx = c$, x کے لیے
22. $ay + by = c + dy$, y کے لیے
23. $A = \frac{1}{2}bh$ کے لیے b
24. $A = \frac{1}{2}(b_1 + b_2)h$, b_1 کے لیے
25. $l = a + (n - 1)d$ کے لیے d
26. $l = a + (n - 1)d$ کے لیے n
27. $S = \frac{a - rl}{1 - r}$ کے لیے l
28. $S = \frac{a - rl}{1 - r}$ کے لیے a
29. $S = \frac{n}{2}(a + l)$ کے لیے l
30. $S = v_0 t + \frac{1}{2}gt^2$, کے لیے v_0
31. $\frac{y}{\tan \theta_1} = \frac{a + y}{\tan \theta_2}$, کے لیے y
32. $\tan \theta_1 \left(\frac{x}{\tan \theta_2} + a\right) = x$, کے لیے x

سوال 33 سے 40 تک کے سوالوں میں خطی تفاعل $f : x \to y$ کا گراف کھینچو جس میں $y = f(x)$ مندرجہ ذیل عبارات سے ظاہر کیا گیا ہے :

33. $f(x) = 2x - 7$	34. $f(x) = (x/3) + 5$
35. $f(x) = -4x + 8$	36. $f(x) = 6 - (x/2)$
37. $f(x) = 4$	38. $f(x) = 3x + 6$
39. $f(x) = 20x - 30$	40. $f(x) = -(x/50) + (1/100)$

مندرجہ ذیل سوالات حل کرتے وقت سوال کو غور سے پڑھو، مجہول ارقام میں سے ایک کو x مان لیجیے اور دوسری تمام مجہول ارقام کو x کے ارکان میں ظاہر کرو۔ ایسی دو عبارات یا رقمیں معلوم کرو جو برابر ہوں، ان کو آپس میں برابر رکھو اور نتیجے کے طور پر آئی ہوئی مساوات کو حل کرو۔ تمام جوابات کی جانچ کرو۔

41. ایک 42 سال کے آدمی کا لڑکا 12 سال کا ہے۔ کتنے اور سال میں باپ بیٹے سے دوگنا بڑا ہو جائے گا؟

42. ایک عدد کا دہائی کا ہندسہ اکائی کے ہندسہ سے تین کم ہے۔ اگر عدد کو ہندسوں کے جوڑ سے تقسیم کر دیا جائے تو خارج قسمت 4 اور باقی 3 ہے تو اصل عدد کیا ہے؟ [اشارہ: اگر x اکائی کا ہندسہ ہو تو دہائی کا ہندسہ ہوگا $(x - 3)$ اور عدد اس طرح لکھا جائے گا $10(x - 3) + x$۔]

43. ایک آدمی نے اپنی جائداد کا $\frac{1}{4}$ اپنی بیوی کو، $\frac{1}{3}$ اپنی لڑکی کو اور باقی پندرہ ہزار پونڈ کی رقم اپنے لڑکے کو دی تو بتاؤ کہ اُس کی ریاست کتنی بڑی تھی؟

44. A سڑک پر 3 منٹ فی گھنٹہ کی رفتار سے چلتا ہے۔ دو گھنٹے بعد B اُسی سمت 3.5 منٹ فی گھنٹہ کی رفتار سے روانہ ہوتا ہے تو بتاؤ A، B کو نقطۂ آغاز سے کتنی دُور پکڑے گا؟ [اشارہ: رفتار × وقت = فاصلہ]

45. A ایک کام کو 3 گھنٹے میں کر سکتا ہے، جبکہ B اُسی کام کو کرنے کے لیے 4 گھنٹے لیتا ہے۔ اگر دونوں ایک ساتھ کام کریں تو کتنا وقت لگے گا؟ [اشارہ: اگر x = گھنٹوں کی تعداد جو کام کو پورا کرنے کے لیے دونوں کو لگتے ہیں۔ تو $1/x$ کام دونوں ایک گھنٹہ میں کریں گے۔]

46. اگر دو اعداد صحیح کا جوڑ 88 ہو اور اُن میں سے بڑے کو چھوٹے سے تقسیم دینے سے خارج قسمت 5 اور باقی 10 ہو تو دونوں اعداد کیا ہوں گے؟

7-2 . **سلسلۂ حسابیہ :** اب ہمیں اُن خطّی تفاعلوں پر غور کرنا چاہیے جو مساوات $f(x) = 2x - 1$ سے متعارف ہیں جہاں تفاعل کا علاقہ مثبت اعداد صحیح ہیں۔ اس معاملے میں تفاعل کی مفروضہ قیمتیں $1, 3, 5, \ldots, 2n - 1, \ldots$ ہیں۔ اسی طرح اگر تفاعل جس کی تصریحی مساوات $y = 2^x$ ہے تو اُس کے علاقے مثبت اعداد صحیح ہوں گے اور مطابق تفاعل قیمتیں ہوں گی $2, 4, 8, \ldots, 2^n, \ldots$ ؛ تفاعلی قیمتوں کے یہ دونوں سٹ تسلسل کی مثالیں ہیں۔ عام طور پر تسلسل کسی ایسے تفاعل کی بہت ہے جس کا علاقہ مثبت اعداد صحیح کا کُل سٹ یا اُس کا ایک حصّہ ہے۔ عدد صحیح 1 کی تفاعلی قیمت تسلسل کا پہلا رکن ہے، 2 کا دوسرا رکن، 3 کا تیسرا رکن وغیرہ۔ اس طریقے سے تسلسل میں پہلی، دوسری، تیسری وغیرہ قیمتیں مخصوص طور پر معلوم کی جاتی ہیں۔ اگر اعداد صحیح کے مکمّل سٹ پر غور کیا جائے تو تسلسل لامتناہی ہوگا لیکن اگر صرف پہلے n مثبت اعداد صحیح ہی تفاعل کے حصّے کو مکمل کر دیتی ہیں تو تسلسل متناہی ہے اس دفعہ میں ایک مخصوص قسم کے تسلسل سے ہی سروکار رکھیں گے۔

تعریف 7-2 : سلسلہ حسابیہ ایک ایسا تسلسل ہے جس میں پہلے رکن کے بعد ہر رکن سابقہ رکن میں ایک ہی قائم عدد جوڑ کر حاصل ہوتا ہے جسے مشترک فرق کہتے ہیں۔

متبادل تعریف 7-2 : ایک سلسلہ حسابیہ ایسا کوئی بھی تسلسل ہے جس کے لیے "تصریحی تفاعل" سادہ ہو (دیکھو سوال 33)۔

تمثیل 1 : متناہی تسلسل $2, 5, 8, 11, 14$ ایک سلسلہ حسابیہ ہے جس کا مشترک فرق 3 ہے۔ اس تسلسل کا تصریحی تفاعل ہے $f : x \to 3x - 1$ جس کا علاقہ ہے $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

تمثیل : لامتناہی تسلسل $7, 2, -3, -8, -13, \ldots$ ایک سلسلۂ حسابیہ ہے جس کا مشترک فرق -5 ہے : $f(x) = 12 - 5x$

کسی بھی سلسلۂ حسابیہ کے لیے ہمیں مندرجہ ذیل عام علامات استعمال کرنا چاہیے :

t_1 ، رکن اوّل
d ، فرق مشترک
n ، تعدادِ ارکان
t_n ، آخری یا n-ویں رکن

اس طرح تمثیل 1 میں $t_1 = 2$ ، $d = 3$ ، $n = 5$ اور $t_n = 3n - 1$ جبکہ تمثیل 2 میں $t_1 = 7$ ، $d = -5$ اور $t_n = 12 - 5n$ نوٹ کرو کہ دراصل n ۔ویں رکن اُس تفاعل کی نمائندگی کرتی ہے جو تسلسل کی تصریح کرتا ہے۔

عام طور پر ایک سلسلۂ حسابیہ کی پہلی n ارکان کی نمائندگی اس طرح کی جاسکتی ہے :

$$t_1,\ t_1 + d,\ \ t_1 + 2d,\ \ t_1 + 3d, \ldots,\ \ t_1 + (n-1)d.$$

آخری قیمت بھی n ۔ویں رکن t_n کا ضابطہ t_1 ، n اور d کے ارکان میں دیتا ہے

$$\boxed{t_n = t_1 + (n-1)d.} \qquad (7\text{-}2)$$

مثال 1 : سلسلۂ حسابیہ $2, 5, 8, 11, \ldots$ کی پچیسویں رکن نکالو۔

حل : اس سلسلے میں کیوں کہ $t_1 = 2$ اور $d = 3$ تو ہمیں حاصل ہوگا

$$t_{25} = t_1 + (n-1)d = 2 + (24)3 = 74.$$

مثال 2 : اگر کسی سلسلۂ حسابیہ میں چھٹی رکن 27 ہو اور بارھویں رکن 48 تو پہلا رکن بتاؤ۔

حل : ہمارے پاس دو تعلق (رشتہ) ہیں

$$t_6 = 27 = t_1 + 5d$$

اور

$$t_{12} = 48 = t_1 + 11d.$$

دوسری مساوات میں پہلی مساوات کے انفرادی ممبروں کو گھٹا کر ہمیں حاصل ہوگا

$$21 = 6d$$

یا

$$d = 3\tfrac{1}{2}.$$

اس قیمت کو پہلی مساوات میں d کے مقام پر رکھ کر ہمیں حاصل ہوگا

$$27 = t_1 + 5(3\tfrac{1}{2}),$$

اور اس سے حاصل ہوا

$$t_1 = 9\tfrac{1}{2}.$$

مثال 3 : چھ ارکان والے اُس سلسلۂ حسابیہ کو دریافت کرو جس کا اوّل رکن $\frac{1}{2}$ اور آخری $7\frac{1}{2}$ ہو۔

حل : مساوات (7-2) سے حاصل ہوگا

$$t_5 = 2\tfrac{2}{3} = \tfrac{8}{3} + 5d,$$

اور حل کرکے

$$d = \tfrac{2}{3}.$$

اس لیے مطلوبہ سلسلہ ہوگا $\tfrac{8}{3},\ 2,\ 1\tfrac{1}{3},\ \tfrac{2}{3},\ 0,\ -\tfrac{2}{3}.$

ہمارا مقصد اکثر ایک عام متناہی سلسلۂ حسابیہ کا جوڑ نکالنا ہوتا ہے۔ فرض کرو کہ

$$S_n = t_1 + (t_1 + d) + (t_1 + 2d) + \cdots + [t_1 + (n-1)d]. \quad (7\text{–}3)$$

ہم اس عبارت کی ترتیب اُلٹی کرکے اس طرح لکھ سکتے ہیں

$$S_n = [t_1 + (n-1)d] + [t_1 + (n-2)d] + \cdots + (t_1 + d) + t_1.$$

اگر ہم ان مساوات کے ارکان کو فرداً فرداً جوڑ دیں اور مطابق ارکان کی گروہ بندی کریں تو:

$$2S_n = [2t_1 + (n-1)d] + [2t_1 + (n-1)d] + [2t_1 + (n-1)d] + \cdots + [2t_1 + (n-1)d].$$

کیوں کہ اس مساوات کے دائیں جانب n ارکان ہیں اور ہر رکن $[2t_1 + (n-1)d]$ ہے،

اس لیے حاصل ہوگا $$2S_n = n[2t_1 + (n-1)d],$$

یا

$$\boxed{S_n = \frac{n[2t_1 + (n-1)d]}{2}.} \quad (7\text{–}4)$$

یہ ذہن میں رکھ کر کہ $t_n = t_1 + (n-1)d$ ہم مساوات (7–4) کو اس طرح بھی لکھ سکتے ہیں

$$\boxed{S_n = \frac{n(t_1 + t_n)}{2}.} \quad (7\text{–}5)$$

مثال 4 : سلسلۂ حسابیہ $-15, -13, -11, \ldots$ کے پہلے (30) ارکان کا جوڑ نکالو۔

حل : کیوں کہ $t_1 = -15$ ، $d = 2$ اور $n = 30$ ہمیں حاصل ہوگا

$$S_{30} = \frac{30[2(-15) + (30-1)2]}{2}$$

$$= \frac{30(-30 + 58)}{2} = 420.$$

یہ تعلق ریاضیاتی استقرا سے بھی ثابت کیا جا سکتا ہے۔ [دیکھو 12-1 سوال 17]۔

مثال 5 : کسی سلسلۂ حسابیہ کے پہلے پندرہ ارکان کا جوڑ 270 ہے۔ اگر پندرھواں رکن 39 ہو تو اوّل رکن اور فرق مشترک نکالو۔

حل : مساوات (5-7) کی امداد سے ہمیں حاصل ہوگا

$$270 = \frac{15(t_1 + 39)}{2}.$$

t_1 کے لیے حل کرتے ہوئے ہمیں حاصل ہوگا

$$15t_1 + 585 = 540,$$
$$15t_1 = -45,$$
$$t_1 = -3.$$

کیوں کہ $t_{15} = t_1 + (n-1)d$

$$39 = -3 + 14d,$$

$$d = 3.$$

سوالات

مندرجہ ذیل سلسلۂ حسابیہ میں سے ہر ایک کے اگلے تین ارکان لکھو اور t_n ، S_n معلوم کرو :

1. 9 ارکان تک 1, 4, 7, ...
2. 30 ارکان تک 27, 25, 23, ...
3. 15 ارکان تک 10, 7, 4, ...
4. 8 ارکان تک $-\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \ldots$

سوال 5 سے 11 تک میں t_1 ، t_n ، d ، n اور S_n میں سے سلسلۂ حسابیہ کے کوئی تین عناصر دیے گئے ہیں۔ ہر سوال میں مفقود عنصر نکالو :

5. $t_1 = 2, d = 4, n = 12$
6. $t_1 = 3, n = 4, t_n = 12$
7. $t_1 = -2, n = 14, S_n = 20$
8. $d = 3, n = 5, t_n = 14$
9. $d = \frac{1}{2}, n = 14, S_n = 30$
10. $t_1 = 4, d = 4, S_n = 40$
11. $t_1 = 6, d = 5, t_n = 36$

12. $8k + 4$ ، $6k - 2$ اور $2k - 7$ ایک سلسلۂ حسابیہ بنائیں اُس کے لیے k کی قیمت معلوم کرو۔

13. اُس سلسلۂ حسابیہ کے پہلے تین ارکان کیا ہوں گے، جس کا نواں رکن 16 اور چالیسواں رکن 47 ہو۔

14. ایک سلسلۂ حسابیہ کے اٹھارھویں اور بانویں ارکان 3 اور 173 ہیں تو پچیسویں رقم معلوم کرو۔

15. 12 سے 864 تک بہ شمول دونوں کے تمام جفت اعداد کا جوڑ معلوم کرو۔

16. 27 سے 495 تک بہ شمول دونوں کے تمام طاق اعداد کی حاصل جمع دریافت کرو۔

*17. کسی سلسلۂ حسابیہ کے دو ارکان کے درمیان کی ارقام اُن دونوں ارکان کی حسابی اوسط کہلاتی ہیں۔ (1−) اور (14) کے درمیان چار اوسطِ حسابیہ داخل کرو۔

18. 14 اور 86 کے درمیان 5 اوسطِ حسابیہ داخل کرو۔

19. 18− اور 4 کے درمیان تین اوسطِ حسابیہ داخل کرو۔

*20. 24 اور 68 کے درمیان ایک اوسطِ حسابیہ داخل کرو۔ ایسا عدد دو اعداد کا حسابی اوسط کہلاتا ہے۔

21. حسابی اوسط نکالو (a) 7 اور 15− کا (b) $\frac{2}{3}$ اور $\frac{5}{6}$ کا۔

*22. سلسلۂ موسیقی اُن اعداد کا تسلسل ہے جن کے مقلوب ایک سلسلۂ حسابیہ بناتے ہیں۔ 4 اور 8 کے درمیان دو اوسطِ موسیقی داخل کرو۔

23. اعداد کے کسی ایسے تسلسل کے لیے جو سلسلۂ حسابیہ بناتے ہیں ثابت کرو کہ اس کے ہر رکن کو اگر کسی مستقل سے ضرب دیا جائے تو حاصل ضرب بھی ایک سلسلۂ حسابیہ بنائے گا۔

24. اگر a^2 ، b^2 اور c^2 ایک سلسلۂ حسابیہ بناتے ہیں تو ثابت کرو کہ $c+a$ ، $a+b$ اور $b+c$ ایک سلسلۂ موسیقیہ بنائیں گے۔

25. 10 اور 200 کے درمیان کتنے ایسے اعداد ہیں جو 7 سے ٹھیک ٹھیک تقسیم ہو جاتے ہیں؟

26. 25 اور 400 کے درمیان کون سے ایسے اعداد ہیں جو 11 سے ٹھیک ٹھیک ہو جاتے ہیں؟ اُن کی حاصل جمع نکالو۔

27. اگر ایک گھڑی ہر گھنٹہ بعد صحیح گھنٹہ بجاتی ہے تو بتاؤ کہ ایک ہفتہ میں وہ کتنی دفعہ بجائے گی؟

28. ایک آدمی ایک ملازمت 3600 ڈالر سالانہ کی شرح سے اس معاہدہ کے ساتھ منظور کرتا ہے کہ ہر ششماہی میں اُس کو 250 ڈالر کی ترقی ہوگی۔ 15 سال کے بعد اُس کا مشاہرہ کیا ہوگا؟

اُس کی کُل آمدنی کیا ہوگی؟

29. کشش ثقل کی وجہ سے ایک جسم پہلے سیکنڈ میں 16.1 فٹ گرتا ہے، دوسرے میں 48.3 فٹ تیسرے میں 80.5 فٹ وغیرہ۔ تو بتاؤ 10 سیکنڈ میں جسم کتنا فاصلہ گرے گا؟

30. ایک آدمی نے اوائل 1945 میں ایک مکان 10,000 ڈالر کا خریدا۔ اگر اس کی قیمت 500 ڈالر سالانہ بڑھے تو بتاؤ کہ اواخر 1959 میں اس کی قیمت کیا ہوگی؟

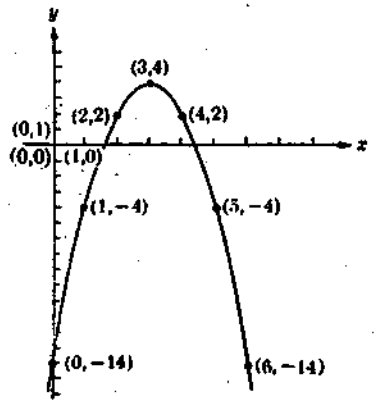
31. کسی فیکٹری کی مشینری کی قیمت خرید 29,000 ڈالر ہے۔ اگر پہلے سال میں اس کی قیمت 15% گھٹے، دوسرے میں 13.5% اور تیسرے میں 12% وغیرہ۔ اگر تمام فی صدی اصل قیمت پر لاگو ہوں تو 10 سال کے آخر میں اس کی قیمت کیا رہ جائے گی؟

32. کسی مخصوص عتیق جس کی اصل قیمت 1600 ڈالر تھی، 80 سال بعد اس کی قیمت 5660 ڈالر جانچی گئی۔ ہر دس سال کے وقفے کے بعد اس کی قیمت نکالو، اگر ایسے ہر وقفے کے بعد (دس سالہ) اس کی قیمت بہ نسبت سابقہ 10 سالہ وقفے کے 125 ڈالر بڑھ جائے۔

33. مساوات (2-7) کی امداد سے ثابت کرو کہ سلسلۂ حسابیہ کی ہر دو تعریفیں یکساں ہیں۔

7-3. دو درجی تفاعل:

دوسرے قسم کا جبریہ تفاعل جو اکثر زیر بحث آتا ہے وہ ہے جس کی تصریحی مساواتیں دوسرے درجے کی ہوں۔



شکل 7-1

تعریف 7-3 : تفاعل f ، جس کی تصریح یہ دو درجی مساوات کرتی ہے

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \tag{7-6}$$

جس میں a ، b اور c مستقل ہیں اور $a \neq 0$ ، دو درجی تفاعل کہلاتا ہے۔

ایسے تفاعل کا گراف مختصر طور پر دفعہ 2-5 کے سوال 2 میں زیر بحث آیا تھا۔ ایک دوسری مثال دینا مناسب ہوگا۔

مثال 1 : دو درجی تفاعل $q: x \to -2x^2 + 12x - 14$ کا گراف کھینچو۔

حل : گراف شکل 7-1 اُن نقاط کی کافی تعداد کا جدول بنا کر کھینچا گیا ہے جن کے مختص مساوات $y = -2x^2 + 12x - 14$ کو مطمئن کرتے ہیں۔

x	0	1	2	3	4	5	6
y	−14	−4	2	4	2	−4	−14

اس منحنی کا شکل 5-5 کے منحنی سے موازنہ کرنے سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ دونوں کی ایک عام شکل یکساں ہے۔ اس قسم کے کسی بھی دو درجی تفاعل کا گراف قطع مکافی کہلاتا ہے۔ اگرچہ ہم یہ ثابت نہیں کریں گے پھر بھی جب x^2 کا ضریب مثبت ہوگا تو منحنی اوپر کی طرف کھُلے گا اور اگر منفی ہوگا تو نیچے کی طرف کھُلے گا۔ دونوں مثالوں کا موازنہ کرو۔

عام دو درجی تفاعل کا گراف براہِ راست اس طرح کھینچا جا سکتا ہے کہ دو درجی تفاعل ایک خطی تفاعل کے مربع کے ارکان میں ظاہر کیا جائے۔

$$y = ax^2 + bx + c. \tag{7-7}$$

پر غور کرو۔

a کو باہر نکال کر اور x^2 اور x کے ارکان کو ایک ساتھ لے کر ہمیں حاصل ہوگا

$$y = a\left[\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + \frac{c}{a}\right].$$

مساوات (3-13) پر اپنی توجہ منعطف کر کے ایک کامل مربع بنانے کے لیے ہمیں $x^2 + (b/a)x$.

میں $(b/2a)^2$ جوڑ دینا چاہیے۔ اس طرح قوسین کے اندر $b^2/4a^2$ کو جوڑ اور گھٹا کر

$$y = a\left[\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right],$$

اور حل کر کے ہمیں حاصل ہوگا

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right]. \qquad (7\text{-}8)$$

کیوں کہ مربع کی گئی رقم $(x + b/2a)^2 \geq 0$ اور قوسین کے اندر کی عبارت کی قیمت کمترین تب ہوگی جب $x = -b/2a$ اگر $a > 0$ تو تفاعل کی کمترین قیمت بھی $x = -b/2a$ پر ہی ہوگی۔ تفاعل کی یہ کمترین قیمت $(4ac - b^2)/4a$ **اقل** کہلاتی ہے۔ بہرحال اگر $a < 0$ جبکہ $x = -b/2a$ تو تفاعل کی قیمت عظیم ترین ہوگی اور **اعظم قیمت** کہلائے گی اور برابر ہوگی $(4ac - b^2)/4a$ ، ہر حالت میں نقطہ

$$\left[\frac{-b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right]$$

قطع مکافی (پرابلا) کا **راس** کہلائے گا۔ نقطہ کے معلوم ہونے سے اور ایک یا دو اور دوسرے نقاط معلوم ہونے سے اس کا گراف کھینچا جا سکتا ہے۔ بہرصورت اس بحث میں کامل مربع نکالنا عام طور پر زیادہ آسان ہے بہ نسبت اس کے کہ ضابطے استعمال کیے جائیں۔

مثال 2 : اُس قطع مکافی (پرابلا) کی راس نکالو جس کی نمائندگی مساوات $y = x^2 - x - 6$ کرتی ہے۔ اس کا دفعہ 2-5 کی مثال 2 سے موازنہ کرو۔

حل : دائیں طرف کے اوّل دو ارکان کا گروپ بنا کر اور مربع کامل کر کے، ہمیں حاصل ہوگا

$$\begin{aligned} y &= (x^2 - x) - 6 \\ &= (x^2 - x + \tfrac{1}{4}) - 6 - \tfrac{1}{4} \\ &= (x - \tfrac{1}{2})^2 - 6\tfrac{1}{4}. \end{aligned}$$

راس $(\frac{1}{2}, -6\frac{1}{4})$ ہے۔ کیوں کہ $a = 1$ جو کہ مثبت ہے تفاعل کی اقل قیمت ہوگی $(-6\frac{1}{4})$ اور یہ اُس وقت ہوگا جب $x = \frac{1}{2}$ ، اس تفاعل کا گراف شکل (5-5) میں دکھایا گیا ہے۔

سوالات

مندرجہ ذیل تفاعل f میں سے ہر ایک کے لیے جہاں $f(x)$ مندرجہ ذیل عبارتیں ہیں، اقل اور اعظم قیمتیں معلوم کرو۔ اور گراف بھی کھینچو :

.1	$x^2 + 6x + 5$	.2	$x^2 + x - 6$
.3	$2x^2 + 5x - 12$	.4	$-2x^2 + 11x - 15$
.5	$6x^2 - 17x + 5$	.6	$-2x^2 + 5x + 8$
.7	$x^2 + 6x + 11$	.8	$-3x^2 + 5x - 4$

.9 ایسے دو اعداد معلوم کرو جن کی جمع 16 ہو اور اُن کا حاصل ضرب اعظم ہو۔

[اشارہ : فرض کرو کہ x ایک عدد ہے اور $16 - x$ دوسرا۔ حاصل ضرب y، x کی ارقام میں اس طرح لکھا جا سکتا ہے یعنی $y = x(16 - x) = 16x - x^2$]

.10 40 کو ایسے دو حصّوں میں تقسیم کرو کہ اُن کے مربعوں کا جوڑ ایک اقل ہو۔

.11 ایک آدمی 160 فٹ باڑ لگانے کے سامان سے ایک رقبہ کو مستطیل کی شکل میں احاطہ کرنا چاہتا ہے۔ اس رقبہ کے اضلاع کیا ہونے چاہئیں کہ احاطہ بند جگہ بڑی سے بڑی ہو؟

.12 ایک آدمی 160 فٹ باڑ لگانے کے سامان سے ایک رقبہ کو مستطیل کی شکل میں احاطہ کرنا چاہتا ہے۔ اگر رقبہ کے ایک سمت باڑ کی ضرورت نہ ہو تو بڑے سے بڑے رقبہ کو گھیرنے کے لیے اضلاع کیا ہونے چاہئیں ؟

7-4 . دو درجی مساوات کا حل :

اب ہم کسی بھی دو درجی تفاعل کے صفر نکالنے کے قابل ہیں۔ کسی تفاعل کے صفر کی تعریف (دفعہ 2-5) کو دھیان میں رکھ کر ہم اُن نقاط کے فصلہ نکالنے کی طرف متوجہ ہیں جہاں $y = ax^2 + bx + c$ کا گراف x محنّص کو قطع کرتا ہے۔ یہ منحنی کا خاکہ کھینچ کر بذریعہ گراف نکالا جا سکتا ہے۔ مثلاً شکل (5-5) سے $x^2 - x - 6$ کے صفر -2 اور 3 ہیں۔ اس طرح شکل (7-1) سے $-2x^2 + 12x - 14$ کے صفر تقریباً 1.3 اور 4.7 ہیں۔ درحقیقت ایسی قیمتیں اصل تفاعل کو صفر کے برابر رکھ کر اور اُس میں طریقۂ تبادلہ استعمال کر کے جانچی جا سکتی ہیں۔

تفاعل $f : x \to ax^2 + bx + c$ کے صفر معلوم کرنے کے اور زیادہ صحیح طریقے ہیں۔ صفر معلوم کرنا مساوات کو حل کرنے کے مرادف ہے۔ اس میں

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{جہاں} \quad (a \neq 0), \qquad (7\text{–}9)$$

ہم بائیں جانب کو اجزائے ضربی میں تبدیل کر سکتے ہیں۔ یہ طریقہ جسے اجزائے ضربی نکالنے کا طریقہ کہتے ہیں، اس حقیقت پر مبنی ہے کہ اگر حاصل ضرب صفر کے برابر ہے تو کوئی سا بھی جزو صفر کے برابر ہوگا (مسئلہ 5-2)۔

مثال 1 : دو درجی مساوات $x^2 - 7x + 10 = 0$ کو اجزا ضربی سے حل کرو۔

حل : کیوں کہ $x^2 - 7x + 10 \equiv (x - 5)(x - 2)$ دیکھو مساوات (3–14)

اس لیے مساوات کو لکھ سکتے ہیں

$$(x - 5)(x - 2) = 0.$$

ہم ایک ایسی قیمت معلوم کرنا چاہتے ہیں کہ اگر ہم بائیں جانب میں x کی جگہ اُسے تبدیل کر دیں تو حاصل ضرب صفر ہو جائے۔ ایسی قیمت مندرجہ ذیل دونوں میں سے کسی ایک کو حل کر کے نکالی جا سکتی ہے

$$x - 5 = 0 \quad \text{اور} \quad x - 2 = 0.$$

ان سے ہمیں حاصل ہوگا $x = 5$ یا $x = 2$ جس میں دونوں ہی اصل مساوات کے حل ہیں۔ تمام جوابات کی جانچ کرنا چاہیے۔

مثال 2 : θ کی 0 اور 2π کے درمیان میں آنے والی تمام ممکن قیمتوں کے لیے مساوات $2\sin^2\theta + \sin\theta - 1 = 0$ کو حل کرو۔

حل : دفعہ (1–7) کی مثال 2 کی طرح یہ مساوات جبریہ نہیں ہے لیکن ہم اس کو $\sin\theta$ میں بہ حیثیت دو درجی مساوات کے بحث کر سکتے ہیں۔ بائیں جانب کے اجزاء ضربی نکال کر ہمیں حاصل ہوگا

$$2\sin^2\theta + \sin\theta - 1 \equiv (2\sin\theta - 1)(\sin\theta + 1).$$

اس طرح ہمیں یہ مساواتیں حاصل ہوتی ہیں

$$2\sin\theta - 1 = 0 \quad \& \quad \sin\theta + 1 = 0$$

$\sin\theta$ کے لیے حل کر کے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\sin\theta = \tfrac{1}{2} \quad \text{یا} \quad -1.$$

کیوں $\sin\theta$ پہلے یا دوسرے ربع میں مثبت ہے اس لیے θ اور 2π کے درمیان 0 کی دو ایسی قیمتیں ہوں گی جن کے لیے $\sin\theta = \frac{1}{2}$، اس لیے

$$\theta = \pi/6, \quad 5\pi/6, \quad \text{یا} \quad 3\pi/2.$$

سوالات

سوال 1 تا 8 — دفعہ 3-7 کے سوال 1 سے 8 تک میں درج تفاعل کے گراف سے مطابق مساوات کے حل نکالو۔ جوابات کو اصل مساوات میں تبدیل کر کے اُن کی جانچ کرو۔

سوال 9 سے 26 تک کو اجزا ضربی نکال کر حل کرو اور بدل کر جانچ کرو۔ ان مساوات کے جن میں دائری تفاعل شامل ہوں تمام وہ حل نکالو جو 0 اور 2π کے درمیان ہوں۔

9. $9x^2 - 16 = 0$	10. $2x^2 - 5x - 12 = 0$	11. $4\sin^2\theta = 1$	12. $4\cos^2\theta = 3$
13. $6x^2 - 5x = 50$	14. $2x^2 - 2 = x - 4x$	15. $1 - \cos^2\theta = \cos^2\theta$	16. $\tan\theta(2\sin\theta - \sqrt{3}) = 0$
17. $3x^2 - x = 10$	18. $4x^2 - 12x + 9 = 0$	19. $2\cot\theta\cos\theta - \cot\theta = 0$	20. $2\tan^2\theta + \tan\theta = 0$
21. $x^2 + 2ax = b^2 - a^2$	22. $8x^2 + 14ax + 3a^2 = 0$	23. $2\sin^2\theta - \sin\theta = 1$	24. $2\cos^2\theta + 3\cos\theta + 1 = 0$
25. $\frac{x-2}{x+3} - 3 = \frac{4(x+3)}{x-2}$	26. $(x-2)(x+3) = 6$		

کسی مساوات میں دو درجی عبارت کے اجزا ضربی نکالنا مشکل ہوتا ہے۔ مزید یہ کہ بہت سے مواقع پر اجزا ضربی کا وجود ہی نہ ہو۔ اس کے نتیجے کے طور پر کسی دو درجی مساوات کو حل کرنے کا بہت مفید ترین طریقہ **دو درجی ضابطہ** سے کرنے کا ہے۔ ہم یہ ضابطہ مربع کو مکمل کر کے حاصل کرتے ہیں جیسا کہ قطع مکافی (شلجمی) کی راس معلوم کرتے وقت کیا گیا تھا۔

مسئلہ 7-1 : کسی بھی دو درجی مساوات

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0), \tag{7-9}$$

کے دونوں حل ہیں

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}. \tag{7-10}$$

ثبوت : اگر مساوات (7-9) میں x^2 کے ضریب سے ہم تقسیم کریں اور مستقل رکن کو مساوات

کے دائیں طرف منتقل کر دیں تو ہمیں حاصل ہوگا

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}.$$

بائیں ممبر کے مربع کو ہم مساوات کے دونوں طرف $b^2/4a^2$ جوڑ کر مکمل کر سکتے ہیں

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a},$$

یا

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

اگر ہم جذر المربع نکالیں تو یہ ہوگا

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

یا

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

دو درجی مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کے دونوں جذر ایک دفعہ جوڑ کی علامت اور پھر نفی کی علامت استعمال کرنے سے حاصل ہوتے ہیں۔ مطالعہ کرنے والے اس بات کا امتحان کہ یہ جذر واقعی حل ہیں مساوات (9-7) میں تبدیل کر کے کر سکتے ہیں۔

اگرچہ کوئی بھی دو درجی مساوات مربع کی تکمیل کے طریقے سے، جو اس ضابطہ کو حاصل کرنے کے لیے استعمال کیا گیا ہے، حل کی جا سکتی ہے۔ لیکن مساوات (10-7) میں بیان کردہ طریقہ اس کی استعداد کی وجہ سے عام طور سے استعمال کیا جاتا ہے۔ مندرجہ ذیل مثالوں پر غور کرو۔

مثال 3 : دو درجی مساوات $4x^2 + 5x = 21$ کو حل کرو۔

حل : تمام ارکان کو بائیں طرف ایسے تبدیل کرتے ہوئے کہ مساوات اس شکل میں رکھی جا سکے $ax^2 + bx + c = 0$ اور دونوں کا موازنہ کر کے ہمیں حاصل ہوگا $a = 4$، $b = 5$ اور $c = -21$، ان قیمتوں کو مساوات (10-7) میں بدل کر ہمیں حاصل ہوگا

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{(5)^2 - 4(4)(-21)}}{2(4)}.$$

آسان کرنے سے حاصل ہوگا:

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 336}}{8} = \frac{-5 \pm \sqrt{361}}{8} = \frac{-5 \pm 19}{8}.$$

اس لیے پہلے جوڑ کی علامت اور پھر نفی کی علامت اخذ کر کے ہمیں حاصل ہوگا

$$x = \tfrac{7}{4} \quad \text{یا} \quad -3.$$

دونوں جوابوں کو اصل مساوات میں بدل کر جانچ کرنی چاہیے۔ یہ حقیقت کہ جذر المربع کی علامت کے تحت عدد ایک مکمل مربع ہے اس بات کی ضامن ہے کہ جذر ناطق ہیں۔ اس لیے دی ہوئی مساوات اجزا ضربی کے طریقے سے حل کی جا سکتی تھی۔ خصوصاً

$$4x^2 + 5x - 21 = (4x - 7)(x + 3).$$

مثال 4 : $\cos^2\theta + 5\sin\theta + 2 = 0$ کو θ کی تمام اُن قیمتوں کے لیے حل کرو جو 0 اور 2π کے درمیان ہوں۔

حل : کیونکہ $\cos^2\theta$ کو $1 - \sin^2\theta$ میں ظاہر کیا جا سکتا ہے تو مساوات کو مکمل طور پر $\sin\theta$ کے ارکان میں لکھنا ممکن ہے۔ اس طرح

$$1 - \sin^2\theta + 5\sin\theta + 2 = 0,$$
$$\sin^2\theta - 5\sin\theta - 3 = 0.$$

$\sin\theta$ کو بہ حیثیت ایک مقدار متغیرہ کے مانتے ہوئے اور مساوات (7-10) کو استعمال کر کے ہمیں حاصل ہوگا $a = 1$ ، $b = -5$ اور $c = -3$ اس لیے

$$\sin\theta = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 12}}{2} = \frac{5 \pm 6.0828}{2},$$

یا

$$\sin\theta = 5.5414 \quad \text{یا} \quad -0.5414.$$

کیوں کہ $|\sin\theta| \leq 1$ ہم صرف -0.5414 کو ہی زیر غور رکھتے ہیں جس کے نتیجے کے طور پر θ کی ایک قیمت π اور $3\pi/2$ کے درمیان اور دوسری قیمت $3\pi/2$ اور 2π کے درمیان ملتی ہے۔ جدول I کے استعمال سے ہمیں معلوم ہوا کہ $\sin\alpha = 0.5414$ یعنی $\alpha = 0.5721$ ، اس لیے

$$\theta = 3.1416 + .5721 = 3.7137$$

یا

$$6.2832 - .5721 = 5.7111.$$

کوئی بھی دو درجی مساوات کے حل کرنے کا عام طریقہ ہے :

(1) مساوات کو اجزاءِ ضربی کے طریقے سے حل کرنے کی کوشش کی جائے۔

(2) اگر یہ طریقہ اس لیے ناکامیاب ہو جائے کہ یا تو اجزاءِ ضربی فوراً ہی واضح نہ ہوں یا اُن کا بہ حیثیت ناطق اجزا کے وجود ہی نہ ہو تو پھر دو درجی ضابطہ استعمال کرو۔

سوالات

سوال 1 سے 19 تک کی مساوات دو درجی ضابطہ کے ذریعے حل کرو۔ اگر مساوات میں دائری تفاعل شامل ہوں تو اُن کی 0 اور 2π کے درمیان کی تمام قیمتیں نکالو۔ تمام جوابات کی جانچ کرو

.1 $2x^2 + 5x - 12 = 0$ .2 $4x^2 - 2x = 7$

.3 $x^2 + x - 1 = 0$ .4 $2x^2 + x - 12 = 0$

.5 $\tan^2\theta - 3\sec\theta + 3 = 0$ .6 $2\cos^2\theta + 3\sin\theta = 0$

[اشارہ : $\tan^2\theta \equiv \sec^2\theta - 1$]

.7 $x^2 - (a+b)x + ab = 0$ .8 $6x^2 + 17x + 12 = 0$

.9 $(a-b)x^2 + (b-c)x + (c-a) = 0$

.10 $4\sin^2\theta - 3\cos\theta - 2 = 0$ .11 $3\sec^2\theta + \tan\theta - 5 = 0$

.12 $x^2 - 2x + 1 = 4a^2$ .13 $\dfrac{x-1}{x^2-9} - \dfrac{3x+5}{x+3} = \dfrac{x+3}{x-3}$

.14 $\cot 2\theta = 2 + \tan 2\theta$ .15 $4\sin^2 2\theta + 2\cos 2\theta = 3$

.16 $6ax^2 - 2bx + 3b = 9ax$ .17 $s = v_0 x - gx^2/2$

.18 $\tan 2\theta + 5 = 3\sec^2 2\theta$ .19 $\dfrac{1}{x^2+3x+2} - \dfrac{1}{1-x} = \dfrac{2}{x^3-1}$

.20 اگر دو متواتر مثبت اعداد صحیح کا حاصل ضرب 72 ہو تو اعداد صحیح نکالو۔

.21 ایک عدد اور اُس کے مقلوب کا جوڑ 34/15 ہے، تو عدد معلوم کرو۔

.22 ایک آدمی کو 40 میل سفر کرکے یہ پتہ چلتا ہے کہ اگر وہ اپنی رفتار ایک میل فی گھنٹہ بڑھا دے تو اُس کا سفر 2 گھنٹے کم میں ختم ہو جائے گا تو بتاؤ وہ حقیقت میں کتنے میل فی گھنٹہ چلا؟

.23 اگر ایک مثلث قائم الزاویہ کے تینوں اضلاع کی لمبائی $(6-x)$ ، $(13-x)$ اور $(14-x)$ ہو تو x کی قیمت معلوم کرو۔

.24 ایک دائرہ کا رقبہ 49π مربع انچ کم کرنے کے لیے 24 انچ کا نصف قطر کتنا کم کر دینا چاہیے؟

25. ایک 30 گز لمبی اور 24 گز چوڑی مستطیل کیاری کے چاروں طرف ایک یکساں چوڑائی کا چہل قدمی کا راستہ بنا ہوا ہے۔ اگر راستے کا رقبہ کیاری کے رقبے کا ایک چوتھائی ہو تو راستے کی چوڑائی بتاؤ۔

26. دو آدمی ساتھ ساتھ کام کر کے ایک کام کو 20 دن میں کر سکتے ہیں۔ علاحدہ علاحدہ کام کرنے سے اُسے پورا کرنے کے لیے ایک کو دوسرے سے 9 دن زیادہ لگیں گے تو ہر ایک کو علاحدہ علاحدہ کتنے دن لگیں گے؟

7-5 . متماثلہ: اس کتاب میں زیر بحث آئی ہوئیں زیادہ تر متماثلہ میں ایک درجی یا دو درجی جبریہ عبارت شامل ہے، اس لیے یہ مناسب معلوم ہوتا ہے کہ انھیں اسی باب میں زیر بحث لایا جائے۔ طالب علم کو دفعہ 1-4 کے بنیادی مسائل اور ترتیبی موضوعہ پر نظر ثانی کر لینا چاہیے۔

یہ بیان کہ ایک ریاضیاتی عبارت دوسری سے چھوٹی یا بڑی ہے غیر مساوات کہلاتی ہے جیسا کہ مساوات کے لیے صحیح ہے (دفعہ 1-6)، اُسی طرح ریاضی میں غیر مساوات کی دو عام قسمیں ہیں۔ مشروط غیر مساوات مطابق مشروط مساوات اور مطلق غیر مساوات مطابق موضوعہ۔

تعریف 7-4 : ایک غیر مساوات جو شامل متغیرّہ کی تمام جائز قیمتوں کے لیے صدق ہو اُسے مطلق غیر مساوات کہتے ہیں۔

اگرچہ کوئی مساوات جو قیمتوں کے ایک مکمل سٹ کے لیے صادق ہو، اگر وہ ہر ایک جائز قیمت کے لیے صادق نہیں ہے تو غیر مساوات مطلق نہیں کہلائے گی۔

تعریف 7-5 : کوئی مساوات اگر وہ شامل متغیرّہ کی تمام جائز قیمتوں کے لیے صادق نہیں ہے تو وہ مشروط غیر مساوات کہلائے گی۔

تمثیل : غیر مساوات $a^2 + b^2 + 1 > 0$ ایک مطلق غیر مساوات ہے۔ عبارت $3 > -4$ بھی اسی قسم کی ہے۔ لیکن $2x - 6 > 0$ ایک مشروط غیر مساوات ہے کیونکہ یہ x کی صرف اُن قیمتوں کے لیے صحیح ہے جو 3 سے بڑی ہیں۔ مزید یہ کہ $\sin\theta < 0$ بھی مشروط ہے کیوں کہ یہ صرف اُس وقت صادق آتی ہے جبکہ $P(\theta)$ تیسرے یا چوتھے ربع میں ہو۔

جیسا کہ مساوات کے ساتھ کام کرتے وقت صحیح ہے اسی طرح غیر مساوات کے ساتھ کام کرتے

وقت چند مخصوص اہم خصوصیات کو یاد رکھنا چاہیے۔ مندرجہ ذیل مسائل کے ثبوت بالواسطہ وغیرہ 1-4 کے مسائل اور موضوعہ کے لازمی نتیجہ ہیں۔

مسئلہ 7-2 : اگر غیر مساوات کے دونوں اطراف میں ایک ہی عدد جوڑا یا گھٹایا جائے تو اُس کا مطلب نہیں بدلتا۔

ثبوت : یہ موضوعہ O3 کا بالواسطہ نتیجہ ہے جس میں c خواہ مثبت ہو یا منفی۔ اس خصوصیت کا فائدہ اس بات میں ہے کہ کسی رکن کو غیر مساوات کے ایک ممبر سے دوسرے ممبر کی طرف رکن کی علامت تبدیل کر کے بغیر غیر مساوات کا مطلب بدلے ہوئے تبدیل کیا جا سکتا ہے۔

مسئلہ 7-3 : کسی غیر مساوات کے اگر دونوں اطراف کو ایک ہی مثبت عدد سے ضرب یا تقسیم کر دیا جائے تو غیر مساوات کا مطلب نہیں بدلتا ہے۔

یہ موضوعہ O4 کی مزید وضاحت کرتا ہے۔

مسئلہ 7-4 : اگر کسی غیر مساوات کے دونوں ممبران کو کسی ایک ہی منفی عدد سے ضرب یا تقسیم کیا جائے تو غیر مساوات کا مطلب اُلٹ جاتا ہے۔

یہ مسئلہ 4-3 کی مزید توضیح ہے۔

کیوں کہ ہماری خواہش اپنی بحث کو صرف ایک متغیر والی غیر مساوات کی حد تک ہی رکھنا ہے، اس لیے ہماری دلچسپی صرف اُنھیں غیر مساواتوں میں ہے جو $f(x) > 0$ یا $f(x) < 0$ لکھی جا سکیں۔ اوّل ہمیں مشروط غیر مساوات پر بحث کرنا چاہیے۔ ایسی غیر مساوات کو حل کرنے کے لیے ہمیں x کی قیمتوں کے اُس سٹ کو معلوم کرنا چاہیے جس کے لیے غیر مساوات صادق ہے۔ جب $f(x)$ خطی یا دو درجی ہو تو یہ سٹ دونوں میں سے کسی ایک جبریہ یا گراف کے طریقے سے نکالا جا سکتا ہے۔

مثال 1 $\frac{x}{3} - 2 < \frac{5x + 9}{2}$

کو جبریہ اور اشکال (گراف) دونوں ہی طریقے سے حل کرو۔

جبریہ حل : دونوں طرف 6 سے ضرب دے کر ہمیں حاصل ہوگا

$$2x - 12 < 15x + 27.$$

یکساں ارقام کو تبدیل کر کے اور جوڑ کے، ہمیں حاصل ہوگا

$$-13x < 39.$$

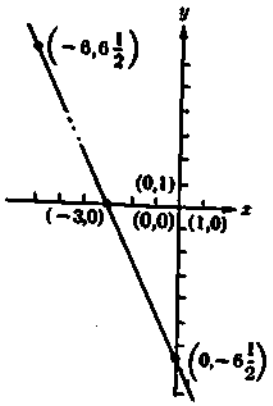
اگر ہم 13− سے تقسیم کر دیں تو حل ہوگا $x > -3$ یا $\{x | x > -3\}$

گراف کے ذریعے سے حل : اگر ہم غیر مساوات کے تمام ارکان کو بائیں طرف منتقل کر دیں تو حاصل ہوگا

$$\frac{x}{3} - 2 - \frac{5x+9}{2} < 0.$$

اس بائیں رکن کی $f(x)$ سے نمائندگی کر کے ہمیں حاصل ہوگا

$$f(x) \equiv \frac{2x - 12 - 15x - 27}{6} \equiv \frac{-13x - 39}{6}.$$



شکل 2-7

شکل 2-7 کے گراف $y = f(x)$ سے جو کہ مندرجہ ذیل جدول سے آسانی سے کھینچا جا سکتا ہے یہ صاف ظاہر ہے کہ غیر مساوات $x > -3$ سے مطمئن ہو جاتی ہے کیوں کہ x کی ان قیمتوں کے لیے $x, y = f(x)$ محور کے نیچے ہے یعنی $f(x) < 0$ ۔ گراف کا طریقہ زیادہ تر دو درجی غیر مساوات کے لیے استعمال ہوتا ہے۔

x	0	−3	−6
y	$-6\frac{1}{2}$	0	$6\frac{1}{2}$

مثال 2 : غیر مساوات $x^2 - x - 6 > 0$ ، x کی کن قیمتوں کے لیے صادق ہے؟

حل : اگر ہم عبارت کے اجزا ضربی نکالیں تو حاصل ہوگا :

$$x^2 - x - 6 \equiv (x - 3)(x + 2).$$

کیوں کہ دو ارکان کا حاصل ضرب صرف اُس وقت مثبت ہوگا جبکہ دونوں مثبت ہوں یا دونوں ہی منفی (دفعہ 1-4 کا سوال 10)۔ اس لیے $(x-3)$ اور $(x+2)$ دونوں ہی صفر سے بڑے ہوں یا دونوں ہی 0 سے کم ہوں۔ ہم دیکھتے ہیں کہ

دونوں ہی صادق ہوں گے اگر $x > 3$ ، $\begin{Bmatrix} x > 3 \\ \text{اور} \\ x > -2 \end{Bmatrix}$ یا $\begin{Bmatrix} x-3 > 0 \\ \text{اور} \\ x+2 > 0 \end{Bmatrix}$

اور

دونوں ہی صادق ہوں گے اگر $x < -2$ ، $\begin{Bmatrix} x < 3 \\ \text{اور} \\ x < -2 \end{Bmatrix}$ یا $\begin{Bmatrix} x-3 < 0 \\ \text{اور} \\ x+2 < 0 \end{Bmatrix}$

پس غیر مساوات کا حل ہے

$$\{x | x > 3 \text{ یا } x < -2\}.$$

اس کی جانچ گراف کے ذریعے شکل (5-5) سے کی جا سکتی ہے۔ سٹ کی اُس قیمت کے لیے جس کے لیے غیر مساوات صادق ہو، جانچ کرنا اکثر مددگار ثابت ہوتا ہے؛ اگرچہ یہ مکمل صحیح حل کا ضامن نہیں ہے پھر بھی یہ کام کی جانچ کرنے میں اکثر مددگار ثابت ہوتا ہے۔

مثال 3 : غیر مساوات $-2x^2 + 12x - 14 > 0$ ، x کی کن قیمتوں کے لیے صادق ہے؟

حل : کیوں کہ بائیں رکن کے اجزا معقول طریقے سے نہیں نکالے جا سکتے اس لیے گراف کا طریقہ ہم استعمال کرتے ہیں۔ شکل (1-7) کا گراف اس تفاعل کا ہوگا

$$y = f(x) = -2x^2 + 12x - 14,$$

جن کے صفر کی قیمت تقریباً 1.6 اور 4.4 ہوگی۔ پس یہ غیر مساوات اس سٹ کے لیے صادق ہے

$$\{x | 1.6 < x < 4.4\}.$$

اگر ہم صفروں کو زیادہ صحیح نکالنا چاہیں تو مساوات $-2x^2 + 12x - 14 = 0$ یا اُس کے برابر کی مساوات $x^2 - 6x + 7 = 0$ کے لیے دو درجی ضابطہ نکال سکتے ہیں :

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 28}}{2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 3 \pm \sqrt{2}.$$

اس لیے

$$x = 4.414 \quad \text{یا} \quad 1.586,$$

اور نتیجے کے طور پر حل اس طرح لکھا جائے گا $\{x | 1.586 < x < 4.414\}$

مثال 4 : θ کی ایسی قیمتیں نکالو کہ $0 \leq \theta < 2\pi$ جو مندرجہ ذیل مساوات کو مطمئن کریں:

$$2\cos^2\theta + \sin\theta < 2$$

حل : کیوں کہ $\cos^2\theta \equiv 1 - \sin^2\theta$ ہم غیر مساوات کی طرفین بہ حیثیت $\sin\theta$ کے تفاعل کے ظاہر کر سکتے ہیں : $2(1 - \sin^2\theta) + \sin\theta < 2,$

اور آسان کر کے حاصل ہوگا

$$2 - 2\sin^2\theta + \sin\theta - 2 < 0,$$

یا

$$\sin\theta(1 - 2\sin\theta) < 0.$$

کیوں کہ دو اقدار کا حاصل ضرب منفی ہوگا اگر ان میں سے ایک منفی ہو جبکہ دوسری مثبت (دفعہ 1–4 کا سوال 11)، ہمیں حاصل ہوگا

$$\begin{Bmatrix}\sin\theta < 0 \\ \text{اور} \\ \sin\theta < \frac{1}{2}\end{Bmatrix} \text{ جس سے حاصل ہوگا } \begin{Bmatrix}\sin\theta < 0 \\ \text{اور} \\ 1 - 2\sin\theta > 0\end{Bmatrix}$$

یا

$$\begin{Bmatrix}\sin\theta > 0 \\ \text{اور} \\ \sin\theta > \frac{1}{2}\end{Bmatrix} \text{ جس سے حاصل ہوگا } \begin{Bmatrix}\sin\theta > 0 \\ \text{اور} \\ 1 - 2\sin\theta < 0\end{Bmatrix}$$

اوّل سٹ اُس وقت مطمئن ہوگا جبکہ $\sin\theta < 0$ اور دوسرا مطمئن ہوگا اگر $\sin\theta > \frac{1}{2}$ وہ سٹ جس سے حل ہوگا۔ ہے

$$\left\{\theta \middle| \frac{\pi}{6} < \theta < \frac{5\pi}{6} \text{ یا } \pi < \theta < 2\pi\right\}.$$

سوالات

x کی وہ قیمتیں معلوم کرو جس کے لیے مندرجہ ذیل غیر مساواتیں مطمئن ہوتی ہوں جبریہ یا گراف کا دونوں میں سے کوئی سا بھی طریقہ استعمال کرو :

1. $3x - 27 > 0$
2. $2x - 12 < 0$
3. $2x + 5 > 4x - 9$
4. $5x - 3 < 8x - 12$
5. $x^2 + 2x > 99$
6. $2x^2 + 3x < 14$
7. $6x^2 + x < 1$
8. $6x^2 - x > 35$
9. $x^2 + 2x > 12$
10. $x^2 + 2x + 4 > 0$
11. $x^4 + x^2 < 0$
12. $\frac{x-2}{x-5} > 0$

ہمیں حاصل ہوگا

$$x^2 - 2x + 1 \geq 0. \qquad (7\text{–}12)$$

جس کے متعلق ہمیں معلوم ہے کہ صادق ہے کیوں کہ $x^2 - 2x + 1 \equiv (x-1)^2$

(دفعہ 4–1 سوال 12) اس لیے ہمارا ثبوت غیر مساوات (7–12) سے شروع ہوتا ہے کیوں کہ

$$x^2 - 2x + 1 \geq 0,$$

x کی تمام حقیقی قیمتوں کے لیے۔ اب دونوں ممبروں میں $2x$ جوڑنے سے ہمیں حسب خواہش یہ نتیجہ حاصل ہوگا

$$x^2 + 1 \geq 2x.$$

مثال 6 : ثابت کرو کہ کسی مثبت عدد اور اُس کے مقلوب کا جوڑ 2 سے بڑا یا اُس کے برابر ہوگا

حل : اگر ہم x کو کوئی سا مثبت عدد مان لیں تو ہمیں ثابت کرنا ہے

$$x + \frac{1}{x} \geq 2. \qquad (7\text{–}13)$$

اگرچہ یہ ایک مطلق غیر مساوات نہیں ہے۔ ہم اسے ثابت کرنے کے لیے ایک اور استعمال کریں گے۔ اگر ہم مساوات (7–11) کے دونوں ممبروں کو x سے جو کہ مثبت ہے تقسیم کر دیں تو ہمیں مطلوبہ غیر مساوات حاصل ہو جائے گی۔

ہم شاید یہ ثابت کرنے میں دلچسپی رکھتے ہوں کہ بعض غیر مساوات اُس وقت بھی صادق ہوتی ہیں جبکہ اُن میں دائری تفاعل شامل ہوں۔

مثال 7 : مطلق غیر مساوات $3 \sin\theta + 4 \cos\theta \leq 5$. کو ثابت کرو۔

حل : دفعہ 6–9 کے سوال 5 کو دھیان میں رکھ کر ہمیں حاصل ہوگا :

$$3 \sin\theta + 4 \cos\theta = 5 \sin(\theta + \theta_1) \leq 5,$$

کیوں کہ تمام α کے لیے $\sin\alpha \leq 1$

سوالات

مندرجہ ذیل میں سے ہر ایک غیر مساوات کو ثابت کرو۔ سوال 1 سے 10 تک میں حروف غیر مساوی مثبت اعداد کی نمائندگی کرتے ہیں اور θ ، α اور β کوئی سے بھی حقیقی اعداد گی بتائیے کہ کون سی مشروط اور کون سی مطلق غیر مساوات ہیں :

1. $a^2 + b^2 > 2ab$ 2. $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} > 2$

3. $\frac{x+y}{2} > \sqrt{xy}$ 4. $\frac{a+b}{2} > \frac{2ab}{a+b}$

5. $\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} > x + y$ 6. $x^3 + y^3 > x^2y + xy^2$

7. $x^2 + y^2 + z^2 < (x + y + z)^2$ 8. $a^2 + 2a + 2 > 0$

9. $|a + b| \leq |a| + |b|$ 10. $|a - b| \geq |a| - |b|$

11. $|\sin\theta| + |\csc\theta| \geq 2$ 12. $|\cos\theta| + |\sec\theta| \geq 2$

13. $|\cos^4\theta - \sin^4\theta| \leq 1$ 14. $|\sin(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta)| \leq 1$

15. $\sin\theta + \cos\theta \leq \sqrt{2}$ 16. $\sin^2\theta + \cot^2\theta \geq 2\cos\theta$

17. $12\sin\theta - 5\cos\theta \leq 13$ 18. $4\sin\theta + 3\cos\theta \leq 6$

7-6 . دو درجی تفاعل کے ضریب اور ان کے صفروں کے درمیان تعلق

مساوات (7-10) کے علاوہ جو اس دو درجی تفاعل $f: x \to ax^2 + bx + c$ کے صفر کو ضریب کے ارکان میں بتاتی ہے۔ صفر اور اضعاف کے درمیان اور بھی تعلق ہیں۔ r_1 اور r_2 کو $ax^2 + bx + c$ کے صفر مان کر جہاں

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \tag{7-14}$$

دونوں صفروں کی حاصل جمع ہوگی

$$\boxed{r_1 + r_2 = -\frac{b}{a}.} \tag{7-15}$$

اسی طرح ہمیں حاصل ضرب حاصل ہوگا

$$r_1 \cdot r_2 = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{b^2 - 4ac})^2}{4a^2}$$

$$= \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2},$$

یا

$$\boxed{r_1 \cdot r_2 = \frac{c}{a}.} \tag{7-16}$$

کیوں کہ تفاعل $f: x \to ax^2 + bx + c$ کے صفر اور اُس مساوات کے جذر جو $f(x)$ کی تفاعلی قیمت کو صفر کے برابر رکھ کر حاصل ہوتی ہے ایک ہی ہیں۔ مساوات (7-15) اور (7-16) ایسی مساوات کے بنانے میں کار آمد ثابت ہوں گی۔ مندرجہ ذیل مسئلہ اس قول کی وضاحت کرے گا۔

مسئلہ 7-5 : اگر کوئی دو درجی مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کو اس طرح لکھا جائے

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0, \qquad (7\text{-}17)$$

تاکہ x^2 کا ضریب اکائی ہو تو (1) جذر کے جوڑ x کے ضریب کے منفی ہوں گے اور (2) جذر کے حاصل ضرب مستقل رکن کے برابر ہوگا۔

ثبوت : ہم ان نتائج کو ثابت کرنے کے لیے x کے ضریب کا موازنہ مساوات (7-15) اور مستقل رکن کا مساوات (7-16) کے ساتھ کرتے ہیں۔

مثال 1 : $f: x \to 3x^2 - 4x + 8$ کے صفر بغیر حاصل کیے ہوئے ان صفروں کا حاصل ضرب اور جمع نکالو۔

حل : کیوں کہ $a = 3$ ، $b = -4$ اور $c = 8$ جمع ہوگی $-(-4/3) = \frac{4}{3}$ اور حاصل ضرب ہوگا $\frac{8}{3}$

مثال 2 : ایسی دو درجی مساوات کے لیے جس کے جذر ہوں $3 + \sqrt{2}$ اور $3 - \sqrt{2}$ مساوات بناؤ۔

حل : کیوں کہ $(3 + \sqrt{2}) + (3 - \sqrt{2}) = 6$ اور

$$(3 + \sqrt{2})(3 - \sqrt{2}) = 9 - 2 = 7$$

اس قسم کی مساوات ہوگی $x^2 - 6x + 7 = 0$

مثال 3 : بغیر حل کیے ہوئے ایسی دو درجی مساوات بناؤ جس کے جذر دی ہوئی مساوات $2x^2 + x - 6 = 0$ کے جذر کے مربع ہوں۔

حل : فرض کرو کہ دی ہوئی مساوات کے جذر ہیں r_1 اور r_2 تو

$$r_1 + r_2 = -\tfrac{1}{2}, \qquad r_1 r_2 = -3.$$

چونکہ $(r_1 + r_2)^2 = r_1^2 + 2r_1r_2 + r_2^2$ نئی مساوات کے جذر کا جوڑ ہوگا

$$r_1^2 + r_2^2 = (r_1 + r_2)^2 - 2r_1r_2 = \tfrac{1}{4} + 6 = \tfrac{25}{4},$$

اور حاصل ضرب ہوگا $(r_1r_2)^2 = 9.$

اس لیے مطلوبہ مساوات ہوگی $x^2 - 3x + 9 = 0$

یا کسر کو آسان کرکے $4x^2 - 25x + 36 = 0$

مساوات (7-14) کی علامت جذر کے تحت عبارت $b^2 - 4ac$ ایک ایسی دوسری مقدار ہے جو اضعاف کے ارکان میں تفاعل کے صفر کی نوعیت پر غور کرنے میں اہم ہے۔ اگر یہ عبارت جو کہ مُمیِّز کہلاتی ہے منفی ہو تو حقیقی جذر المربع کا ہی وجود نہ ہوگا۔ صفر فرضی ہوں گے۔ ایسے اعداد پر بحث باب 10 میں ہوگی۔ اگر $b^2 - 4ac$ صفر کے برابر ہو تو $r_1 = r_2$ اور صفر آپس میں برابر ہوں گے جبکہ اگر $b^2 - 4ac$ مثبت ہو تو صفر حقیقی اور غیر مساوی ہوں گے۔ کیوں کہ تفاعل $f: x \to ax^2 + bx + c$ کے صفر اور مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کے جذر ایک ہی ہیں ہمیں فوراً ہی مندرجہ ذیل مسئلہ حاصل ہوگا۔

مسئلہ 7-6 : $ax^2 + bx + c = 0$ دو درجی مساوات پر غور کرو :

(1) اگر $b^2 - 4ac < 0$ ہو تو جذر فرضی ہوں گے۔

(2) اگر $b^2 - 4ac = 0$ ہو تو جذر برابر ہوں گے۔

(3) اگر $b^2 - 4ac > 0$ ہو تو جذر حقیقی اور نابرابر ہوں۔

اگر ہم $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ کے گراف کو بہ نسبت مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کے جذر پر اہمیت دینا چاہتے تو مندرجہ ذیل مسئلہ بیان کرتے۔

مسئلہ 7-7 : دو درجی تفاعل $f(x) = ax^2 + bx + c$ پر غور کرو۔

(1) اگر $b^2 - 4ac < 0$ تو قطع مکافی کا گراف x محور کو نہ چھوئے گا اور نہ کاٹے گا

(2) اگر $b^2 - 4ac = 0$ تو قطع مکافی کے گراف کی راس x محور پر ہوگی۔

(3) اگر $b^2 - 4ac > 0$ تو قطع مکافی کا گراف x۔ محور کو دو حقیقی نقاط پر قطع کرتا ہے۔

مثال 4 : $f: x \to 2x^2 - 9x - 35$ کے صفر کی نوعیت مساوات کو بغیر حل کیے معلوم کرو۔

حل کیوں کہ $a = 2$ ، $b = -9$ اور $c = -35$ ،

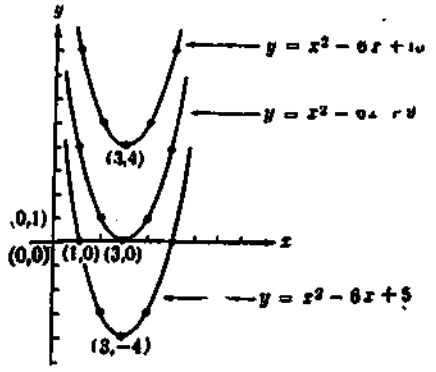
$b^2 - 4ac = (-9)^2 - 4(2)(-35) = 81 + 280 = 361$ کیونکہ $361 > 0$

تو صفر حقیقی اور غیر مساوی ہوں گے۔ مزید یہ کہ $b^2 - 4ac = 361$ ایک کامل مربع ہے صفر ناطق ہوں گے۔ اگر $b^2 - 4ac$ کامل مربع ہو تو کیا یہ ہمیشہ صادق ہوگا؟

مثال 5 : ایک ہی محدّد محور پر مندرجہ ذیل کے گراف کھینچو :

(a) $y = x^2 - 6x + 5$,
(b) $y = x^2 - 6x + 9$,
(c) $y = x^2 - 6x + 13$.

ہر حصّے میں نتیجے کی جانچ $b^2 - 4ac$ معلوم کر کے کیجیے۔



شکل 7-3

حل : شکل (7-3) میں ہر ایک مساوات کا گراف کھینچا گیا ہے۔ یہ $b^2 - 4ac$ کی قیمتوں کے مطابق ہے کیوں کہ

(a) $b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4(1)(5) = 16$,
(b) $b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4(1)(9) = 0$,
(c) $b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4(1)(13) = -16$.

سوالات

1. دفعہ 7-3 کے سوال 1 سے 8 تک میں بغیر حل کیے ہوئے، تفاعل کے صفر کے حاصل ضرب اور جوڑ نکالو۔

مندرجہ ذیل دیے ہوئے اعداد کو جذر مان کر ایسی دو درجی مساوات معلوم کرو جن کے ضریب اعداد صحیح ہوں۔

2. $2, -3$
3. $-6, 4$
4. $\frac{3}{2}, -2$
5. $-\frac{2}{3}, \frac{3}{2}$

6. $+\sqrt{3}, -\sqrt{3}$ 7. $2+\sqrt{3}, 2-\sqrt{3}$

8. $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ 9. $\frac{-3+\sqrt{7}}{4}, \frac{-3-\sqrt{7}}{4}$

10. وہ دو درجی مساوات نکالو جس کے جذر اس مساوات $4x^2+8x-5=0$ کے جذر کے مربع ہوں۔

11. ایک ایسی دو درجی مساوات نکالو جس کے جذر $4x^2+8x-5=0$ کے جذر کے مقلوب ہوں اشارہ: $\left[\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}=\frac{r_1+r_2}{r_1r_2}\right]$

12. ایک ایسی دو درجی مساوات معلوم کرو جس کے جذر $3x^2-5x-2=0$ کے جذر کے مربع ہوں۔

13. ایک ایسی دو درجی مساوات معلوم کرو جس کے جذر $3x^2-5x-2=0$ کے جذر کے مقلوب ہوں۔

14. ایک ایسی دو درجی مساوات معلوم کرو جس کے جذر $4x^2+8x-5=0$ کے جذر کے دوگنے ہوں۔

15. ایک ایسی دو درجی مساوات نکالو جس کے جذر $4x^2+8x-5=0$ کے جذر کے ایک تہائی ہوں۔

16. ایک ایسی دو درجی مساوات نکالو جس کے جذر $3x^2-5x-2=0$ کے جذر کے تین گنے ہوں۔

17. ایک ایسی دو درجی مساوات نکالو جس کے جذر $3x^2-5x-2=0$ کے جذر کے آدھے ہوں۔

k کی وہ قیمت معلوم کرو تاکہ مساوات:

18. $4x^2+kx+6=0$ کا ایک جذر -2 ہو۔

19. $2x^2+kx-15=0$ کا ایک جذر 3 ہو۔

20. $3x^2+kx-2=0$ کے جذر کا جوڑ 6 ہو۔

21. $5x^2-8x+k=0$ کے جذر کا حاصل ضرب $\frac{1}{5}$ ہو۔

22. $4x^2+20x+k=0$ کے جذر آپس میں برابر ہوں۔

23. $3x^2-7x+k=0$ کے جذر آپس میں برابر ہوں۔

24. $2x^2+(4-k)x-17=0$ کے جذر عدداً برابر لیکن مخالف علامت کے ہوں۔

25. $3x^2-5x+8=kx$ کے جذر عدداً برابر لیکن علامت میں مخالف ہوں۔

26. $3x^2-7x+6=k$ کا ایک جذر صفر ہو۔

27. $4x^2+20x+k=0$ کا ایک جذر صفر ہو۔

k کی قیمتوں کی وہ سعت نکالو تاکہ مساوات :

28. $3x^2 - 4kx + k = 0$ کے جذر برابر ہوں۔

29. $2x^2 + 3kx - 9 = 0$ کے جذر برابر ہوں۔

30. $x^2 + (k-2)x + 4 = 0$ کے جذر برابر ہوں۔

31. $2x^2 - kx + 8 = 0$ کے جذر غیر حقیقی ہوں۔

32. $kx^2 + 4\sqrt{3}x + k = 1$ کے جذر غیر حقیقی ہوں۔

k کی قیمتوں کی سعت یا k کی وہ قیمت تاکہ تفاعل کا گراف جس میں y برابر ہو :

33. $3x^2 - 9x + k$ ، x محور کو مَس کرے گا (اُس کی راس x-محور پر ہوگی)۔

34. $x^2 + 2kx + \frac{1}{4} - k$ ، x محور کو قطع نہیں کرے گا۔

35 ثابت کرو کہ x اور y کی کوئی ایسی حقیقی قیمتیں نہیں ہیں کہ

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{x+y}.$$

7-7 . دو درجی قسم کی مساوات :

سابقہ چند دفعات میں ہم نے دو درجی تفاعل اور دو درجی مساوات پر بحث کی ہے۔ حل کیے ہوئے سوالوں میں خصوصی طور پر دائری تفاعل پر منحصر دو درجی مساوات نہیں تھیں بلکہ ایسی تھیں جنھیں ہم دو درجی قسم کی مساوات کہہ سکتے ہیں۔ عام طور پر کوئی بھی مساوات جس کو اس شکل میں لکھا جاسکے :

$$av^2 + bv + c = 0 \qquad (a \neq 0), \qquad (7\text{-}18)$$

جس میں v کو ایک دوسری متغیر کے ارکان میں ظاہر کیا گیا ہو دو درجی قسم کی مساوات کہتے ہیں۔ سابقہ دفعات میں تکمیل کیے گئے طریقے اس قسم کی کسی بھی مساوات میں یکساں طور سے لگائے جاسکتے ہیں۔

مثال 1 : $9x^4 - 37x^2 + 4 = 0$ کو حل کرو۔

حل : مان لو $v = x^2$ اور اس کو تبدیل کرکے حاصل ہوگا

$$9v^2 - 37v + 4 = 0,$$

یا

$$(9v - 1)(v - 4) = 0.$$

اس طرح $v = x^2 = \frac{1}{9}$ یا 4,

اور $x = \pm\frac{1}{3}$ یا ± 2.

مثال 2 : $(x^2 - 5x)^2 + (x^2 - 5x) - 30 = 0$ کو حل کرو۔

حل : رکھ کر ہم یہ دو درجی مساوات $v = x^2 - 5x$ میں حل کرنا چاہتے ہیں۔

$$v^2 + v - 30 = 0,$$

جس کے جذر

$$v = 5 \quad \text{یا} \quad -6.$$

پس ہمیں حل کرنا چاہیے

$$x^2 - 5x - 5 = 0 \quad \text{اور} \quad x^2 - 5x + 6 = 0.$$

جس کا حل ہے

$$x = (5 \pm 3\sqrt{5})/2, \ 3, \ \text{اور} \ 2$$

سوالات

مندرجہ ذیل مساوات کو x کے لیے حل کرو۔

1. $x^4 - 11x^2 + 28 = 0$
2. $9x^4 + 5x^2 - 4 = 0$
3. $x^{-4} - 13x^{-2} + 36 = 0$
4. $x^{-4} - 8x^{-2} + 15 = 0$
5. $x^6 + 7x^3 - 8 = 0$
6. $8x^{-6} + 7x^{-3} = 1$
7. $x^{2/3} + 2x^{1/3} - 8 = 0$
8. $x + x^{1/2} = 20$
9. $(x^2 - 7x)^2 + 9(x^2 - 7x) - 10 = 0$
10. $(x^2 + 2x)^2 + (x^2 + 2x) = 12$
11. $\frac{2+x}{2-x} + \frac{2-x}{2+x} = 2$
12. $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2\left(x + \frac{1}{x}\right) + 1 = 0,$
13. $3(x+3) + \sqrt{x+3} = 2.$
14. $2x - 9\sqrt{x+2} + 14 = 0$
15. $2x^2 - 5x + 10 = 7\sqrt{2x^2 - 5x}$
16. $x^2 - x - 4 = \sqrt{x^2 - x - 2}$

7-8 . مساوات جن میں علامت جذر شامل ہوں : دفعہ 7-7 کے آخری چار سوالوں میں علامت جذر شامل تھے۔ خوش قسمتی سے یہ ایک مخصوص قسم کی ہیں اور اُن کو مجوزہ طریقے سے حل کرنا ممکن ہے۔ علامت جذر والی بہت سی مساواتیں اس طریقے سے حل نہیں کی جا سکتیں، اس لیے پہلے علامت یا علامت جذر کو خارج کرنا ہوگا اور پھر حسب معمول طریقے اختیار کیے جا سکتے ہیں۔ اصل مساوات میں تمام ممکن جذر بدلنے کے لیے بہر صورت انتہائی احتیاط برتنا چاہیے کیوں کہ علامت جذر کے اسقاط کے طریقے میں مساوات کے طرفین کو کسی قوت سے اضافہ کرنا پڑتا ہے۔ یہ عمل (دفعہ 1-7 کی تمثیل 2

کو یاد کرو) آخری مساوات میں ایسے جذر شامل کر سکتا ہے جو اصل مساوات کے جذر نہ ہوں۔

مثال 1 : $\sqrt{2x+5} = 3$ کو حل کرو۔

حل : ایسی مساوات میں جس میں ایک ہی علامت جذر ہو ہمیں پہلے اُس علامت جذر کو مساوات کے طرفین کو مربع کر کے خارج کر دینا چاہیے :

$$2x + 5 = 9.$$

حل کرنے سے ہمیں حاصل ہوگا $x = 2.$

مساوات میں بدل کرنے سے ہمیں معلوم ہوگا کہ $x = 2$ اصل مساوات کو مطمئن کرتی ہے :

$$\sqrt{2(2)+5} = \sqrt{9} = 3,$$

اس طرح صرف $x = 2$ ہی مساوات کا جذر ہے۔

مثال 2 : $\sqrt{1-5x} + \sqrt{1-x} = 2$ کو حل کرو۔

حل : دو علامت جذر کے ساتھ یہ آسان ہے کہ مربع کرنے سے پہلے ایک کو مخالف جانب تبدیل کر دیا جائے۔ اس طرح $\sqrt{1-5x} = 2 - \sqrt{1-x}.$

مربع کر کے ہمیں حاصل ہوگا $1 - 5x = 4 - 4\sqrt{1-x} + 1 - x,$

$$-4x - 4 = -4\sqrt{1-x} \qquad \text{یا}$$

$$1 + x = \sqrt{1-x}. \qquad \text{یا}$$

دوبارہ مربع کر کے ہمیں حاصل ہوگا

$$1 + 2x + x^2 = 1 - x,$$
$$x^2 = -3x,$$
$$x = 0, -3. \qquad \text{یا}$$

اس لیے سوائے 0 اور -3 کے کوئی دوسرا عدد اصل مساوات کا جذر نہیں ہو سکتا۔ بدل کرنے سے معلوم ہوگا کہ 0 تو اصل مساوات کو مطمئن کرتا ہے لیکن (-3) نہیں، اس لیے صرف $x = 0$ ہی حل ہے۔

مثال 3 : θ کی 0 اور 2π کے درمیان والی تمام قیمتوں کے لیے $3\sin\theta + 4\cos\theta = 5$ کو حل کرو۔

حل : اگرچہ یہ جبریہ مساوات نہیں ہے لیکن یہ اس دفعہ میں زیرِ بحث آئے ہوئے طریقے سے حل کی جاسکتی ہے۔ $\cos\theta$ کو $\sin\theta$ کے ارکان میں ظاہر کرنے کے لیے ہم جانتے ہیں کہ

$$\cos\theta \equiv \pm\sqrt{1-\sin^2\theta}$$

اس طرح $$\pm 4\sqrt{1-\sin^2\theta} = 5 - 3\sin\theta.$$

مربع کرکے اور $\sin\theta$ کے لیے حل کرکے ہمیں حاصل ہوگا

$$16 - 16\sin^2\theta = 25 - 30\sin\theta + 9\sin^2\theta,$$
$$25\sin^2\theta - 30\sin\theta + 9 = 0,$$
$$(5\sin\theta - 3)^2 = 0,$$
$$\sin\theta = \tfrac{3}{5}.$$

اس لیے $\theta = 0.6464$ یا $\theta = 3.1416 - 0.6464 = 2.4952$

اپنے نتائج کو اصل مساوات میں بدل کرنے سے ہمیں معلوم ہوگا کہ $\theta = 0.6464$ ہی اکیلا حل ہے۔

سوالات

مندرجہ ذیل مساوات کو حل کرو اور جانچ کرو :

1. $\sqrt{2x+5} = .4$
2. $\sqrt{6x-3} = 7$
3. $\sqrt{8x-7} - x = 0$
4. $\sqrt{3x+1} + 1 = x$
5. $\sqrt{3x+1} = \sqrt{x}+3$
6. $2\sqrt{4x+5} = \sqrt{8-x} - 1$
7. $\sqrt{11-x} - \sqrt{x+6} = 3$
8. $\sqrt{3-x} - \sqrt{2+x} = 3$
9. $\sqrt{2x+\sqrt{2x+4}} = 4$
10. $\sqrt{2x+\sqrt{7+x}} = 3$

0 اور 2π کے درمیان کی θ کی وہ قیمتیں معلوم کرو اور جانچ کرو جو مندرجہ ذیل مساوات کو مطمئن کریں :

11. $4\sin\theta + 3\cos\theta = 2$
12. $\cos\theta - 2 = \sqrt{3}\sin\theta$
13. $\sin\theta + \cos\theta = 1$
14. $12\cos\theta - 5\sin\theta = 13$
15. $5\tan\theta - \sqrt{2}\sec\theta + 3 = 0$
16. $\tan\theta + \sec\theta = 1$

7-9 . نسبت : طبعی اور معاشرتی علوم میں بہت سے عمل ایک تفاعلی انحصار کا استعمال کرتے ہیں جو تناسب کے نام سے موسوم ہے۔ اکثر یہ تعلق خطی یا دو درجی ہوتے ہیں (حالانکہ ہمیشہ ایسا ہرگز نہیں ہوتا)۔ مثلاً اوہم کے برقی دور کے کلیہ میں بیان کیا گیا ہے کہ رَو براہِ راست متناسب ہے محرکہ برق کو اور بالعکس متناسب ہے مزاحمت کو۔ اسی طرح رَو

محرکہ برق اور مزاحمت دونوں کا تفاعل ہے۔ ہم یہ فعلی مساوات اس طرح لکھ سکتے ہیں

$$I = k \cdot \frac{E}{R},$$

جہاں k کو مستقل متناسبت کہتے ہیں۔ اب ہم نسبت کی تین مختلف عام قسموں کی تعریف کرتے ہیں۔

تعریف 7-6 : اگر دو متغیر x اور y اس طرح متعلق ہوں (اُن کی قیمتیں خواہ کیسے ہی بدلیں) کہ y تقسیم x کا خارج قسمت موسوم بہ y کی x کے ساتھ نسبت۔ مستقل ہو تو کہتے ہیں کہ y براہ راست x کے ساتھ بدلتا ہے۔ یہ تعلق ایسے لکھا جاتا ہے $y/x = k$ یا

$$\boxed{y = kx.} \qquad (7\text{-}19)$$

تعریف 7-7 : اگر دو متغیر x اور y ایسے متعلق ہوں (اُن کی قیمتیں خواہ کیسے ہی بدلیں) کہ y اور x کا حاصل ضرب مستقل ہو تو کہتے ہیں کہ y ، x کے ساتھ بالعکس بدلتا ہے۔ اس تعلق کو اس طرح لکھ سکتے ہیں کہ $yx = k$ یا

$$\boxed{y = \frac{k}{x}.} \qquad (7\text{-}20)$$

تعریف 7-8 : اگر متغیر z ، x کے ساتھ براہِ راست بدلتا ہے جب y مستقل ہو اور y کے ساتھ براہِ راست بدلتا ہے جب x مستقل ہو تو کہا جاتا ہے کہ z مشترکہ طور پر x اور y کے ساتھ بدلتا ہے اور لکھا جاتا ہے

$$\boxed{z = kxy.} \qquad (7\text{-}21)$$

مثال 1 : اگر z براہِ راست x سے متناسب ہو اور بالعکس y کے مربع سے اور $z = 18$ جبکہ $x = 3$ ، $y = 2$ تو z کو x اور y کے خصوصی تفاعل مساوات کی حیثیت سے ظاہر کرو۔

حل : دیا ہوا تناسب اس طرح لکھا جا سکتا ہے

$$z = k\frac{x}{y^2}.$$

x ، y اور z کی قیمتیں بدل کر ہمیں حاصل ہوگا $18 = k(\frac{3}{4})$ اور $k = 24$

اس لیے تفاعلی مساوات لکھی جا سکتی ہے $z = \frac{24x}{y^2}$.

مثال 2 : مستقل درجۂ حرارت پر تار کی مزاحمت لمبائی کو براہِ راست متناسب ہے اور بالعکس قطر کے مربع کو۔ اگر ایک ایسے تار کی مزاحمت 0.1 اوہم ہو جس کا قطر 0.1 انچ اور لمبائی 50 فٹ ہو تو اُسی جنس کے ایک تار کے ٹکڑے کی مزاحمت نکالو جو 2000 فٹ لمبا اور 0.2 انچ قطر کا ہو۔

حل : فرض کرو کہ R ، L اور d علی الترتیب تار کی مزاحمت، لمبائی اور قطر کی نمائندگی کرتے ہیں تو ہم لکھیں گے $R = kL/d^2$

قیمتیں بدل کر $0.1 = k(50)/(0.1)^2$,

یا $k = (0.1)^3/50$

پس $R = \frac{(0.1)^3}{50}\cdot\frac{L}{d^2}$.

اس لیے $R = \frac{(0.1)^3}{50}\cdot\frac{(2000)}{(0.2)^2} = \frac{(0.001)(2000)}{50(0.04)} = 1$ اوہم

نوٹ کرو کہ تمام پیمائشیں ایک ہی اکائی میں ظاہر کرنا ضروری نہیں حالانکہ ہمیں ہر ایک متغیر کے لیے مستقیم رہنا چاہیے۔

مثال 3 : اگر y، x کے مربع کے ساتھ بالعکس بدلتا ہے تو اگر x کو 25% فی صدی بڑھا دیا جائے تو y پر کیا اثر ہوگا؟

حل : ہمیں حاصل ہے $y = k/x^2$

اگر $x = x_1$ تو $y = k/x_1^2$ لیکن $x = 5x_1/4$

اس طرح $y = \frac{k}{(5x_1/4)^2} = \frac{16}{25}\cdot\frac{k}{x_1^2} = 0.64\,\frac{k}{x_1^2}$.

اس لیے y اپنی اصل قیمت کا 0.64 ہے۔

سوالات

سوال 1 سے 8 تک میں تفاعلی مساوات کو بہ حیثیت ایک واحد جبریہ مساوات کے ظاہر کرو اور اگر ممکن ہو سکے تو k کی نوعی قیمت نکالو:

1. متغیر z براہِ راست متناسب ہے x کے اور بالعکس y کے۔
2. متغیر z براہِ راست متناسب ہے x کے اور بالعکس y کے مربع کے۔
3. متغیر z مشترک طور پر بدلتی ہے x اور y کے ساتھ اور $z = 72$ جبکہ $x = 4$ اور $y = 3$۔
4. متغیر z بالعکس متناسب ہے x کو اور $z = 8$ جبکہ $x = 16$۔
5. ایک دائرہ کا رقبہ براہِ راست متناسب ہے قطر کے مربع کے۔
6. کسی مثلث کا رقبہ مشترک طور پر متناسب ہے قاعدہ اور اونچائی کے حاصل ضرب کے۔
7. ایک مساوی الاضلاع مثلث کا رقبہ اُس کے ضلع کے مربع کو براہِ راست متناسب ہے (وقفہ 1-5 کے سوال 14 کے ساتھ موازنہ کرو)۔
8. ایک گرتے ہوئے جسم کا فاصلہ (ہوا کی مزاحمت کو نظر انداز کر کے) گرنے کے وقت کے مربع سے متناسب ہے اور ایک جسم جو سکون سے گرنا شروع کرتا ہے 2 سیکنڈ میں 64 فٹ گرتا ہے۔
9. (a) اگر $y = f(x)$، x کے ساتھ براہِ راست متناسب ہے اور نقطہ $(3, 2)$ اس کے گراف پر ہے تو y کی نوعی مساوات x کے ارکان میں نکالو۔
   (b) اس گراف پر ایک دوسرے نقطے کے مختصات نکالو۔
10. (a) اگر $y = f(x)$، x کے ساتھ بالعکس متناسب ہے اور نقطہ $(3, 2)$ اس کے گراف پر ہے تو y کے لیے x کے ارکان میں نوعی مساوات نکالو
    (b) ایک دوسرے نقطہ کے مختصات اس گراف پر بتاؤ۔
11. اگر z، x^2 اور y کو مشترکہ طور پر متناسب ہے اور $z = 24$ جبکہ $x = 2$،

$y = 3$ تو اگر $x = 3$ اور $y = 5$ تو z کی قیمت نکالو۔

12. اگر z، x کو براہِ راست متناسب ہو اور بالعکس y کو اور اگر $z = 5$ جبکہ $x = 2$ اور $y = 3$ تو z معلوم کرو جبکہ $x = 4$ اور $y = 2$

13. ایک کرّہ کی سطح کا رقبہ نصف قطر کے مربع کے براہِ راست متناسب ہے۔ اگر سطح 36 مربع انچ ہے جبکہ نصف قطر 3 انچ تو سطح کا رقبہ کیا ہوگا اگر نصف قطر 12 انچ ہو؟

14. سوال 8 کی معلومات کے ساتھ (a) وہ فاصلہ نکالو جو جسم نے 5 سیکنڈ میں طے کیا۔ (b) وہ فاصلہ نکالو جو جسم نے پانچویں سیکنڈ میں طے کیا۔

15. حرکی توانائی K ، کمیت m اور رفتار v کے مربع کے مشترکہ طور پر متناسب ہو اور اگر K قیمت 36 اَرگ ہو جبکہ m کی 8 گرام اور v کی 3 سم فی سیکنڈ تو K معلوم کرو اگر m برابر 4 گرام اور v ، 6 سم فی سیکنڈ۔

16. ایک مرتعش ڈوری کا امتداد یا ارتعاشی تعدّد ڈوری کے تناؤ کے جذر المربع کو براہِ راست متناسب ہے۔ اگر 3 پونڈ کے تناؤ کے لیے ایک ڈوری 216 دفعہ فی سیکنڈ مرتعش ہوتی ہے تو 2 پونڈ کے تناؤ کے لیے اس کا شرحِ ارتعاش نکالو۔

17. نور کی حدّت براہِ راست ماخذ سے فاصلہ کے مربع کے متناسب ہے۔ اگر کوئی شے نور سے 2 فٹ فاصلے پر ہو تو اس نور کا ایک چوتھائی حاصل کرنے کے لیے شے کو نور سے کتنی دُور ہٹا دیا جائے؟

18. اگر z براہِ راست x کے مربع کے متناسب ہو اور بالعکس y کو تو اگر x کو دو گنا اور y کو تین گنا کر دیا جائے تو z پر کیا اثر پڑے گا؟

19. دو اجسام کے درمیان تجاذبی کشش F متناسب ہے کمیت m_1 اور m_2 کو مشترکہ طور پر اور بالعکس اُن کے درمیانی فاصلہ d کے مربع کے۔ اگر دونوں اجسام کی کمیت دوگنی کر دی جائے اور اُن کا درمیانی فاصلہ آدھا کر دیا جائے تو ان دونوں اجسام کے درمیان تجاذبی کشش پر کیا اثر پڑے گا؟

20. ایک شہتیر کی صلابت (کڑاپن) متناسب ہے چوڑائی اور اونچائی کو مشترکہ طور پر اور بالعکس لمبائی کے مربع کے (a) اگر ہر ایک ناپ کو 10 فی صدی بڑھا دیا جائے تو صلابت میں کیا تبدیلی ہوگی (b) اگر چوڑائی اور اونچائی کو تبدیل نہ کیا جائے تو 20 فی صدی صلابت بڑھانے کے لیے لمبائی میں جو تبدیلی آئے گی نکالو؟

21. $k > 0$ کے لیے $y = kx$ کا گراف کھینچو۔ نوٹ کرو کہ گراف پر y کی بڑھوتری کے ساتھ x بھی بڑھتا ہے (اشارہ: y محور پر k کی لمبائی کی اکائیاں استعمال کرو)۔

22. $k > 0$ کے لیے $y = k/x$ کا گراف کھینچو۔ نوٹ کرو کہ x کی بڑھوتری کے ساتھ y گھٹتا ہے۔

23. (a) اگر $y = f(x)$ براہِ راست x کے ساتھ بدلتا ہے تو ثابت کرو کہ
$$\frac{f(x_1)}{f(x_2)} = \frac{x_1}{x_2}.$$
(b) اگر $y = f(x)$، x کے ساتھ بالعکس بدلتا ہے تو ثابت کرو کہ
$$\frac{f(x_1)}{f(x_2)} = \frac{x_2}{x_1}.$$

24. قدیم مصریوں اور یونانیوں کے مطابق ربّانی تناسب کا کلیہ بیان کرتا ہے کہ "کسی قطعۂ خط کی دو حصّوں میں خوب صورت ترین تقسیم ایسے ہوتی ہے کہ بڑے حصّے کا تناسب کُل لمبائی کے ساتھ برابر ہوگا اُس تناسب کے جو چھوٹے حصّے کا تناسب بڑے کے ساتھ ہوگا"۔
(a) اگر ہر کسی خط کی لمبائی ایک اکائی لیں اور بڑے حصّے کی لمبائی x ہو تو x کی قیمت معلوم کرو۔
(b) اس نسبت کی متناسبت مستقل کیا ہے؟*

7-10. دو خطّی مساوات کا حل: تفاعل $f: P \to Z$ (تعریف 5-1) کی عام تعریف یاد کرو جس میں P کے ہر ایک عنصر کے ساتھ Z کا ٹھیک ایک عنصر متلازم کیا ہے۔ اگر ہم P کے عناصر کو حقیقی اعداد کے تمام مرتّب جوڑوں کا سٹ مانیں اور Z کو تمام حقیقی اعداد کا سٹ تو ہم تفاعل کو اس طرح لکھ سکیں گے:

---

* دفعہ 5-6 کی مساوات (6-10) یاد کرو۔

$$\boxed{f: (x, y) \to z,} \tag{7-22}$$

جس میں تطابق ایک مرتّب جوڑے سے ایک حقیقی عدد کے ساتھ ہے۔ جب z کو جبریہ طور پر x اور y* کے ارکان میں ظاہر کرتے ہیں تو اکثر ایسا ہوتا ہے۔

ہماری خصوصی دلچسپی اس خطّی حالت کے ساتھ ہے جس میں z اس قسم کی یک درجی عبارت کے برابر ہو یعنی $z = ax + by + c$، مساوات (7-1) کی آسان تعمیم کے لحاظ سے ہمارا اہم مقصد اس تفاعل کے "صفر" معلوم کرنا ہے۔ دفعہ 7-1 کے طریقے کے مطابق ہم $z = 0$ رکھ کر (x, y) کے ایسے مرتب جوڑوں کے سٹ معلوم کرنا چاہتے ہیں جن سے $ax + by + c = 0$ ہو

یہ سٹ
$$\{(x, y) | ax + by + c = 0\} \tag{7-23}$$

حل سٹ کہلاتا ہے جبکہ اس سٹ کا کوئی مخصوص رکن ذیل کی مساوات کا حل کہلاتا ہے

$$ax + by + c = 0. \tag{7-24}$$

دفعہ 7-1 میں ہم نے $ax + by + c = 0$ جیسی مساوات کا گراف (سوال 33 سے 40 تک) جو کہ ایک خطِ مستقیم تھا y کے لیے حل کر کے اور معادل مساوات $y = mx + b$* کی شکل میں لا کر کھینچا تھا۔ صاف طور سے $ax + by + c = 0$ مساوات کے لامحدود حل ہوں گے کیوں کہ اس خطِ مستقیم پر پڑنے والے لامحدود (x, y) نکات ہوں گے۔ x کی کسی بھی مانی ہوئی قیمت کے لیے y کی متطابق قیمت ہوگی۔ مثلاً خطّی مساوات $3x - 2y - 5 = 0$ کا ایک ہی حل ہے۔ $(3, 2)$ کیوں کہ $x = 3$ اور $y = 2$ مساوات کو مطمئن کرتا ہے۔ ایک اور حل $(1, -1)$ ہے اور دوسرا $(-1, -4)$ وغیرہ۔ اس میں حل سٹ ہوگا

$$\{(x, y) | 3x - 2y - 5 = 0\}.$$

---

* بہت سی کتابوں میں اس کو بہ حیثیت دو متغیر کے تفاعل کے منسوب کیا گیا ہے اور لکھا جاتا ہے $z = f(x, y)$

❖ اگر $b = 0$ تو $x = -c/a$ ایک ایسا خطِ مستقیم ہے جو y-محور کے متوازی ہو۔

★ اگر $b \neq 0$ تو $by = -ax + c$ یا $y = -(a/b)x + c/b$

مساوات (7-1) اور (7-24) کے b ایک ہی نہیں ہیں متعلّم کو ان میں امتیاز کرنا چاہیے۔

ہم اکثر ایک ہی مساوات کے حل میں دلچسپی نہیں لیتے بلکہ x اور y کی خطی مساوات کے اُن جوڑوں میں جیسے کہ

$$\boxed{\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1, \\ a_2x + b_2y &= c_2. \end{aligned}} \quad (7\text{-}26)$$

پس اب ہم (x, y) کے ایسے مرتب جوڑے معلوم کرنے میں دلچسپی رکھتے ہیں جس کی قیمت دونوں مساوات کو مطمئن کردے۔ اگر ہم اپنے سوال کو سٹ کے سلسلے میں ظاہر کرنا چاہیں اور فرض کرلیں کہ $A = \{(x, y)|a_1x + b_1y = c_1\}$ اور $B = \{(x, y)|a_2x + b_2y = c_2\}$ تو ہم A اور B کا تقاطع معلوم کرنا چاہتے ہیں یعنی

$$A \cap B = \{(x, y)|a_1x + b_1y = c_1 \ \&. \ a_2x + b_2y = c_2\}$$

جیومیٹری کے نقطہ نگاہ سے (7-25) کی ہر مساوات کا گراف ایک خط مستقیم ہوگا اور اس لیے ہم (x, y) نقاط کے وہ مختصات نکالیں گے جو دونوں خطوط پر ہوں۔ کیوں کہ عام طور سے دو خطوط مستقیم ایک ہی نقطے پر ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں، اس لیے اُن کے حل میں ایک ہی عنصر ہوگا۔ ہر خط کا گراف کھینچ کر ہم نقطۂ تقاطع کے مختصات تقریباً ٹھیک ٹھیک معلوم کرسکتے ہیں۔

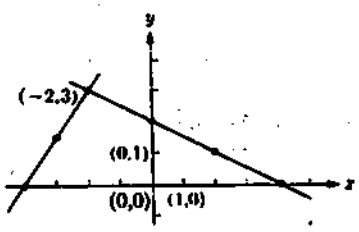
مثال 1 : مندرجہ ذیل مساوات کے جوڑے کو بذریعہ گراف حل کرو :

$$3x - 2y = -12. \quad \& \quad x + 2y = 4$$

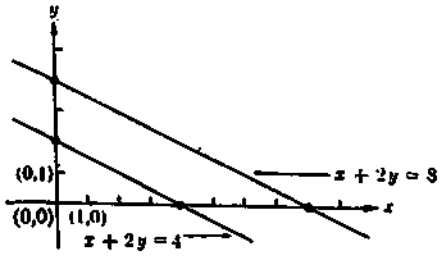
حل : ان میں سے ہر ایک خط کا گراف شکل 4-7 میں دکھایا گیا ہے۔ یہ ظاہر ہوتا ہے کہ دونوں خطوط نقطہ $(-2, 3)$ پر ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں۔ یہی حقیقت ہے جیسا کہ بلاواسطہ ابدال سے تصدیق کی جاسکتی ہے۔ پس حل ہوگا $x = -2$ ، $y = 3$ جبکہ مرتب جوڑا ہوگا $(-2, 3)$ ۔ اگر ہم مانیں $A = \{(x, y)|x + 2y = 4\}$ اور $B = \{(x, y)|3x - 2y = -12\}$ تو حل سٹ ہوگا $A \cap B = \{(-2, 3)\}$ جو

---

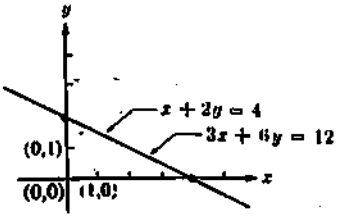
* مستقل رکن کو دائیں طرف لکھنا عام طور سے زیادہ آسان معلوم ہوتا ہے، اس لیے ان مساواتوں کو ہم نے اس شکل میں لکھنا اخذ کیا ہے۔



شکل 4-ب



شکل 5-7



شکل 6-7

ایک ہی عنصر $(-2, 3)$ پر مشتمل ہے۔

یہاں یہ بات ظاہر کر دیں کہ دو متوازی خطوط جیسے کہ $x + 2y = 4$ اور $x + 2y = 8$ کے اگر خاکے کھینچیں تو وہ قطع نہیں کریں گے (شکل 5-7)۔ یہ حقیقت کہ ایسے دو خطوط کا کوئی نقطہ تقاطع نہ ہوگا مساوات سے صاف ظاہر ہے کیوں کہ اعداد کا کوئی جوڑا ایسا ہو ہی نہیں سکتا جس میں پہلے عدد اور دوسرے عدد کے دوگنے کا جوڑ 4 کے برابر ہو اور 8 کے بھی برابر ہو۔ اگر ہم $\{(x, y) | x + 2y = 4\}$ اور $\{(x, y) | x + 2y = 8\}$ کے انقطاع پر غور کریں تو نتیجہ صفری سٹ $\emptyset$ ہوگا۔ اس قسم کی دو مساوات کو ناسازگار کہتے ہیں۔

اگر دو خطوط جیسے کہ $x + 2y = 4$ اور $3x + 6y = 12$ اپنے خاکے کھینچے جانے پر ایک دوسرے پر منطبق ہو جائیں (شکل 6-7) تو (x, y) جوڑے کی کوئی بھی قیمت جو ایک مساوات کو مطمئن کرے گی دوسری کو بھی مطمئن کرے گی۔ اس قسم کی کوئی بھی دو مساوات کے لامحدود حل ہو جاتے ہیں اور تابع کہلاتے ہیں۔

مختصراً، دو مساوات (7-25) کا یا تو :

(1) ایک یکتا حل ہوتا ہے جبکہ اُن کے گراف ایسے دو خطوط مستقیم ہوں جو ایک دوسرے کو ایک نقطے پر قطع کرتے ہیں۔

(2) کوئی حل نہیں ہوتا ہے جبکہ اُن کے گراف دو متوازی اور غیر منطبق خطوط مستقیم ہوتے ہیں۔

(3) بہت سے لامحدود حل ہوتے ہیں جب اُن کے گراف دو ایسے خطوط مستقیم ہوتے ہیں جو متوازی اور منطبق ہوں۔

کیوں کہ گراف کھینچ کر حل معلوم کرنے کا طریقہ صرف تقریبی ہے، اس لیے ہمیں ایسے طریقے پر غور کرنا چاہیے جو قطعی ہو۔ ان میں سے ایک مقدار متغیرّہ کو دونوں مساوات (یا ایسی مساوات جو اُن کے معادل ہوں) کے صحیح امتزاج سے خارج کر دیا جائے اور نتیجے کے طور پر حاصل شدہ مساوات کو دوسری مقدار متغیرّہ کے لیے حل کر لیا جائے اور خارج شدہ مقدار متغیرّہ کو ابدال سے حاصل کیا جائے۔

مثال 2 : مثال 1 کی دونوں مساوات کو الجبرائی طریقے سے حل کرو۔

حل : کیوں کہ y کے ضریب برابر اور مخالف علامت تو پہلی مساوات کے ارکان دوسری مساوات کے ارکان کے ساتھ جوڑ دیے جائیں تو y خارج ہو جائے گا :

$$\begin{aligned} x + 2y &= 4 \\ \underline{3x - 2y} &= \underline{-12} \\ 4x &= -8 \end{aligned}$$

اس مساوات کو ایک مقدار متغیرّہ میں حل کرنے سے $x = -2$ اگر x کی یہ قیمت دونوں اصل مساوات میں سے کسی ایک میں رکھ دی جائے تو $y = 3$، اس لیے حاصل شدہ حل ہوگا $x = -2$ ، $y = 3$ یا $(-2, 3)$ ہم y کی قیمت اس طرح بھی معلوم کر سکتے تھے کہ پہلی مساوات کے ہر رکن کو -3 سے ضرب دے کر حاصل شدہ مساوات $-3x - 6y = -12$ کو دوسری مساوات $3x - 2y = -12$ کے ساتھ جوڑ دیتے تو $-8y = -24$ یا $y = 3$ حاصل ہو جاتا۔

مثال 3 : دو عام مساوات (25-7) کے جوڑے میں x اور y کی قیمت اُس کے ضریب میں نکالو۔

حل : اگر ہم پہلی مساوات کے ہر رکن کو b_2 سے ضرب دیں اور دوسری کو b_1 سے ضرب دیں تو

ہمیں حاصل ہوگا

$$a_1b_2x + b_1b_2y = c_1b_2,$$
$$a_2b_1x + b_1b_2y = c_2b_1$$

دوسری مساوات کے ارکان کو پہلی مساوات کے ارکان میں سے تفریق کریں تو حاصل ہوگا

$$a_1b_2x - a_2b_1x = c_1b_2 - c_2b_1.$$

اس مساوات کو x کے لیے حل کرنے سے حاصل ہوگا

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \qquad (a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0).$$

اوّل مساوات کے ہر ممبر کو a_2 سے اور دوسری مساوات کو a_1 سے ضرب کرنے سے اور اوپر کا طریقہ اختیار کرنے سے حاصل ہوگا

$$y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \qquad (a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0).$$

اگرچہ اس شکل میں استعمال نہیں ہوتا x اور y کی ان قیمتوں کو بہ حیثیت "حل بذریعہ ضابطہ" سمجھ سکتے ہیں۔

سوالات

مندرجہ ذیل مساوات کے جوڑے الجبرائی طریقے سے حل کرو۔ گرافائی طریقہ بہ حیثیت ایک تقریبی تنقیح کے استعمال کیا جاسکتا ہے۔ دائری تفاعل اگر شامل ہوں تو تمام وہ قیمتیں نکالی جائیں جو 0 اور 2π کے درمیان ہوں:

1. $2x - y = 5,\ x - 3y = 5.$
2. $3x - 2y = -14,\ 2x + 3y = 8.$
3. $4x + 3y = 27,\ 2x - 5y + 19 = 0.$
4. $2x - 5y + 43 = 0,\ 6x - y + 31 = 0.$
5. $3x + 4 = 4y,\ 9x + 2y = 9.$
6. $6x + 9y = 7,\ 3x - 6y + 14 = 0.$
7. $4 \sin\alpha + \cos\beta = 3,\ 6 \sin\alpha - 2 \cos\beta = 1.$
8. $\sqrt{3} \sin\alpha - \cos\beta = 1,\ \sin\alpha - 3\sqrt{3} \cos\beta = -\sqrt{3}.$
9. $2 \sec\alpha - 4 \tan\beta = 0,\ \sec\alpha + \tan\beta = \sqrt{3}.$

---

* اگرچہ سوال 7 سے 12 تک مفرد نہیں ہیں پھر بھی یہ سوال اس دفعہ کے طریقے سے حل کیے جائیں جو معرض بحث میں آچکا ہے۔

$\frac{2}{x}+\frac{3}{y}=2, \quad \frac{4}{x}-\frac{9}{y}+1=0.$ .10.

$\frac{15}{x}+\frac{4}{y}=1, \quad \frac{5}{x}-\frac{12}{y}=7.$ .11.

$\frac{15}{2x}-\frac{16}{3y}=\frac{23}{6}, \quad \frac{4}{3x}+\frac{7}{2y}+\frac{31}{72}=0.$ .12.

$ax+by=a^2+2ab+b^2,\ bx-ay=b^2+2ab-a^2.$ .13.

$ax-by=a^2-b^2,\ bx+ay=2ab.$ .14.

$\tan k_1=\frac{y}{x}, \quad \tan k_2=\frac{y+a}{x}.$ *15.

$\tan k_1=\frac{a}{y}, \quad \tan k_2=\frac{a}{y+x}.$ *16

*17 مندرجہ ذیل مساوات کے جوڑے میں x' ، y' کی قیمت x اور y میں نکالو:

$$x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha,$$
$$y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha$$

سوال 18 سے 20 تک میں $A\cap B$ نکالو اگر:

.18 $A=\{(x,y)|3x-4y=-7\},\ B=\{(x,y)|x+y=7\}.$

.19 $A=\{(x,y)|x+y=1\},\ B=\{(x,y)|2x+3y=4\}.$

.20 $A=\{(x,y)|3x+y=5\},\ B=\{(x,y)|6x+2y=7\}.$

.21 $\{(x,y)|x-y=3$ اور $x+2y>4\}$ کے گراف کا خاکہ کھینچو۔

.22 $\{(x,y)|x+2y=6$ اور $x-y<3\}$ کے گراف کا خاکہ کھینچو۔

.23 مندرجہ ذیل کے گراف کھینچو:

(a) $A=\{(x,y)|2x+y>3\}$, (b) $B=\{(x,y)|x-y>6\}.$

(c) الجبرا کے ذریعے سے ثابت کرو کہ

$$A\cap B=\{(x,y)|x>3 \ \&\ 3-2x<y<x-6\}.$$

(d) $A\cap B$ کا گراف کھینچو۔

.24 مندرجہ ذیل کا گراف کھینچو:

$$A=\{(x,y)|x>0,\ y>0,\ x+3y<15, \ \&\ 2x+y<10\}$$

.25 $|x|+|y|=1$ کا گراف کھینچو۔

.26 $|x-4|+|y-3|=2$ کا گراف کھینچو۔

.27 $4|x|+3|y|=12$ کا گراف کھینچو۔

28. ایک دو ہندسہ عدد کے دونوں ہندسوں کا جوڑ 9 ہے۔ اگر ہندسوں کو اُلٹ دیا جائے تو نیا عدد اصل عدد سے 9 کم ہوگا تو دونوں اعداد بتاؤ۔

29. کسی کسر کی قیمت $\frac{3}{4}$ ہے۔ اگر اس کے شمار کنندہ میں سے 7 کم کر دیے جائیں اور اس کے نسب نما میں 4 جوڑ دیا جائے تو حاصل شدہ کسر کی قیمت $\frac{1}{2}$ ہوگی۔ تو اصل کسر نکالو۔

30. ایک قائم الزاویہ مثلث میں غیر قائم الزاویہ زاویوں کا جوڑ 90° ہے۔ اگر پہلے زاویہ کا دوگنا دوسرے زاویے کے تین گنے سے 40° زائد ہو تو زاویے نکالو۔

31. ہوا کے رُخ میں ایک ہوائی جہاز 7 گھنٹے میں 1120 میل کا سفر طے کرتا ہے۔ لیکن ہوا کے خلاف سمت اُڑنے میں اتنے ہی فاصلے کے لیے 8 گھنٹے لگتے ہیں تو ہوائی جہاز کی رفتار ساکن ہوا میں کیا ہوگی اور ہوا کی رفتار معلوم کرو۔

32. دو اعداد کے مقلوب کا جوڑ 9 ہے۔ پہلے کے مقلوب کا دوگنا دوسرے عدد کے مقلوب کے 4 گنے سے 12 کم ہے تو اعداد معلوم کرو۔

33. A اور B ساتھ ساتھ کام کر کے ایک کام کو $6\frac{2}{3}$ گھنٹے میں پورا کر سکتے ہیں۔ A، B کے ساتھ تین گھنٹے کام کر کے بیمار ہو گیا اور B نے کام کو اکیلا $8\frac{1}{2}$ گھنٹے زیادہ کام کر کے ختم کیا تو دونوں علاحدہ علاحدہ کام کر کے اُسی کام کو کتنے گھنٹوں میں کر سکتے ہیں؟

34. α اور β کی وہ قیمتیں معلوم کرو جو 0 اور $\pi/2$ کے درمیان ہوں تاکہ:

$$2\sin(\alpha+\beta) = 2\cos(\alpha-\beta) = \sqrt{3}.$$

35. مندرجہ ذیل خطوط سے بننے والے مثلث کی راسوں کے محتصات معلوم کرو:

$$x - y = -3, \quad 3x + 4y = 5, \quad 6x + y = 17.$$

36. سوال 35 کی مساوات سے معلوم کیے گئے محتصات کی

37. ثابت کرو کہ ذیل کے خطوط ایک متوازی الاضلاع بناتے ہیں اور اُن کے راس نکالو:

$$2x - y = 4, \quad x + 3y = 6,$$
$$2x - y = 8, \quad x + 3y = -1$$

38. ہم جانتے ہیں کہ $y = mx + b$ کسی خطِ مستقیم کی مساوات ہے (جو y-محور کے متوازی نہیں ہے)۔ m اور b کی وہ قیمت نکالو تاکہ $y = mx + b$ نقاط

(−3, 1) اور (1, 9) سے گزرے (اگر ایک نقطہ کسی خط پر ہے تو اُس کے مختصات اُس مساوات کو مطمئن کرتے ہیں)۔ اگر m اور b کی یہ قیمتیں مساوات $y = mx + b$ میں لکھ دی جائیں تو ہم نے اُس خطِ مستقیم کی مساوات نکال لی جو اُن دو دیے ہوئے نقاط سے گزرتی ہے۔

39. سوال 38 کے طریقے سے اُس خطِ مستقیم کی مساوات نکالو جو گزرتی ہے۔

(a) (2, 3) اور (−1, 4) سے (b) (−4, 2) اور (6, −1) سے

40. کسی جسم کے سینٹی گریڈ درجۂ حرارت C اور فارن ہائٹ درجۂ حرارت F میں ایک خطی ضابطہ نکالو [اشارہ: $F = mC + b$، مزید اگر $F = 32$ کے تو $C = 0$ اور جب $F = 212$ تو $C = 100$]۔

7-11. تین خطی مساوات کا الجبرائی حل:

$$ax + by + cz = d, \qquad (7\text{-}26)$$

قسم کی کوئی بھی مساوات جس میں a، b، c، d مستقل ہیں اور a، b اور c سب صفر نہیں ہیں تین متغیر والی خطی مساوات کہلاتی ہے۔ x، y اور z تین اعداد کا ایسا کوئی بھی سٹ جو مساوات کو مطمئن کرتا ہے اُس مساوات کا حل کہلاتا ہے جیسا کہ مساوات (7-24) میں تھا۔ اس قسم کی ایک ہی مساوات کے لیے حل کی تعداد لامحدود ہوگی۔

حالانکہ ہم یہ بات اس کتاب میں ثابت نہیں کریں گے کہ مساوات (7-26) کا جیومیٹرائی تشریح سہ سمتی قائم مختصاتی نظام* میں ایک سطح ہوتی ہے۔ دو غیر متوازی ایک دوسرے کو ایک خط مستقیم میں قطع کرتے ہیں اور یہ خط جو ان دونوں میں سے کسی کو بھی متوازی نہیں ہے ایک تیسری سطح کو ایک

---

* ایک سہ سمتی قائم مختصاتی نظام اُس ایک سمتی اور دو سمتی نظام کی تعمیم ہے جو دفعہ 2-4، 4-4 میں زیرِ بحث آچکا ہے۔ مثلاً فضا میں ہر نقطہ کے تین مختصات ہوں گے اور اُن کو (x, y, z) سے تعبیر کریں گے، اور ایک مرتب ثلاثی وغیرہ (یاد کرو سوال 15 دفعہ 4-4)۔

ایک نقطہ پر کاٹتا ہے۔ عام طور پر تین سطحوں میں ایک ہی نقطہ مشترک ہوتا ہے۔ الجبرا کی رو سے اس کی تشریح اس حقیقت سے کی جاتی ہے کہ مساوات کے اس نظام میں x، y اور z کا ایک ہی حل ہے:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned} \qquad (7\text{-}27)$$

اس نظام کو حل کرنے کے لیے ہم وہ طریقہ اختیار کریں گے جو (7-25) کی مساوات کے جوڑے کے حل کی تعمیم ہوگی۔ ہم تینوں مساوات میں سے ایک جوڑا اخذ کریں گے اور اُس جوڑے میں سے ایک متغیر خارج کر دیں گے جس سے باقی دو متغیر میں ایک مساوات حاصل ہوگی۔ اس طریقے کو ایک دوسری مساوات کے جوڑے کے ساتھ دُہرا کر انھیں دو متغیر میں ایک اور مساوات حاصل کر لیں گے۔ اب ان حاصل شدہ مساواتوں کو دیے ہوئے دو متغیر کے لیے حل کریں گے اور کسی ایک اصل مساوات میں اُن دونوں متغیر کی قیمت رکھ کر مکمل حل نکال لیں گے۔ مثال کے طور پر

مثال : مندرجہ ذیل مساوات کے نظام کو حل کرو:

$$\begin{aligned} 2x - y + z &= 8, \\ x + 2y + 3z &= 9, \\ 4x + y - 2z &= 1. \end{aligned}$$

حل : پہلی دو مساوات کو حل کر کے z خارج کر دیں۔ اور پھر پہلی اور تیسری کو حل کریں۔ پہلی مساوات کے ہر رکن کو -3 سے ضرب دیں اور حاصل شدہ مساوات کو دوسری مساوات کے ساتھ رکن بہ رکن جوڑ دیں

$$\begin{array}{rcl} -6x + 3y - 3z &=& -24 \\ x + 2y + 3z &=& 9 \\ \hline -5x + 5y &=& -15 \end{array}$$

یا

$$x - y = 3 \qquad (4)$$

پہلی مساوات کو دو سے ضرب دے کر حاصل شدہ مساوات کو تیسری مساوات کے ساتھ رکن بہ رکن جوڑ دیں

$$\begin{array}{rcl} 4x - 2y + 2z &=& 16 \\ 4x + y - 2z &=& 1 \\ \hline 8x - y &=& 17 \end{array}$$

اب ان دونوں حاصل شدہ مساوات کو حل کریں۔ کیے گئے اقدامات کے لیے وجہ بتائیے

$$8x - y = 17$$
$$\frac{x - y}{7x} = \frac{3}{14}$$

اس لیے $x = 2$ اور $y = -1$، ان قیمتوں کو اصل مساوات میں سے پہلی مساوات میں رکھ کر ہمیں حاصل ہوگا

$$2(2) - (-1) + z = 6,$$
$$z = 3.$$

اس لیے مکمل حل ہوگا $x = 2$، $y = -1$ اور $z = 3$ اور اس کو اس طرح لکھ سکتے ہیں $(2, -1, 3)$ ۔ تمام حلوں کی تنقیح کر لینا چاہیے۔

سوالات

ذیل کی مساواتوں کے ہر نظام کو حل کرو:

.1 $x + 3y - z = 4,$
$3x - 2y + 4z = 11,$
$2x + y + 3z = 13.$

.2 $3x - y - 2z = -13,$
$5x + 3y - z = 4,$
$2x - 7y + 3z = -36.$

.3 $2x - y + 3z = 19,$
$5x - 2y + 4z = 33,$
$3x + 3y - z = 2.$

.4 $6x + 4y - z = 13,$
$5x - 2y + 7z = 18,$
$x + y - 8z = -35.$

.5 $3x + 5y + 2z = 0,$
$12x - 15y + 4z = 12,$
$6x + 25y - 8z = -12$

.6 $7x - 3y + 4z = 18,$
$13x + 6y + 8z = 30,$
$11x - 9y - 12z = 16$

.7 $2x + 3y = 28,$
$3y + 4z = 46,$
$4x + 5z = 53.$

8 $x - 3y = -11,$
$2y - 5z = 26,$
$3x - 7z = 2.$

.9 $\frac{3}{x} - \frac{4}{y} + \frac{6}{z} = 1,$
$\frac{9}{x} + \frac{8}{y} - \frac{12}{z} = 3,$
$\frac{9}{x} - \frac{4}{y} + \frac{12}{z} = 4.$

.10 $x + y + z = a + b + c,$
$bx - ay + cz = b^2,$
$ax - ay + cx = ab.$

.11 اگر مرتب ثلاثے کے تین دیے ہوئے سٹ ہیں

$A = \{(x, y, z) | x - 2y + 3z = 4\},$
$B = \{(x, y, z) | 2x - y + z = -1\},$ اور
$C = \{(x, y, z) | 4x + y + 2z = 4\},$

تو $(A \cap B) \cap C$ نکالو۔

12. ایک تین ہندسہ والے عدد کے ہندسوں کا جوڑ 13 ہے۔ اگر دہائی اور سینکڑے کے ہندسوں کو آپس میں بدل دیا جائے تو نیا عدد اصل عدد سے 90 کم ہوگا اور اگر اکائی اور سینکڑے کے ہندسوں کے مقام آپس میں بدل دیے جائیں تو حاصل شدہ عدد اصل عدد سے 99 کم ہوگا تو اصل عدد معلوم کرو۔

13. پچیس سکّے جن کی قیمت 2.75 ڈالر ہے۔ اُن میں نکل (امریکی پانچ سنیٹ کا سکّہ) ڈائم (امریکی سکّہ پانچ آنے کے برابر) اور کوارٹر (چوتھائی ڈالر کا سکّہ امریکی) ہیں۔ اگر نکل ڈائم ہوتے اور ڈائم کوارٹر ہوتے اور کوارٹر نکل ہوتے تو اُن کی کل قیمت ہوتی 3.75 ڈالر تو بتاؤ کہ ہر قسم کے کتنے کتنے سکّے تھے؟

14. یاد رکھو کہ کسی مثلث کے تینوں زاویوں کا جوڑ $180°$ ہوتا ہے۔ اگر کسی بھی دو زاویوں کا جوڑ تیسرے زاویے کے برابر ہو اور ان دونوں زاویوں کا فرق تیسرے زاویہ کا دو تہائی ہو تو زاویوں کی قیمت نکالو؟

15. اگر کسی دائرہ کی عام مساوات $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ کو پھیلایا جائے تو اس کو لکھ سکتے ہیں یہ یاد رکھتے ہوئے کہ دائرہ پر کے کسی نقطہ کے محتصات اُس کی مساوات کو مطمئن کرتے ہیں۔ A ، B اور C کی قیمت معلوم کرو اور اسی کے ذریعے اُس دائرہ کی مساوات جو $(1, 1)$ ، $(-2, 3)$ ، $(3, 4)$ نقاط سے گزرتا ہے۔

16. اگر A ، B اور C تینوں مل کر کسی کام کو پورا کریں تو $1\frac{1}{4}$ گھنٹہ لیتے ہیں۔ اور اگر صرف A اور B اس پر کام کریں تو $1\frac{1}{2}$ گھنٹہ لگتے ہیں اور اگر B اور C کریں تو $2\frac{2}{3}$ گھنٹے لگتے ہیں تو بتاؤ کہ اگر ہر ایک اس کام کو الگ الگ کرے تو کتنا کتنا وقت لگے گا؟

17. اس دفعہ کے حاشیہ کو یاد کریں کہ مساوات $ax + by + cz = d$ سہ سمتی محتصاتی نظام میں ایک سطح کی نمائندگی کرتی ہے۔ اس میں سے کم از کم ایک ضریب صفر نہ ہو۔ اس ضریب سے تقسیم دے کر مثال کے طور پر معادل مساوات کی شکل ہوگی $z = ey + fz + g$ تو اُس سطح کی مساوات نکالو جو ان تین نقاط سے گزرتا ہے: $(4, 1, 2)$ ، $(3, 2, 1)$

اور $(-6, -1, -2)$

18. اُس سطح کی مساوات نکالو جو ان تین نقاط سے گزرتی ہو: $(1, -5, -2)$ ، $(0, 5, 2)$ اور $(3, 2, -1)$

7-12. ایک خطّی اور ایک دو درجی مساوات کا حل:

دفعہ 7-10 اور 7-11 میں ہم خطّی مساوات کے نظام کے متعلق بحث کر چکے ہیں۔ انہی نظام کی تعمیم دو یا تین سے زیادہ متغیّر کو زیرِ بحث لا کر کی جا سکتی ہے یا ایسے تفاعل کو زیرِ بحث لا کر جو ایک سے زیادہ درجے کے ہوں۔ ایسے نظام کے حل اگر وجود میں ہوں نکالنا اکثر مشکل ہوتا ہے۔ دو متغیّر والی ایک سادہ مگر سود مند تعمیم کو ہم زیرِ بحث لاتے ہیں یعنی وہ جس میں ایک مساوات منفرد ہو اور دوسری دو درجی۔ ایسے نظام کو عام طور پر لکھ سکتے ہیں:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$
$$gx + hy + k = 0, \qquad (7\text{-}28)$$

جہاں کہ a، b، c، d، e، f، g اور h سب مستقل۔ a، b، c سب صفر نہیں ہیں اور g اور h دونوں ایک ساتھ تو صفر نہیں ہیں۔ اگر مساوات (7-28) کی ہر ایک مساوات (شرائط) کو اُن نقاط کے سٹ کی تعریف کرنے والا سمجھا جائے جن کے مختصات اُس مساوات کو مطمئن کرتے ہیں تو دفعہ 7-10 کی رو سے ان دونوں سٹوں کے تقاطع میں ایسے عناصر ہوں گے کہ جو اُن دونوں منحنی کی نمائندگی کرنے والی مساوات کے نقاط تقاطع ہوں گے۔

ایسے نظام کو خواہ گراف کے طریقے سے یا الجبرائی طریقے سے حل کرنا ایسے ہی ممکن ہے جیسے کہ دو خطّی مساوات کو۔ دو درجی مساوات کے گراف کا خاکہ بہتر طریقے سے کھینچا جا سکتا ہے اگر متغیّروں کی قیمتوں کے جدول بنانے سے پہلے ایک متغیّر کو دوسرے متغیّر کے ارکان میں نکال لیا جائے۔ کیوں کہ دونوں منحنی کے نقاط تقاطع دونوں منحنی پر ہی ہوتے ہیں اس لیے دو دو درجی مساوات اور منفرد مساوات کے گراف کے نقاط تقاطع کو قریب قریب لا کر (تقریب کر کے) اُن کے مختصات کو بہ حیثیت حل لے لیا جائے۔

آسان ترین الجبرائی طریقہ وہ ہے جس میں ایک متغیّر کو خارج کر دیا جائے۔ زیادہ وضاحت کے ساتھ یہ ہے کہ خطّی مساوات میں ایک متغیّر کو دوسرے کے ارکان میں نکال لیتے ہیں اور اس قیمت کو دو درجی

مساوات میں رکھ دیتے ہیں اور ایک غیر متغیر میں حاصل شدہ دو درجی مساوات کو حل کر لیتے ہیں اور ان نتائج کو اصل خطی مساوات میں بدل کر مکمل حل نکال لیتے ہیں۔ کیوں کہ اس طریقے سے ہمارا سوال صرف ایک دو درجی مساوات کے حل کرنے کے طریقے کے تحت آجاتا ہے اس لیے اس سے ہمیں یہ حل حاصل ہوں گے دو حقیقی واضح مرتب جوڑے، ایک حقیقی مرتب جوڑا یا کوئی بھی حقیقی مرتب جوڑا نہیں (یاد کر دو دفعہ 7-6)۔

مثال 1 : مندرجہ ذیل مساوات کا نظام حل کرو

$$x^2 - 5x - y + 4 = 0,$$
$$x - 4y = 1.$$

الجبرائی حل : حالانکہ ہم x یا y کو خارج کر سکتے ہیں ہم اپنی خطی مساوات سے y کو x کی رقم میں نکال لیتے ہیں اور اس قیمت کو دو درجی مساوات میں y کے بدل رکھ دیتے ہیں کیوں کہ ہمیں یہ طریقہ زیادہ آسان معلوم ہوتا ہے

$$4y = x - 1$$

یا

$$y = \frac{x-1}{4}.$$

اس لیے

$$x^2 - 5x - \left(\frac{x-1}{4}\right) + 4 = 0,$$
$$4x^2 - 20x - x + 1 + 16 = 0,$$
$$4x^2 - 21x + 17 = 0,$$
$$(4x - 17)(x - 1) = 0.$$

اس طرح $x = 1$ یا $x = 4\frac{1}{4}$، ان قیمتوں کو خطی مساوات میں x کے بدل رکھ کر y کی مطابق قیمتیں ہوں گی۔ $y = 0$، $y = \frac{13}{16}$ دو حل ہوں گے $x = 1$، $y = 0$ اور $x = 4\frac{1}{4}$، $y = \frac{13}{16}$ یا $(1, 0)$ اور $(4\frac{1}{4}, \frac{13}{16})$

گراف کے طریقے سے حل : دی ہوئی مساواتیں ایک شلجمی اور ایک خطِ مستقیم کی نمائندگی کرتی ہیں جن کو شکل 7-7 میں دکھایا گیا ہے۔ ان دونوں منحنی کا تقاطع وہی حل ثابت کرتے ہیں جو الجبرائی طریقے سے نکالے ہیں۔

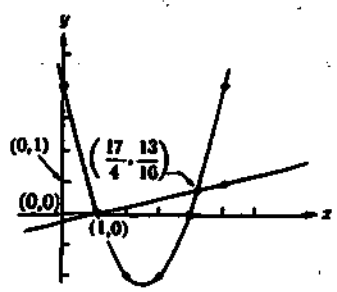
مثال 2 : ذیل کے مساوات کے نظام کو حل کرو

$$x^2 - 2y^2 + 3x - 4y + 20 = 0,$$
$$2x - y = 1.$$

حل : حالانکہ ہم x یا y کو خارج کر سکتے ہیں لیکن ہم یہ طریقہ زیادہ پسند کرتے ہیں کہ خطی مساوات کو y کے لیے حل کر لیں اور پھر صرف x کے ساتھ کام کریں کیوں کہ یہ طریقہ زیادہ آسان معلوم ہوتا ہے۔

$y = 2x - 1$ پہلی مساوات میں بدل کر رکھنے سے ہمیں حاصل ہوگا

$$x^2 - 2(2x - 1)^2 + 3x - 4(2x - 1) + 20 = 0.$$



شکل 7-7

اختصار کرنے سے حاصل ہوگا

$$x^2 - 8x^2 + 8x - 2 + 3x - 8x + 4 + 20 = 0,$$
$$-7x^2 + 3x + 22 = 0,$$
$$7x^2 - 3x - 22 = 0,$$
$$(7x + 11)(x - 2) = 0.$$

اس لیے

$$x = 2, \quad -\tfrac{11}{7}.$$

ان قیمتوں کو خطی مساوات میں x کی جگہ بدل کر رکھنے سے y کی مطابق قیمت حاصل ہوگی $-\frac{29}{7}$ ، $y = 3$ تو دونوں حل ہوں گے $x = 2$ ، $y = 3$ اور $x = -\frac{11}{7}$ ، $y = -\frac{29}{7}$ یا

$(2, 3)$ اور $(-\frac{11}{7}, -\frac{29}{7})$

سوالات

سوال 1 سے 6 تک کو گراف اور الجبرا دونوں ہی طریقوں سے حل کرو :

1. $y = 4x^2$
   $y = 8x.$

2. $x - 2y = 10,$
   $y = x^2 + 2x - 15.$

3. $y^2 = 4x$, $x - y = -4$.

4. $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 4$, $x + y + 3 = 0$.

5. $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 4$, $x + y = 4$.

6. $xy = 1$, $x + y = 2$.

[اشارہ : اس دو درجی مساوات کے گراف کے لیے دفعہ 4-6 کو یاد رکھو]

7 سے 10 تک کے ہر سوال میں $A \cap B$ نکالو۔ اگر

7. $A = \{(x, y) | y^2 + 2xy - 3x^2 + 7 = 0\}$,
$B = \{(x, y) | x - 3y + 1 = 0\}$.

8. $A = \{(x, y) | x^2 + y^2 - 2x = 1\}$,
$B = \{(x, y) | 2x + y - 5 = 0\}$.

9. $A = \{(x, y) | 3xy + 6x = 4y\}$,
$B = \{(x, y) | 2y - 3x - 4 = 0\}$.

10. $A = \{(x, y) | 4x^2 + 3xy - 2y^2 - x - y + 1 = 0\}$,
$B = \{(x, y) | x - 2y + 3 = 0\}$.

11. دائرہ $x^2 + y^2 = a^2$ اور خطِ مستقیم $y = mx + b$ دو نقاط میں ایک دوسرے کو منقطع کرتے ہیں یا خط دائرہ کو مماس ہوتا ہے۔ یا خط دائرہ سے انقطاع ہی نہیں کرتا یہ اس بات پر منحصر ہے کہ اس نظام مساوات کے حل حقیقی اور واضح ہوں۔ حقیقی اور برابر ہوں یا غیر حقیقی۔ b کی وہ قیمت a اور m میں معلوم کرو جس سے خط مستقیم دائرہ کو مماس ہو۔

12. ایک مستطیل کے اضلاع نکالو اگر اُس کا وتر 17 انچ ہو اور اُس کا احاطہ 46 انچ ہو۔

13. ایک دو ہندسہ والے عدد اور اُس عدد کو جو ان ہندسوں کو اُلٹنے سے بنے گا حاصل ضرب 736 ہے اگر دونوں عدد کا فرق 9 ہے تو عدد معلوم کرو۔

14. A اور B ایک ساتھ کام کرکے کسی کام کو $7\frac{1}{2}$ گھنٹے میں مکمل کرتے ہیں۔ علاحدہ علاحدہ کام کرکے A اُسی کام کو مکمل کرنے کے لیے B سے 8 گھنٹے زیادہ لیتا ہے۔ ہر ایک علاحدہ علاحدہ کام کرکے اُس کو کتنے وقت میں پورا کرے گا۔

15. دو اعداد کا جوڑ 11 ہے جبکہ اُن کے مقلوب کا جوڑ $\frac{11}{18}$ ہے۔ تو اعداد معلوم کرو۔

باب 8

تعیّن گر

ریاضی میں اعداد کی مستطیل یا مربع قطاری ترتیب پر بحث کرنا عام طور پر آسان معلوم ہوتا ہے جیسے کہ

$$\begin{Vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{Vmatrix} \tag{8-1}$$

یہ اعداد کی مستطیل قطاری ترتیب ماترس (matrix) کہلاتی ہے۔ اعداد $a_1, b_1, \ldots, c_2$ ماترس کے عناصر کہلاتے ہیں، اعداد کے اُفقی خطوط **صف** کہلاتے ہیں اور انتصابی خطوط **کالم** کہلاتے ہیں۔ عام طور سے اگر ایک مستطیلی قطاری ترتیب میں m صف اور n کالم ہوں تو اُس کو m بہ n ماترس کہتے ہیں۔ ہمیں صرف مربع ماترس سے غرض ہے $(m = n)$ کیوں کہ اس کا کوئی اور مطالعہ اس کتاب کی حدود سے باہر ہے۔ ایسا n بہ n ماترس n درجہ والا ماترس کہلاتا ہے۔

8-1 دو ترتیبی اور سہ ترتیبی تعیّن گر:

ہر مربع ماترس کے ساتھ ہم ایک حقیقی عدد کو متلازم کر دیتے ہیں جو ماترس کا تعیّن گر کہلاتا ہے۔ پس ہم ایک ایسے تفاعل Det کی تعریف کر رہے ہیں جس کے علاقے کے عناصر ہیں مربع ماترس اور رسعت حقیقی اعداد R کا سٹ۔ دو درجی ماترس کے لیے یہ عددیا تعیّن گر اس طرح نکالا جاتا ہے کہ بائیں کے بالائی کونے والے اور دائیں کے زیریں کونے والے عناصر کے حاصل ضرب میں سے بائیں کے نیچے والے کونے اور دائیں کے اوپر والے عناصر کے حاصل ضرب میں سے تفریق کر دیتے ہیں۔ اس تعیّن گر کو علامتی طور پر اس طرح ظاہر کرتے ہیں :

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1. \tag{8-2}$$

تمثیل :

(a) $D = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = (12) - (10) = 2,$

(b) $D = \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = (-1)(-3) - 2(-4) = 11.$

سوالات

سوال 1 سے 6 تک میں تعیین گر کی قیمت نکالو :

1. $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$ 3. $\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -5 & 6 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ 5. $\begin{vmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \sin\theta \end{vmatrix}$ 6. $\begin{vmatrix} \sec\theta & \tan\theta \\ \tan\theta & \sec\theta \end{vmatrix}$

7. دفعہ 7-10 کے مثال 3 سے ثابت کرو کہ مندرجہ ذیل مساوات کے نظام کے حل کو

$$a_1x + b_1y = c_1, \quad a_2x + b_2y = c_2$$

تعیین گر کے ارکان میں اس طرح لکھا جا سکتا ہے :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}. \qquad (8\text{-}3)$$

8. مساوات (8-3) کے استعمال سے دفعہ 7-10 کے سوال 1، 3 اور 5 کو حل کرو۔

9. مساوات (8-3) کے استعمال سے دفعہ 7-10 کے سوال 2، 4 اور 6 کو حل کرو۔

10. x کے لیے حل کرو : $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ x & 4 \end{vmatrix} = 0.$

11. x کے لیے حل کرو : $\begin{vmatrix} 2x & 3 \\ -5 & -4 \end{vmatrix} = 7x.$

12. متماثلہ ثابت کرو : $\begin{vmatrix} x-2 & 3 \\ x-2 & 5 \end{vmatrix} = 2(x-2).$

13. متماثلہ ثابت کرو: $\begin{vmatrix} a-b & 0 \\ 1 & c-d \end{vmatrix} \equiv (a-b)(c-d).$

14. x کی کس قیمت کے لیے؟ $\begin{vmatrix} x & 5 \\ 125 & x \end{vmatrix} > 0$

15. $ax^2 + bx + c = 0$ کے جذر کی نوعیت کے متعلق کیا کہا جا سکتا ہے اگر

$$\begin{vmatrix} b & 4a \\ c & b \end{vmatrix} > 0, \quad = 0, \quad < 0$$

اب ہم سہ ترتیبی مربع ماترس پر غور کریں

$$M = \begin{Vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{Vmatrix}. \tag{8-4}$$

ایسے ماترس کے ہر عنصر کے لیے ایک دو ترتیبی ماترس کا وجود ہوگا جسے اُس صف اور کالم کو خارج کر کے حاصل کرنا ہوگا جس میں وہ عنصر ہے۔ دو ترتیبی تعین گر جو اس ماترس سے متعلق ہوگا اور مندرجہ بالا طریقہ سے حاصل کیا گیا ہوگا زیرِ غور عنصر کا **صغیر** کہلائے گا۔ مثلاً کسی بھی عنصر کے صغیر کو اُس کے مطابق بڑے حرف سے ظاہر کرتے ہوئے ہمیں حاصل ہوگا

$$A_1 = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad B_2 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad C_2 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

اب ہم مساوات (8-4) کی سہ ترتیبی ماترس کے تعین گر کی تعریف اس طرح کرتے ہیں

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1A_1 - b_1B_1 + c_1C_1. \tag{8-5}$$

مثال 1 : مندرجہ ذیل ماترس کا تعین گر نکالو:

$$\begin{Vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \end{Vmatrix}$$

حل :

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= 2(-4+3) + 1(6-4) + 3(-9+8)$$

$$= -2 + 2 - 3$$

$$= -3.$$

مثال 2 : مساوات (8-5) کے D کو اُس کے عناصر کے ارکان میں لکھو :

حل :

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2)$$

$$= a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1. \quad (8\text{-}6)$$

سوالات

سوال 1 سے 4 تک کے تعیّن گر کی قیمت نکالو :

1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & -4 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & 7 \\ 4 & 2 & 6 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 10 \\ 2 & 2 & 6 \end{vmatrix}$

مساوات (8-6) کی قیمت کو استعمال کر کے مندرجہ ذیل کی تصدیق کرو :

5. $D = -a_2A_2 + b_2B_2 - c_2C_2$

6. $D = a_3A_3 - b_3B_3 + c_3C_3$

7. $D = a_1A_1 - a_2A_2 + a_3A_3$

8. $D = -b_1B_1 + b_2B_2 - b_3B_3$

9. $D = c_1C_1 - c_2C_2 + c_3C_3$

[نوٹ : سہ ترتیبی تعیّن گر D کی تعریف ہم سوال 5، 6، 7، 8 یا 9 میں دی گئی مساوات کے ذریعے بھی اتنی ہی اچھی طرح کر سکتے تھے۔ یہ تعریف { مساوات (8-5) } بتاتی ہے پہلی صف کے عناصر کے ذریعے D کا پھیلاؤ بذریعہ صغائر۔ سوال 5 اور 6 میں دیا گیا ہے D کا پھیلاؤ صغائر کی شکل میں بذریعہ عناصر صف دو اور تین۔ سوال 7، 8 اور 9 میں کالم کے

مطابق پھیلاؤ بذریعہ صفائر بتایا گیا ہے۔]

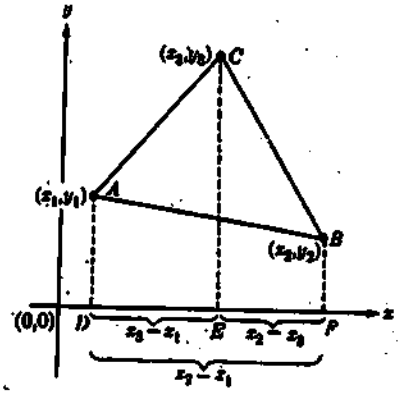
10. سوال 5 سے 9 تک کے نتائج اور مساوات (8-5) کو استعمال کر کے مندرجہ ذیل بیان ثابت کرو : سہ ترتیبی معین بہ حیثیت اُن تین حاصل ضربوں کے جوڑ کے ظاہر کیا جا سکتا ہے جو کہ حاصل ہوا ہو کسی بھی صف (یا کالم) کے ہر ایک عنصر کو اُس کے ضمیر سے ضرب دینے سے جہاں کہ ہر ایسے ضرب کی علامت جوڑ یا تفریق کی علامت ہوگی جو منحصر ہوگی اس بات پر کہ آیا صف اور کالم کے نمبر شمار کا جوڑ جس میں کہ عنصر مقیم ہے جفت ہے یا طاق۔

11. سوال 1 سے 4 تک کی قیمت علاوہ پہلی صف یا کالم کے کسی بھی صف یا کالم کے ذریعے پھیلاؤ بذریعہ صفائر سے معلوم کرو۔

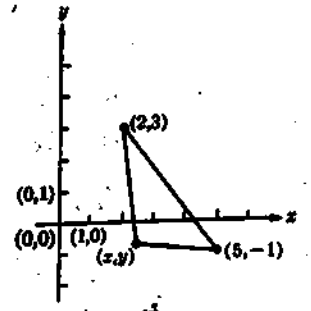
?12 ثابت کرو کہ

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}.$$

?13 شکل 8-1 کو استعمال کر کے اور یہ یاد رکھ کر کہ کسی بھی منحرف نما کا رقبہ ہوتا ہے $\frac{1}{2}(b_1 + b_2)h$ ، جبکہ b_1 اور b_2 اُس کے اساس ہیں اور h اُس کی اونچائی ثابت کرو کہ مثلث ABC کا رقبہ K اس کے راس کے مختصات کے ارکان میں ہوگا۔



شکل 8-1



شکل 8-2

رقبہ

$$K = ADEC + CEFB - ADFB$$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \qquad (8\text{-}7)$$

[اشارہ : سوال 12 کا استعمال کرو]

14. اُس مثلث کا رقبہ نکالو جس کی راسیں ان نقاط پر ہیں : (a) (2, 3) ، (5, 4) اور (4, 7)

(b) (−4, 2) ، (−2, −3) اور (3, −1)

15. اُس مثلث کا رقبہ نکالو جس کی راس کے محصات ہیں (x, y) ، (2, 3) اور (5, −1)

دیکھو شکل 2-8

16. یہ شرط کہ سوال 15 میں بنائے گئے مثلث کا رقبہ صفر ہے اس حقیقت کے مترادف ہے کہ نقطہ (x, y) اُس خط پر ہوگا جو (2, 3) اور (5, −1) سے گزرتا ہے۔ اس حقیقت کے استعمال سے اُس خطِ مستقیم کی مساوات نکالو جو (2, 3) اور (5, −1) سے گزرتی ہے۔

17. اس دفعہ کے طریقے کے استعمال سے اُس خطِ مستقیم کی مساوات نکالو جو (−2, −4)، (3, 5) سے گزرے۔

18. کسی مستوی کی دو غیر متوازی خطوط مستقیم ایک نقطہ پر ایک دوسرے کو کاٹتی ہیں۔ یہ شرط کہ ایسے تین خطوط

$$a_1x + b_1y = c_1, \quad a_2x + b_2y = c_2, \quad a_3x + b_3y = c_3,$$

ایک ہی نقطے سے گزریں گے یہ ہے کہ دیے ہوئے ماتر س

$$\begin{Vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{Vmatrix}$$

کا تعین گر صفر کے برابر ہوگا۔ یہ جانتے ہوئے کہ ایسا ہوگا ثابت کرو کہ تین خطوط مستقیم

$$x - 2y = -8, \; 3x - y = 1, \; 5x - 2y = 1$$

ایک ہی نقطے سے گزرتے ہیں۔

19. ثابت کرو کہ ان مساوات کے نظام کا حل مشترک ہوگا اور اسے معلوم کرو :

$$3x - 2y + 11 = 0, \; x - y + 5 = 0, \; 2x + y = 2$$

20. x کی قیمت نکالو اگر

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & x & 5 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0,$ (b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & x & -3 \\ 1 & 4 & -x \end{vmatrix} = 0.$

8-2. n - ترتیبی تعیّن گر:

جیسا کہ اُمید کی جاتی ہے کسی بھی متناہی درجے کے تعیّن گر وجود میں آئیں گے۔ اُن کو معدّان کی عام خصوصیات کے زیرِ غور لانے کے لیے یہ آسان ہوگا اگر ہم ماتریس اور اُس کے عناصر کے لیے ایک مختلف طریقۂ علامتی اظہار استعمال کریں۔ مان لو کہ ہم ماتریس کو M سے اور اُس کے کسی بھی عنصر کو a_{ij} (جو پڑھا جائے گا "a تحت i، j") سے علامتی طور پر ظاہر کرتے ہیں جس میں i صف کا نمبر شمار اور j اُس کالم کا نمبر شمار ہے جس میں وہ عنصر مقیم ہے۔ اس جدید استعمال کیا گیا تعیّن گر کا علامتی اظہار انگریزی ریاضی داں اے۔ کیلی (1821-1895) کا متعارف کیا ہوا ہے۔ اس کے مطابق مساوات (8-6) کو لکھ سکتے ہیں

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}. \quad (8\text{-}8)$$

اس خبارت سے یہ صاف ظاہر ہے کہ ہر جچھ حاصلِ ضرب میں ہر صف اور ہر کالم میں سے صرف ایک اور ایک ہی عنصر لیا گیا ہے۔ اس میں سے ہر ایک ضرب اس طرح مرتب کیا گیا ہے کہ پہلے ذیلی تحریر اپنے قدرتی عددی ترتیب میں ہے۔ پہلے رکن کو چھوڑ کر دوسری ذیلی تحریریں اپنی قدرتی ترتیب میں نہیں ہیں۔ دوسری ذیلی تحریر کی عکسی ترتیب (نسبت) کے اعدادی شمار پر غور کرنا چاہیے یعنی کہ کتنی دفعہ بڑا عدد صحیح چھوٹے کے پہلے آتا ہے:

	دوسری ذیلی تحریر	عکسی ترتیب (نسبت) کی تعداد
اثباتی حاصلِ ضرب	1 2 3	0
	2 3 1	2
	3 1 2	2
منفی حاصلِ ضرب	1 3 2	1
	2 1 3	1
	3 2 1	3

اس جدول سے پتہ چلتا ہے کہ اثباتی حاصل ضرب کی عکسی ترتیب جفت عدد میں ہے جبکہ نفی حاصل ضرب کی طاق عدد میں۔ اس لیے کسی بھی رکن کی صحیح علامت اس طرح $(-1)^k$ سے ظاہر کی جاسکتی ہے جہاں k عکسی ترتیب کی تعداد بتاتا ہے۔ اس مطالعہ کی براہ راست تعمیم کے ذریعے ہم n-مربع ماترس کے n ترتیبی تعیّن گر کی تعریف کرسکتے ہیں۔ یہ عبارت

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \cdots a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \cdots a_{3n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \cdots a_{nn} \end{vmatrix} \tag{8-9}$$

n-ترتیبی تعیّن گر ہے جو n بہ n ماترس سے متعلق ہے۔ اس طرح ہم تفاعل $D \to M$ تعیّن گر کی تعریف کرتے ہیں جہاں M ایک n بہ n ماترس ہے اور D مساوات (8-9) سے حاصل ہوگا۔ D کی قیمت اُن تمام ممکن حاصل ضربوں کی الجبرائی جوڑ کے برابر ہوگی جو ایسے عناصر سے بنتے ہیں کہ ہر صف اور ہر کالم میں سے ایک اور صرف ایک لے کر حاصل کیے گئے ہیں۔ ہر حاصل ضرب کی علامت $(-1)^k$ اخذ کی گئی ہے جہاں k دوسری ذیلی تحریر کی عکسی ترتیب کی تعداد بتاتی ہے جبکہ اجزا ایسے لکھے گئے ہیں کہ اُن کی اوّل ذیلی تحریر قدرتی شماری ترتیب میں ہے۔

n عناصر کے کسی بھی ممکن حاصل ضرب میں جس میں اوّل ذیلی تحریر قدرتی ترتیب میں ہے۔ دوسری ذیلی تحریر باقی ماندہ $n-1$ اعداد میں سے کوئی سا بھی عدد ہو وغیرہ تاکہ D کے پھیلاؤ میں $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1$ ارکان ہوں گے مثلاً یاد کریں کہ سہ ترتیبی تعیّن گر کے پھیلاؤ میں $3! = 6$ ارکان ہوں گی۔ چار درجی میں $4! = 24$ اور پانچ ترتیبی تعیّن گر کے پھیلاؤ میں $5! = 120$ ارکان ہوں گی۔ صاف طور پر تعیّن گر کی قیمت معلوم کرنے کے لیے ہماری یہ تعریف کوئی بہت ہی آسان طریقہ نہیں ہے کیوں کہ اس تعیّن گر کے پھیلاؤ میں ارکان کی تعداد بہت ہے۔ اس سے قبل کہ

---

* علامت $n!$ (پڑھا جاتا ہے "ضربیہ n") 1 سے n تک کے اعداد صحیح کے حاصل ضرب کو ظاہر کرتا ہے۔ بالصراحت $1! = 1$، $2! = 2$، $3! = 6$ وغیرہ۔ یہ علامت بعد کے آنے والے باب میں استعمال کی جائے گی۔

ہم کوئی عملی طریقہ اس کی قیمت معلوم کرنے کا اختیار کریں، ہمیں تعیّن گر کی کچھ ابتدائی خصوصیات ثابت کرنا چاہئیں۔

مسئلہ 8-1 : اگر کسی ماترس کی مطابق صف اور کالم آپس میں بدل دیے جائیں تو اس کے تعیّن گر میں کوئی فرق نہیں پڑتا۔

مثال کے طور پر
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

ثبوت : یاد کریں کہ ہمارے علامتی اظہار میں ہر عنصر کے لیے اوّل ذیلی تحریر نمبر شمار صف ظاہر کرتی ہے اور کالم کو دوسری ذیلی تحریر۔ اگر ہم اب اُس تعیّن گر کو زیرِ غور لائیں جو کہ نئے ماترس M' سے متعلق ہو جس کے صف اور کالم لگاتار M کے مطابق کالم اور صف ہوں گے۔ D' کا ہر رکن (وہ تعیّن گر جو M' سے متعلق ہو) میں ہر صف اور ہر کالم میں سے ایک ایک عنصر ہوگا۔ اگر دوسری ذیلی تحریر اپنے شماری قدرتی ترتیب میں لکھ دی جائے تو اوّل ذیلی تحریر کی کسی ترتیب کی تعداد کسی بھی مخصوص رکن کی علامت کا تعیّن کرے گی۔ اس طرح صفوں اور کالموں کا آپس میں ادل بدل صرف علامتی اظہار کی تبدیلی کی غرض کی تکمیل کرتا ہے اور نتیجے کے طور پر کسی بھی رکن کی قیمت نہیں بدلتی۔ لہٰذا D' اور D مماثل ہیں۔

مسئلہ 8-1 کے براہِ راست نتیجے کے طور پر تعیّن گر کی کسی دوسری خصوصیت میں بھی الفاظ 'صف' اور 'کالم' ہر جگہ آپس میں ردّ و بدل کیے جا سکتے ہیں۔

مسئلہ 8-2 : اگر کسی تعیّن گر میں کوئی سے دو کالم (صف) ادل بدل کر دیے جائیں تو تعیّن گر کی علامت بدل جاتی ہے۔

ثبوت : پہلے ہم دو متصل کالموں کی ادل بدل پر غور کریں۔ نئے تعیّن گر کے پھیلاؤ میں اوّل ذیلی تحریریں وہی رہیں گی لیکن دوسری ذیلی تحریریں ——— جو کالموں کی نمائندگی کرتی ہیں ——— ادل بدل ہو جائیں گی اور نتیجے کے طور پر ہر رکن میں عکسی ترتیب کی تعداد یا تو ایک کم ہو جائے گی یا ایک زیادہ ہو جائے گی۔ اس طرح ہر رکن کی علامت اور نتیجے کے طور پر تعیّن گر کی قیمتیں بدل جائیں گی۔

اب مان لو کہ ہم j اور k کالموں کو آپس میں ادل بدل کرنا چاہتے ہیں (جہاں اپنی آسانی کے لیے j، k سے کم ہے) اور ان دونوں کے درمیان m کالم حائل ہیں۔ یہ اس طرح کر سکتے ہیں کہ j ویں مقام والے کالم کو k ویں مقام والے کالم کے ٹھیک بائیں لے جائیں، m ادل بدل) اور ان دونوں

متصل کالموں کو ادل بدل کر دیں (ایک ادل بدل) اور k ویں مقام والے کالم کو j ویں مقام والے کالم کے اصل مقام پر واپس لے آویں (m ادل بدل) چونکہ مقامات کی کل ادل بدل ہوئی $2m+1$ جو طاق ہے اور اس سے ہر ایک کی علامت بدل جائے گی۔ ہمیں اپنا مطلوبہ نتیجہ حاصل ہو جائے گا۔

مسئلہ 8-3 : اگر کسی ماترس کے دو کالم (صف) مماثل ہوں تو اس کے تعیین گر کی قیمت صفر ہوگی۔

ثبوت : اگر کسی تعیین گر کی قیمت D ہو اور اُس کے دونوں مماثل کالموں کو آپس میں ادل بدل کر دیں تو مسئلہ 8-2 سے اُس کی قیمت ہو جائے گی $-D$ لیکن چونکہ دو کالم آپس میں مماثل ہیں تعیین گر میں کوئی تبدیلی نہیں آئے گی اس لیے $D=-D$ یعنی $D=0$

مسئلہ 8-4 : اگر کسی تعیین گر میں کسی کالم (صف) کے ہر ایک عنصر کو ایک ہی عدد m سے ضرب کر دیں تو تعیین گر کی قیمت m سے ضرب ہوگی۔

مثلاً
$$\begin{vmatrix} a_{11} & ma_{12} & a_{13} \\ a_{21} & ma_{22} & a_{23} \\ a_{31} & ma_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{32} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

ثبوت : یہ خصوصیت براہِ راست تعریف سے ہی حاصل ہو جاتی ہے۔ اگر کسی کالم کے ہر ایک عنصر کو m سے ضرب دیں تو تعیین گر کے پھیلاؤ کا ہر ایک رکن میں m جزو ترکیبی ہوگا۔

مسئلہ 8-4 کے براہِ راست نتیجے کے طور پر مندرجہ ذیل ضمنی نتیجہ حاصل ہوگا۔

ضمنی نتیجہ 8-4 : کوئی بھی رقم جو کسی کالم (صف) کے ہر ایک رکن کا جزو ترکیبی ہو درحقیقت تعیین گر کے پھیلاؤ کا جزو ترکیبی ہوگا۔

مسئلہ 8-5 : اگر تین ماترس M_1، M_2 اور M_3 کے متصل عناصر برابر ہوں سوائے ایک کالم (صف) کے جس میں M_1 کے عناصر M_2 اور M_3 کے متصل عناصر کی جوڑ کے برابر ہیں تو $D_1=D_2+D_3$ جہانکہ D_1، D_2، D_3 سے متعلق تعیین گر ہے۔

مثلاً
$$\begin{vmatrix} a_{11}+a'_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+a'_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+a'_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a'_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

ثبوت D_1 کے پھیلاؤ کے ہر رکن میں ان میں سے ایک اور صرف ایک ہی حاصل جمع ہوگی جس میں سے

ہر ایک حاصل جمع دو ارکان میں ظاہر کی جائے گی - D_2 اور D_3 کے پھیلاؤ تو اس کے براہ راست نتیجہ ہیں۔

مسئلہ 8-6 : اگر کسی ماترس کے کسی کالم (صف) کا ہر ایک عنصر ایک ہی عدد m سے ضرب کیا گیا ہو اور دوسرے کالم کے متصل عنصر میں جوڑ دیا گیا ہو تو متعلقہ تعین گر میں کوئی تبدیلی نہیں ہوتی۔

مثال کے طور پر

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} + ma_{13} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + ma_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + ma_{33} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

ثبوت : دائیں طرف والے تعین گر کو زیر غور لانے سے اور مسئلہ 8-5 ، 8-4 اور 8-3 کے استعمال سے براہ راست یہ ثابت ہو جاتا ہے۔

ان میں سے بہت سی خصوصیات n ترتیب والے تعین گر کی قیمت نکالنے میں مفید ہوں گی۔ اسی طریقہ سے قیمت نکالنے کے طریقے اگلی دفعہ میں دیے جائیں گے۔

سوالات

1. واضح کرو کہ مندرجہ ذیل تعین گر کیوں برابر ہیں ؟ اس حقیقت کی جانچ واقعی قیمت نکال کر و :

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

2. واقعی پھیلاؤ کے ذریعے ثابت کرو کہ تعین گر کی علامت بدل جائے گی اگر اول اور تیسری صف کو اول بدل کر دیا جائے :

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

بغیر قیمت نکالے بتاؤ کہ سوال 3 اور 4 کے تعین گر کی قیمت صفر کیوں ہے ؟ قیمت نکال کر جانچ کرو :

3. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 6 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 7 & 3 \\ 6 & 2 & -4 \end{vmatrix}$

5. مندرجہ ذیل تعیین گر کی قیمت کسی بھی صف یا کالم میں سے مشترک ارکان کے جزو ترکیبی نکال کر اور پھر پھیلا کر نکالو اور اُس کی جانچ براہِ راست پھیلا کر کرو:

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 6 & 16 & 8 \\ -12 & 6 & 10 \end{vmatrix}$$

6. مسئلہ 5-8 کے استعمال سے دو تعیین گر کے جوڑ کو ایک واحد تعیین گر میں ظاہر کرو۔ تینوں تعیین گر کی قیمت نکال کر اپنے کام کی پڑتال کرو:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 5 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

7. ذیل کے تعیین گر میں دوسری صف کے ہر ایک عنصر کو 3 سے ضرب دیجیے اور نتیجے کے طور پر حاصل شدہ عناصر کو پہلی صف کے متصل عناصر میں جوڑ کر ایک نیا تعیین گر بناؤ۔ براہِ راست تعیین گر کو پھیلا کر ثابت کرو کہ اصل تعیین گر کی قیمت میں کوئی فرق نہیں پڑا:

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & -6 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

8. سوال 7 کے تعیین گر میں تیسرے کالم کے ہر عنصر کو 2 سے ضرب دو اور حاصل ضربوں کے پہلے کالم کے متصل عناصر میں سے تفریق کر کے ایک نیا تعیین گر بناؤ۔ تعیین گر کے براہِ راست پھیلاؤ سے ثابت کرو کہ اصل تعیین گر کی قیمت میں کوئی فرق نہیں پڑا۔

9. مندرجہ ذیل مساوات کے جذر نکالو:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & a & b \\ x^2 & a^2 & b^2 \end{vmatrix} = 0.$$

[اشارہ: اگر $x = a$ تو پہلے دو کالم آپس میں برابر ہوں گے]

10. ذیل کی مساوات کے جذر نکالو :

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix} = 0.$$

11. ذیل کی مساوات میں x کی قیمتیں مسئلہ 3-8 اور 4-8 کے استعمال سے نکالو اور تعین گر کو پھیلا کر جانچ کرو :

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 9 \\ 2x & 2 & 6 \\ x^2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

12. ثابت کرو کہ :

$$2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \\ b_3+c_3 & c_3+a_3 & a_3+b_3 \end{vmatrix}.$$

8-3 . تعین گر کا پھیلاؤ بذریعہ صغائر :

سہ ترتیبی تعین گر کا پھیلاؤ بذریعہ صغائر کا طریقہ وہ بیان مانا جائے جو مسئلہ 1-8 کے سوالوں کے دوسرے سٹ کے سوال 10 میں بیان کیا گیا ہے۔ یہی طریقہ عام طور سے صحیح ہے۔ n ترتیبی مربع ماترس کے کسی عنصر کا صغیر وہ $(n-1)$ ترتیبی تعین گر ہے جو اُس کالم اور صف کو خارج کر کے حاصل ہوتا ہے جس میں عنصر جس کا صغیر نکالنا ہے مقیم ہے۔ a_{ij} کے صغیر کو A_{ij} سے ظاہر کیا جائے گا۔ مساوات (8-9) میں دیے گئے n ترتیبی تعین گر کے لیے ہم مندرجہ ذیل مسئلہ کو ثابت کرنا چاہتے ہیں۔

مسئلہ 8-7 :

کسی بھی تعین گر کی قیمت کسی بھی کالم (صف) کے ہر عنصر اور اُس کے صغیر کے حاصل ضرب کے الجبرائی جوڑ کے برابر ہوگی۔ ایسے حاصل ضرب کی علامت ہوگی $(-1)^{i+j}$ جہاں کہ عنصر i-ویں صف اور j-ویں کالم میں ہے۔

مثال کے طور پر

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = -a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$
$$-a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{42}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}$$

یہ چار ترتیبی تعیّن گر کا پھیلاؤ بذریعہ دوسرا کالم۔

ثبوت : یہ مسئلہ دو حقائق کو نوٹ کرنے سے ثابت ہوتا ہے۔ پہلے حاصل ضرب $a_{11}A_{11}$ پر غور کرو۔ اس حاصل ضرب میں جس میں وہ تمام ارکان ہیں جن میں a_{11} ایک جزو ہے ہر رکن کی تمام علامات صحیح ہیں کیونکہ A_{11} کی عکسی ترتیب کی تعداد a_{11} کو سابقہ لگانے سے نہیں بدلتی۔

اب کسی عنصر a_{ij} پر غور کرو۔ یہ a_{11} کے اصل مقام پر اس طرح لایا جا سکتا ہے کہ پہلے i ویں صف کو پہلی صف میں لایا جائے جس میں صفوں کی $i-1$ ادل بدل ہوگی۔ اور پھر j ویں کالم کو پہلے کالم کے مقام پر لایا جائے جس میں $j-1$ مزید کالم کی ادل بدل ہوگی۔ اس عمل میں علامت کی $i-1+j-1=i+j-2$ تبدیلیاں ہوں گی۔ اگر D' نیا تعیّن گر ہو تو اس کا D کے ساتھ تعلق اس طرح ظاہر کیا جائے گا :

$$D' = (-1)^{i+j-2}D = (-1)^{i+j}D.$$

پس پھیلاؤ میں وہ تمام ارکان جس میں a_{ij} ایک جزو ہوگا، ہوں گی $(-1)^{i+j}a_{ij}A_{ij}$ جہاں کہ A_{ij} میں D میں a_{ij} کا اصل صغیر ہوگا۔ پس جس طرح کہ اس مسئلہ میں بتایا گیا ہے D کو بذریعہ کسی بھی کالم (صف) پھیلایا جا سکتا ہے۔

اب ہم کسی بھی تعیّن گر کی قیمت نکالنے کے لیے تیار ہیں۔ مندرجہ ذیل مثالوں میں سابقہ مسائل کے استعمال کو نوٹ کرو۔

مثال 1 : تعیّن گر کی قیمت نکالو:

$$D = \begin{vmatrix} -4 & 2 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 7 & 2 & -3 & 2 \\ 4 & -1 & 7 & 5 \end{vmatrix}.$$

حل : کیوں کہ $a_{23} = 0$ اس لیے دوسری صف یا تیسرے کالم کے عناصر بہ نسبت دوسری صف کے بڑے ہیں اس لیے ہم دوسری صف ہی کو اخذ کرتے ہیں۔ اس طرح

$$D = -2\begin{vmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 7 & 5 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -4 & 5 & 6 \\ 7 & -3 & 2 \\ 4 & 7 & 5 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} -4 & 2 & 5 \\ 7 & 2 & -3 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix}$$

اس میں سے ہر سہ ترتیبی تعین گر کو پھیلا کر ہمیں حاصل ہوگا

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 7 & 5 \end{vmatrix} = 2(-15 - 14) - 5(10 + 2) + 6(14 - 3)$$

$$= -58 - 60 + 66 = -52.$$

$$\begin{vmatrix} -4 & 5 & 6 \\ 7 & -3 & 2 \\ 4 & 7 & 5 \end{vmatrix} = -4(-15 - 14) - 5(35 - 8) + 6(49 + 12)$$

$$= 116 - 135 + 366 = 347.$$

$$\begin{vmatrix} -4 & 2 & 5 \\ 7 & 2 & -3 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix} = -4(14 - 3) - 2(49 + 12) + 5(-7 - 8)$$

$$= -44 - 122 - 75 = -241.$$

ان قیمتوں کے استعمال سے ہمیں حاصل ہوگا۔

$$D = -2(-52) + 347 + 3(-241) = -272.$$

ہم اس مثال میں یہ نوٹ کریں کہ ہمارا کام ایک عنصر کے صفر ہو جانے سے مختصر ہو گیا تھا۔ مسئلہ 6-8 کے استعمال سے ہم مزید دوسرے صفر لا کر کام کو اور زیادہ مختصر کر سکتے ہیں۔ اب ہم ایک اور مثال پر غور کریں۔

مثال 2 : تعین گر کی قیمت نکالو :

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & -3 \\ -9 & -5 & 7 & -8 \\ 1 & 5 & 3 & -2 \end{vmatrix}.$$

حل : ہم ایک ایسے عنصر کو تلاش کریں جو 1 یا 1− کے برابر ہو اور اُس صف یا کالم کے ساتھ جس میں 1+ ہو ہم پہلی صف کے 1− کو اخذ کر لیتے ہیں۔ مسئلہ 6-8 کے استعمال سے ہم پہلی صف میں صفر لا سکتے ہیں۔

سلسلہ وار (1) تیسرے کالم کے عناصر کو 3 سے ضرب دیکر حاصل ضربوں کو پہلے کالم کے متصل عناصر میں جوڑ دو۔

(2) تیسرے کالم کے عناصر کو 2− سے ضرب دیکر حاصل ضربوں کو دوسرے کالم کے متصل عناصر میں جوڑ دو۔

(3) تیسرے کالم کے عناصر کو 2 سے ضرب دیکر حاصل ضربوں کو چوتھے کالم کے متصل عناصر میں جمع کر دو۔

اس لیے

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 10 & -3 & 2 & 1 \\ 12 & -19 & 7 & 6 \\ 10 & -1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

اب مثال 1 کی طرح اوّل صف کے ذریعے پھیلا کر ہمیں حاصل ہوگا

$$D = -1 \begin{vmatrix} 10 & -3 & 1 \\ 12 & -19 & 6 \\ 10 & -1 & 4 \end{vmatrix}.$$

اپنے کام کو مختصر کرنے کے لیے ہم پھر صفر لائیں۔ اس سہ ترتیبی تعین گر میں (1) پہلی صف کے عناصر کو 6− سے ضرب دے کر حاصل ضربوں کو دوسری صف کے متصل عناصر میں جوڑ دو۔ (2) پہلی صف کے عناصر کو 4− سے ضرب دے کر حاصل ضربوں کو تیسری صف کے متصل عناصر میں جوڑ دو۔ نتیجے کے طور پر اس سے حاصل ہوگا :

$$D = -1 \begin{vmatrix} 10 & -3 & 1 \\ -48 & -1 & 0 \\ -30 & 11 & 0 \end{vmatrix},$$

جس کو آخری کالم کے ذریعے پھیلانے سے حاصل ہوگا :

$$D = -1\{1[(-48)(11) - (-30)(-1)]\} = -1(-528 - 30) = 558.$$

اگر کسی کالم یا صف میں کوئی بھی عنصر 1 یا 1− کے برابر نہیں ہے ہم عام طور سے مسئلہ 6-8 کو بروئے کار لا کر ایسا عنصر شامل کر سکتے ہیں اور مندرجہ بالا طریقے سے اپنا کام آگے جاری رکھ سکتے ہیں۔ حالانکہ 1 کو لانا ضروری نہیں ہے پھر بھی اس عمل سے کسر کے داخل ہونے کے امکانات، اگر وہ شروع سے

ہی اُس میں نہ تھیں ——— خارج ہو جاتے ہیں۔

سوالات

مندرجہ ذیل ہر تعیّن گر کی قیمت نکالو:

1. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & 0 & -2 \\ 2 & 4 & -6 & 2 \\ 3 & -4 & 1 & -2 \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 & -5 \\ 3 & 0 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & -4 & 2 & 8 \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 4 & 8 \\ 7 & 5 & 2 & 4 \\ -7 & 2 & 3 & -8 \\ 6 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 4 \\ 4 & -3 & 5 & -2 \\ 6 & -1 & 4 & 7 \\ 5 & -2 & 8 & 3 \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & -2 & 2 & 7 \\ -3 & 2 & -1 & -3 \end{vmatrix}$

6. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$

8-4 . تعیّن گر کے ذریعے مفرد مساوات کے نظام کا حل؛

دفعہ 7-10 اور 7-11 میں ہم دو اور تین نامعلوم مقدار والے مفرد مساوات کے نظام کے حل پر بحث کر چکے ہیں۔ مفرد مساوات کے نظام جس میں نامعلوم مقدار کی تعداد کچھ بھی ہو اور مساوات کی تعداد ان مقداروں کے مطابق ہو کو تعیّن گر کے ارکان میں ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ عام صورت میں جس میں n مقدار مجہول میں n مفرد مساوات ہوں زیر غور لاکر

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= k_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= k_2, \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= k_n, \end{aligned} \qquad (8\text{–}10)$$

ہم اس مسئلہ کو ثابت کر سکتے ہیں جو کریمر کے اصول کے نام سے موسوم ہے۔ جو سوئٹزرلینڈ کا باشندہ) ریاضی داں گبریل کریمر (1704–1752) کے اعزاز میں ہے۔

مسئلہ 8-8 : اگر D نامعلوم مقداروں کے ضرب کا تعیّن گر ہو تو D اور کسی ایک نامعلوم مقدار کا حاصل ضرب تعیّن گر D_i کے برابر ہوگا جو D سے اس طرح حاصل ہوگا کہ اُس نامعلوم مقدار کے ضریب کی جگہ مستقل ارکان کو بدل دیا جائے گا اور دوسرے عناصر کو ویسے ہی رہنے دیا جائے گا۔

ثبوت : کیوں کہ

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{vmatrix},$$

مسئلہ 8-4 سے

$$Dx_1 = \begin{vmatrix} a_{11}x_1 & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21}x_1 & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \vdots & \\ a_{n1}x_1 & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

اب اگر ہم دوسرے کالم کے ہر عنصر کو x_2 سے ضرب دیں، تیسرے کو x_3 سے وغیرہ اور ان سب حاصل ضربوں کو پہلے کالم کے متناظر عناصر سے جوڑ دیں تو مسئلہ 8-6 سے ہمیں حاصل ہوگا

$$Dx_1 = \begin{vmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \vdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} k_1 & a_{12} \cdots a_{1n} \\ k_2 & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \vdots & \\ k_n & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{vmatrix} = D_1.$$

اس طرح ہمیں معلوم ہوگا

$$Dx_1 = D_1, \quad Dx_2 = D_2, \quad \ldots, \quad Dx_n = D_n, \qquad (8\text{-}11)$$

جہاں کہ D_i، D سے اس طرح حاصل کیا جائے گا کہ D کے i-ویں کالم کے عناصر $a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{ni}$ کی جگہ $k_1, k_2, \ldots, k_n$ کو بدل دیا جائے گا۔

اگر $D \neq 0$* تو مساوات (8-10) کے یکتا حل مساوات (8-11) سے بذریعہ تقسیم اس طرح حاصل ہوں گے :

---

* اگر $D = 0$ تو حل وجود میں آئیں بھی یا نہ بھی آئیں۔ اس کی مکمل بحث اس کتاب کی حدود سے خارج ہے۔

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad \cdots, \quad x_n = \frac{D_n}{D}. \tag{8-12}$$

یہ صاف ظاہر ہے کہ قیمتوں کا یہ سٹ مساوات (8-10) کے دیے ہوئے نظام کو مطمئن کرتا ہے اور اس لیے اس کا ایک حل ہوگا۔ مثال کے طور پر، اوّل مساوات مطمئن ہوگی کیوں کہ

$$k_1 D - a_{11}D_1 - a_{12}D_2 - \cdots - a_{1n}D_n$$

یہ پھیلاؤ ہے اس تعیّن گر کا

$$\begin{vmatrix} k_1 & a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ k_1 & a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ k_2 & a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \vdots & & \\ k_n & a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix} \tag{8-13}$$

بذریعہ اوّل صف۔ لیکن یہ تعیّن گر صفر ہے کیوں کہ پہلی دو صف مماثل ہیں۔ دوسری مساواتیں بھی اسی طرح مطمئن ہو جائیں گی۔

سوالات

1. دفعہ 7-11 میں دیے گئے سوال 1، 3، 5 اور 7 کی مساوات کے نظام کو اس دفعہ کے طریقے سے حل کرو۔

2. دفعہ 7-11 کے سوال 2، 4، 6، اور 8 میں دیے گئے نظامِ مساوات کو اس دفعہ کے طریقے سے حل کرو۔

مندرجہ ذیل مساوات کے نظام کو بذریعہ تعیّن گر حل کرو:

3. $x + y + z + w = -4$
$x + 2y + 3z + 4w = 0$
$x + 3y + 6z + 10w = 9$
$x + 4y + 10z + 20w = 24$

4. $x + 2y - z = 8$
$y + 3z - w = 3$
$z + 4w - x = -20$
$w + 5x - y = 9$

5. n درجہ والی عبارت* کو معلوم کرنے کے [جو کہ تیز رفتار والی شمار ندہ مشین میں عددی تجزیہ (analysis) کے لیے استعمال ہوتی ہیں] ایک مشہور و معروف طریقے میں جو کہ $n + 1$ واضح

---

* یہاں ہمارا مطلب n ترتیب والی کثیر رکنی سے ہے جس پر اگلے باب میں بحث کی جائے گی [دیکھو مساوات (9-1)، دفعہ 3-3 میں دی گئی تعریف یاد کرو]۔

نقاط سے گزرتی ہے تعیّن گر کا استعمال کیا جاتا ہے۔ وضاحت کرو کہ مندرجہ ذیل تعیّن گر کو اگر

$$\begin{vmatrix} f(x) & 1 & x & x^2 \\ f(x_1) & 1 & x_1 & x_1^2 \\ f(x_2) & 1 & x_2 & x_2^2 \\ f(x_3) & 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix},$$

صفر کے برابر رکھا جائے تو یہ تفاعل f کی تعریفی مساوات کی حیثیت سے کیوں مانی جا سکتی ہے جہاں عبارت $f(x)$ دو ترتیبی ہے اور تین نقاط کے محتصات سے مطمئن ہوتی ہے۔

[اشارہ : اگر $x = x_1$ اور $f(x) = f(x_1)$ تاکہ پہلی دو صفیں مماثل ہوں وغیرہ۔]

6. مندرجہ بالا سوال 5 کی روشنی میں دفعہ 1-8 کے سوال 16 کی وضاحت کرو۔

7. ذیل کے تعیّن گر کو پھیلا کر عبارت کو مختصر کرو :

$$\begin{vmatrix} f(x) & 1 & x & x^2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \\ 11 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

اور اس طرح مخصوص دو ترتیبی تفاعل $f(x) = ax^2 + bx + c$ کی انواع کے دریافت کرو جو کہ ان نقاط سے گزرتی ہیں $(1, 1)$ ، $(2, 2)$ اور $(-1, 11)$

باب 9

کثیر رکنی تفاعل

باب 7 میں ہم نے اوّل درجی اور دو درجی تفاعل پر بحث کی تھی۔ ہم اس قسم کے تفاعل کی تعمیم کرنا چاہتے ہیں۔ کوئی بھی تفاعل جس کی تعریفی مساوات اس شکل میں ظاہر کی جاسکے

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n, \qquad (9\text{-}1)$$

جس میں $a_0 \neq 0$ ، کوئی مثبت عدد صحیح ہو یا صفر اور a_i $(i = 0, 1, 2, \ldots n)$ مستقل ہوں ایک ناطق تکمیلی تفاعل یا x میں n درجی کثیر رکنی کہلاتی ہے (اس تعریف کا دفعہ 3-3 کی تعریف سے موازنہ کرو)۔ اس باب میں جب تک کہ اس کے خلاف نہ کہا جائے $f(x)$ ایک ایسا ہی تفاعل کہلائے گا۔

9-1 . چند مسائل : کثیر رکنی تفاعل کے مطالعہ میں بہت سے بہت ہی اہم مسائل ہیں جن کو اب ثابت کیا جانا چاہیے جس سے کہ نہ صرف اُن کے گراف کھینچنے میں آسانی ہو بلکہ اُن سے کثیر رکنی مساوات کے حل میں بھی مدد ملے۔

مسئلہ 9-1 (مسئلہ باقیہ) : اگر کوئی کثیر رکنی $f(x)$ کو $x - r$ سے تقسیم دیں جس میں r ایک مستقل ہے تو جب تک کہ ایسی مستقل باقی جو x کے غیر طابع ہو حاصل نہ ہو۔ یہ $f(r)$ کے برابر ہوگی۔

ثبوت : مان لیا کہ $f(x)$ کو $x - r$ سے تقسیم دینے سے $q(x)$ خارج قسمت حاصل ہوتا ہے اور R مستقل باقی بچتا ہے۔ تو $f(x)$ اس متماثلہ سے ظاہر کیا جاسکتا ہے [دفعہ 3-3 کی مساوات (3-8) اور (3-9) کو یاد کرو] ۔

$$f(x) \equiv (x - r) \cdot q(x) + R, \qquad (9\text{-}2)$$

صاف ظاہر ہے کہ $q(x)$ ، $n-1$ درجہ کا ہوگا کیوں کہ یہ مان لیا گیا ہے کہ $f(x)$ ، n درجی ہے۔ کیوں کہ یہ متماثلہ x کی تمام قیمتوں کے لیے صحیح ہے اس لیے یہ $x=r$ کے لیے بھی صحیح ہوگی اس لیے

$$f(r) = (r-r)\cdot q(r) + R = 0\cdot q(r) + R$$

یا

$$f(r) = R. \qquad (9\text{–}3)$$

تمثیل 1 ؛ مان لیا کہ $f(x) = 5x^3 - 14x + 3$ اور $r = 2$ تو دفعہ 3–3 کی مثال 3 سے $R = 15$ $f(x)$ میں x کی جگہ $r = 2$ بدلنے سے ہمیں حاصل ہوگا

$$f(2) = 5(2)^3 - 14(2) + 3 = 40 - 28 + 3 = 15$$

جو کہ مسئلہ باقیہ کے مطابق ہے۔

اسی مسئلہ کی وجہ سے x کی مختلف قیمتوں کے لیے $f(x)$ کی قیمت نکالنے کا تالیفی تقسیم کا طریقہ جو دفعہ 3–3 میں بیان کیا گیا ہے سب سے زیادہ مفید ہے۔ یہ طریقہ براہِ راست قیمت بدلنے والے طریقے سے زیادہ مفید ہے جو کہ خصوصی طور پر اُس وقت صاف ظاہر ہوتے ہیں جبکہ n یا تو بڑا ہو یا r چھوٹے اعداد صحیح سے مختلف ہو۔

مسئلہ 9–2 (مسئلہ جزو ضربی) : اگر $f(r) = R$ صفر ہو یعنی r ، $f(x)$ کا صفر ہو تو $(x-r)$ جزو ہوگا $f(x)$ کا۔

ثبوت : کیوں کہ r ، $f(x)$ کا ایک صفر ہے یعنی $R = 0$ تو ہمیں حاصل ہوگا

$$f(x) \equiv (x-r)\cdot q(x) + 0.$$

اس طرح $(x-r)$ ایک جزو ضربی ہوگا۔

مسئلہ 9–3 (مسئلہ جزو ضربی کا معکوس) : اگر $(x-r)$، $f(x)$ کا ایک جزو ضربی ہے تو $f(r) = R = 0$ اور r ، $f(x)$ کا صفر کہلائے گا۔

ثبوت : کیوں کہ $x-r$ جزو ضربی ہے $f(x)$ کا

$$f(x) \equiv (x-r)\cdot q(x),$$

جہاں $q(x)$ خارج قسمت ہے $f(x)/(x-r)$ کا۔ اس لیے

$$f(r) = (r-r)\cdot q(r) = 0\cdot q(r) = 0,$$

جس سے ظاہر ہوتا ہے کہ r ایک صفر ہے $f(x)$ کا۔

تمثیل 2 : مقدار $x-3$ ایک جزو ضربی ہے : $f(x) \equiv x^3 - 27$ کا کیوں کہ

$$f(3) = (3)^3 - 27 = 0$$

تمثیل 3 : تفاعلی مساوات $f(x) = x^3 - 6x^2 + 3x + 10$ ، $x-2$ سے پوری پوری طرح تقسیم ہو جاتی ہے کیوں کہ $f(2)$ ، یہ حقیقت کہ $f(2) = 0$ ہے تالیفی تقسیم کے ذریعے اس طرح ثابت کیا جاتا ہے :

1	−6	3	10	2
	2	−8	−10	
1	−4	−5	0	

سوالات

بذریعہ تالیفی تقسیم باقی نکالو اور براہِ راست قیمت رکھ کر اُس کی جانچ کرو جبکہ

1 $3x^2 - 2x - 4$ کو $x-3$ سے تقسیم کیا جائے۔

2 $x^3 + 4x - 7$ کو $x-3$ سے تقسیم کیا جائے۔

3 $x^3 - 2x^2 + 3$ کو $x+2$ سے تقسیم کیا جائے۔

4 $x^4 - 2x^3 - 3x^2 - 4x - 8$ کو

(a) $x-2$ سے (b) $x+1$ سے تقسیم کیا جائے۔

5 $2x^4 - 3x^3 - 20x^2 - 6$ کو

(a) $x-4$ سے (b) $x+3$ سے تقسیم کیا جائے۔

6 $x^3 + 3x^2 - 2x - 5$ کو

(a) $x+2$ سے (b) $x+3$ سے تقسیم کیا جائے۔

سوال 7 سے 12 تک میں مسئلہ جزو ضربی کی مدد سے معلوم کرو کہ آیا اوّل قدر دوسری کا جزو ہے

7 $x-2,\ x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 2x - 24$

8 $x+3,\ x^3 - 4x^2 - 16x + 9$

9 $x-3,\ x^4 - 5x^3 + 8x^2 + 15x - 2$

10 $x - 5,\ x^3 + 2x^2 - 25x - 60$

11 $2x + 3,\ 2x^4 + 5x^3 + 3x^2 + 8x + 12$

12 $3x + 1,\ 9x^3 + 6x^2 + 4x + 2$

13 ثابت کرو کہ $y - x$ مندرجہ ذیل کا جزو ہوگا :

$$x^5 - y^5,\ x^6 - y^6,\ x^7 - y^7 \text{ اور } x^8 - y^8$$

تالیفی تقسیم کی مدد سے ہر حالت میں خارج قسمت نکالو۔

14 ثابت کرو کہ $x + y$ جزو ہے $x^7 + y^7$ اور $x^9 + y^9$ کا۔ تالیفی تقسیم کے ذریعے ہر ایک کا خارج قسمت نکالو۔

کثیر رکنی تفاعل کے صفروں کے تعلق سے ایک زیادہ اہم مسئلہ کو تالیفی تقسیم کے ارکان میں ظاہر کیا جا سکتا ہے۔

مسئلہ 9-1 : $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ کو $x - r$ سے تالیفی تقسیم میں جس میں $a_0 > 0$

1. اگر $r > 0$ اور تیسری صف میں تمام اعداد مثبت ہوں تو $f(x)$ کے مثبت صفروں کے لیے r بالائی حد ہوگی۔
2. اگر $r < 0$ اور تیسری صف کے اعداد کی علامت متبادل ہو تو r، $f(x)$ کے نفی صفروں کے لیے زیریں حد ہوگی۔

ثبوت : دونوں ہی میں خواہ (1) ہو یا (2) کے تالیفی تقسیم کے عمل کی وجہ سے r کی قیمت میں عددی بیشی سے سوائے پہلی صف کے عددوں کے تیسری صف کے اعداد میں عددی بڑھوتری ہوگی۔ اسی طرح اگر r میں عددی طور پر بیشی ہو جائے تو تیسری صف کے آخری عدد میں بھی عددی اضافہ ہوگا اور اسی طرح باقی کبھی صفر نہ ہوگا خواہ r میں کچھ بھی بیشی ہو۔

مثال : $f(x) = x^4 + 3x^3 - 9x^2 + 3x - 10$ کے صفروں کے لیے بالائی اور زیریں حدود نکالو۔

حل : تالیفی تقسیم کی مدد سے ہمیں حاصل ہوگا :

جس سے ظاہر ہوتا ہے کہ r ایک صفر ہے $f(x)$ کا۔

تمثیل 2 : مقدار $x-3$ ایک جزو ضربی ہے $f(x) \equiv x^3 - 27$ کا کیوں کہ

$$f(3) = (3)^3 - 27 = 0$$

تمثیل 3 : تفاعلی مساوات $f(x) = x^3 - 6x^2 + 3x + 10$ سے $x-2$ ، $f(2)$ پوری پوری طرح تقسیم ہو جاتی ہے کیوں کہ یہ حقیقت کہ $f(2) = 0$ ہے تالیفی تقسیم کے ذریعے اس طرح ثابت کیا جاتا ہے :

$$\begin{array}{rrrrr} 1 & -6 & 3 & 10 & \lfloor 2 \\ & 2 & -8 & -10 & \\ \hline 1 & -4 & -5 & 0 & \end{array}$$

سوالات

بذریعہ تالیفی تقسیم باقی نکالو اور براہِ راست قیمت رکھ کر اُس کی جانچ کرو جبکہ

1 $3x^2 - 2x - 4$ کو $x-3$ سے تقسیم کیا جائے۔

2 $x^3 + 4x - 7$ کو $x-3$ سے تقسیم کیا جائے۔

3 $x^3 - 2x^2 + 9$ کو $x+2$ سے تقسیم کیا جائے۔

4 $x^4 - 2x^3 - 3x^2 - 4x - 8$ کو

(a) $x-2$ سے (b) $x+1$ سے تقسیم کیا جائے۔

5 $2x^4 - 3x^3 - 20x^2 - 6$ کو

(a) $x-4$ سے (b) $x+3$ سے تقسیم کیا جائے۔

6 $x^3 + 3x^2 - 2x - 5$ کو

(a) $x+2$ سے (b) $x+3$ سے تقسیم کیا جائے۔

سوال 7 سے 12 تک میں مسئلہ جزو ضربی کی مدد سے معلوم کرو کہ آیا اوّل قدر دوسری کا جزو ہے

7 $x-2,\ x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 2x - 24$

8 $x+3,\ x^3 - 4x^2 - 18x + 9$

9 $x-3,\ x^4 - 5x^3 + 8x^2 + 15x - 2$

10 $x - 5,\ x^3 + 2x^2 - 25x - 50$

11 $2x + 3,\ 2x^4 + 5x^3 + 3x^2 + 8x + 12$

12 $3x + 1,\ 9x^3 + 6x^2 + 4x + 2$

13 ثابت کرو کہ $x - y$ مندرجہ ذیل کا جزو ہوگا :

$$x^5 - y^5,\ x^6 - y^6,\ x^7 - y^7 \text{ اور } x^8 - y^8$$

تالیفی تقسیم کی مدد سے ہر حالت میں خارج قسمت نکالو۔

14 ثابت کرو کہ $x + y$ جزو ہے $x^7 + y^7$ اور $x^5 + y^5$ کا۔ تالیفی تقسیم کے ذریعے ہر ایک کا خارج قسمت نکالو۔

کثیر رکنی تفاعل کے صفروں کے تعلق سے ایک زیادہ اہم مسئلہ کو تالیفی تقسیم کے ارکان میں ظاہر کیا جا سکتا ہے۔

مسئلہ 9-4 : $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ کو $x - r$ سے تالیفی تقسیم میں جس میں $a_0 > 0$

1. اگر $r > 0$ اور تیسری صف میں تمام اعداد مثبت ہوں تو $f(x)$ کے مثبت صفروں کے لیے r بالائی حد ہوگی۔
2. اگر $r < 0$ اور تیسری صف کے اعداد کی علامت متبادل ہو تو r، $f(x)$ کے نفی صفروں کے لیے زیریں حد ہوگی۔

ثبوت : دونوں ہی میں خواہ (1) ہو یا (2) کے تالیفی تقسیم کے عمل کی وجہ سے r کی قیمت میں عددی بیشی سے سوائے پہلی صف کے عددوں کے تیسری صف کے اعداد میں عددی بڑھوتری ہوگی۔ اسی طرح اگر r میں عددی طور پر بیشی ہو جائے تو تیسری صف کے آخری عدد میں بھی عددی اضافہ ہوگا اور اسی طرح باقی کبھی صفر نہ ہوگا خواہ r میں کچھ بھی بیشی ہو۔

مثال : $f(x) = x^4 + 3x^3 - 9x^2 + 3x - 10$ کے صفروں کے لیے بالائی اور زیریں حدود نکالو۔

حل : تالیفی تقسیم کی مدد سے ہمیں حاصل ہوگا :

	1	3	−9	3	−10
3		3	18	27	90
	1	6	9	30	80

کیوں کہ تیسری صف میں تمام اعداد مثبت ہیں، اس لیے $f(x)$ کے صفر کے لیے 3 بالائی حد ہے۔

دوبارہ

	1	3	−9	3	−10
−6		−6	18	−54	306
	1	−3	9	−51	296

کیوں کہ تیسری صف کی علامات متبادل ہوتی ہیں کوئی بھی صفر -6 سے کم نہیں۔

بدقسمتی سے اگلے مسئلہ کا کوئی ابتدائی ثبوت نہیں ہے لیکن اس کی اہمیت کی وجہ سے اس کو مان لینا پڑے گا۔

مسئلہ 9-5 (الجبرا کا بنیادی مسئلہ) : ہر کثیر رکنی تفاعل جس کی تعریفی مساوات ہے،

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n,$$

جہاں $n \geq 1$ اور $a_0 \neq 0$ میں کم از کم ایک (حقیقی یا غیر حقیقی)* صفر ہوگا۔

اس مسئلہ کو سب سے پہلے جرمن ریاضی داں کارل فریڈرک گاس (Karl Friedrich Gauss) نے 22 سال کی عمر میں ثابت کیا تھا۔ یہ مسئلہ ہم کو کثیر رکنی تفاعل کے صفروں کی تعداد ثابت کرنے میں مددگار ثابت ہوتا ہے۔

مسئلہ 9-6 : ہر کثیر رکنی تفاعل کے جس کی تعریفی مساوات حسب ذیل ہو

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n,$$

جہاں $a_0 \neq 0$ تو اس کے صفر ٹھیک n ہی ہوں گے۔

ثبوت : کیوں کہ از روئے مسئلہ 9-5، $f(x)$ کا کم از کم ایک صفر r_1 ہوگا مسئلہ 9-2 سے $(x - r_1)$، $f(x)$ کا ایک جزو ہوگا۔ اس طرح

$$f(x) \equiv (x - r_1) \cdot q_1(x), \qquad (9\text{-}4)$$

جہاں کہ $q_1(x)$ خارج قسمت ہوگا $f(x)/(x - r_1)$ کا۔ دوبارہ $q_1(x)$ کا صفر r_2 ہے تاکہ

---

* غیر حقیقی اعداد پر کچھ تفصیلی بحث باب 16 میں کی گئی ہے۔

$$q_1(x) \equiv (x - r_2) \cdot q_2(x),$$

جہاں $q_2(x)$ خارج قسمت ہوگا $q_1(x) / (x - r_2)$ کا۔ اس لیے ہم لکھ سکتے ہیں

$$f(x) \equiv (x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot q_2(x). \qquad (9\text{–}5)$$

کیوں کہ ہم جانتے ہیں کہ ہر نیا خارج قسمت اپنے سے پہلے والے سے ایک ڈگری (درجہ) کم ہوگا، ہم اسی عمل کو جاری رکھ کر آخر میں لکھ سکتے ہیں

$$f(x) \equiv (x - r_1)(x - r_2) \cdots (x - r_n) \cdot q_n(x), \qquad (9\text{–}6)$$

جہاں پر کیوں کہ $(x - r_i)$ ، n جزو ہیں، $q_n(x)$ مستقل ہونا چاہیے a_0 ؛ اس لیے

$$f(x) \equiv a_0(x - r_1)(x - r_2) \cdots (x - r_n), \qquad (9\text{–}7)$$

جس میں کہ ہر ایک r_i ، $f(x)$ کا صفر ہے۔

مان لو کہ r کوئی عدد ہے۔ کیوں کہ مساوات (9–7) ایک مماثل ہے اس لیے یہ x کی تمام قیمتوں کے لیے صحیح ہوگی اس طرح

$$f(r) \equiv a_0(r - r_1)(r - r_2) \cdots (r - r_n).$$

اگر $r \neq r_i$ کسی i کے لیے تو کوئی بھی جزو $(r - r_i)$ صفر نہ ہوگا کیوں کہ $a_0 \neq 0$ ، $f(r) \neq 0$ اور r ، $f(x)$ کا صفر نہیں ہے اس لیے اس میں ٹھیک n صفر ہوں گے جس سے مسئلہ ثابت ہو جاتا ہے۔

تمثیل 4 : تفاعل $(x - 3)^2(x - 1)(x + 2)^3$ چھ درجی کثیر رکنی ہے۔ اس کے چھ صفر ہوں گے $3, 3, 1, -2, -2, -2$ نوٹ کرو کہ کوئی بھی صفر جو m دفعہ واقع ہوتا ہے وہ بہ حیثیت m صفروں کے مانا جاتا ہے۔

سوالات

ذیل کے ہر تفاعل کے صفر صرف معائنہ کر کے نکالو اور ہر ایک کی تعداد کثیر بتاؤ :

1. $(x - 2)(x - 3)^2(x + 4)^3$
2. $(x + 1)^4(x - 2)^5$
3. $(x + 7)(2x - 3)^2$
4. $(x^2 - 4x + 4)(x^2 + 3x - 10)$
5. $(3x + 5)(x^2 - 6x + 9)^2$

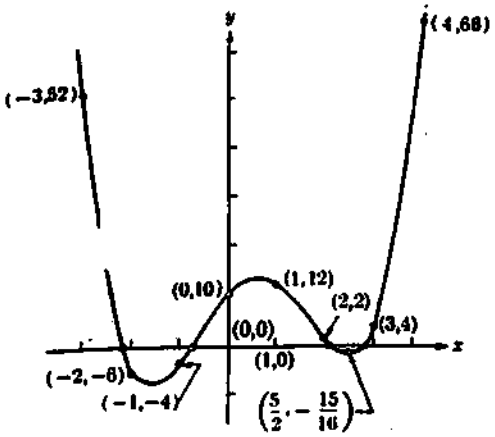
ذیل کے تفاعل کے صفروں کے لیے بالائی اور زیریں حدود نکالو :

6. $x^3 - 3x^2 - 2x + 15$
7. $x^3 + 2x^2 - 7x - 8$
8. $x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 10x + 10$
9. $x^4 - x^3 - x^2 - 2x - 6$
10. $x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x + 2$
11. $x^4 - 5x^2 + 6x - 9$
12. $x^3 - 8x + 5$
13. $x^3 + 16x - 29$
14. $x^5 + 5x^2 - 7$
15. $x^5 - 3x^2 + 24$

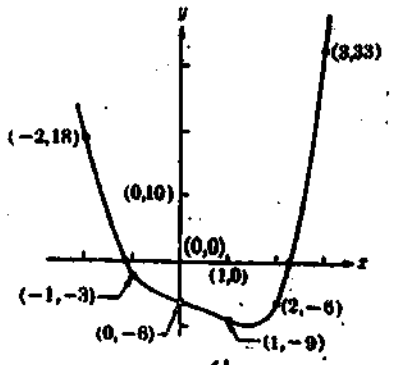
9-2. کثیر رکنی تفاعل کا گراف کھینچنا :

کسی تفاعل کے حقیقی صفر معلوم کرنے کے طریقوں میں سے ایک طریقہ دفعہ 2-5 کے گرافوں کے سلسلے میں بیان کیا گیا تھا۔ یہ طریقہ کسی بھی کثیر رکنی تفاعل کے لیے استعمال کرنا قطعی ممکن ہے کیوں کہ تالیفی تقسیم کے طریقے سے ہم متغیر کی کسی بھی قیمت کے لیے، تفاعل قیمتیں آسانی سے معلوم کر سکتے ہیں اور اس طرح قیمتوں کا ایک جدول بنا کر اُس سے ایک گراف کھینچ سکتے ہیں۔ گراف کے نقاط کو ملانے میں احتیاط برتنا چاہیے۔ ہم یاد رکھیں کہ کسی بھی تفاعل f کے حقیقی صفر اُن نقاط کے فصلہ ہیں جہاں کہ $y = f(x)$ کا گراف x محور کو کاٹتا یا مَس کرتا ہے۔

مثال 1 : $y = f(x) = x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 10x + 10$ کا گراف کھینچو اور جانچ کرو کہ اس کا ایک حقیقی صفر -3 اور -2 کے درمیان ہے اور ایک -1 اور 0 کے درمیان اور دو 2 اور 3 کے درمیان ہیں۔



شکل 9-1



شکل 9-2

حل : پہلے ذیل میں دکھائی گئی قیمتوں کا جدول بناؤ۔ کسی بھی اختیاری x کے لیے تفاعل کی متصل قیمتیں تالیفی تقسیم سے نکالو۔ عام طور سے یہ عقل مندی کی بات ہوگی کہ کسی بھی بالائی اور زیریں حدود کے درمیان x کی قیمت عدد صحیح میں لے جائے (کیوں؟) اس کے ساتھ ساتھ کسری قیمتیں بھی منحنی کی شکل کی تحقیق کے لیے ضروری ہوں گی۔ جدول سے قیمتیں لے کر بہ حیثیت نقاط گراف کی گئی ہیں اور شکل 1-9 میں گراف کھینچا گیا ہے۔ نوٹ کریں کہ دونوں محوروں پر اسکیل اپنی گنجائش کشادگی کی وجہ سے یکساں نہیں ہیں۔ شکل سے یہ صاف ظاہر ہے کہ صفروں کا مقام مثال کے بیان کے مطابق ہے :

x	-3	-2	-1	0	1	2	$2\frac{1}{2}$	3	4
y	52	-6	-4	10	12	2	$-\frac{15}{16}$	4	66

مثال 1 میں چار درجی تفاعل کے چار حقیقی صفر ہیں۔ ایسا ہمیشہ نہیں ہوتا کیوں کہ کچھ صفر غیر حقیقی بھی ہو سکتے ہیں۔ کسی تفاعل کا غیر حقیقی صفر اُس کے گراف سے تقریب کیا جا سکتا ہے۔

مثال 2 : اس تفاعل کا گراف کھینچو جس کی تفریقی مساوات ہے

$$y = f(x) = x^4 - \tfrac{1}{2}x^3 - x^2 - 2x - 6$$

اور اس کے حقیقی صفروں کو قریب قریب ٹھیک نکالو۔

حل : دوبارہ قیمتوں کا جدول بناؤ۔ نقاط کو مرتسم کرو اور گراف کھینچو (شکل 2-9) :

x	-2	-1	0	1	2	3
y	18	-3	-6	-9	-6	33

اگرچہ تفاعل چار درجی ہے اس کا گراف x-محور کو صرف دو جگہ کاٹتا ہے۔ یہ دونوں حقیقی صفر -1 ، -2 اور 2 اور 3 کے درمیان ہیں جبکہ دوسرے دو غیر حقیقی ہیں۔

بدقسمتی سے ایک عام کثیر رکنی تفاعل کے غیر حقیقی صفروں کو تقریبی طور پر نکالنے کا کوئی آسان طریقہ نہیں ہے۔

سوالات

مندرجہ ذیل مساوات سے تعریف کیے گئے تفاعل کے گراف کھینچو اور اس طرح سوال 1 سے 4 تک میں

دیے گئے بیان کی تصدیق کرو :

1 $f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 1$ کا ایک صفر -2 اور -1 کے درمیان، 0 اور 1 کے درمیان اور 1 اور 2 کے درمیان ہے۔

2 $f(x) = x^3 - 3x + 1$ کا ایک صفر -2 اور -1 کے درمیان، 0 اور 1 کے درمیان اور 1 اور 2 کے درمیان ہے۔

3 $f(x) = x^4 - 2x^3 + 12x - 17$ کا ایک صفر -3 اور -2 کے درمیان، اور ایک 1 اور 2 کے درمیان ہے۔

4 $f(x) = x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x + 2$ کے دو صفر 2 اور 3 کے درمیان اور دو -1 اور 0 کے درمیان ہیں۔

مندرجہ ذیل تفاعلی مساوات کے گراف کھینچ کر حقیقی صفروں کے مقامات دکھاؤ :

5 $f(x) = x^4 - 20x^2 + 48x - 32$

6 $f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 4$

7 $f(x) = 4x^3 + 8x^2 - 11x + 3$

8 $f(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 + x + 6$

9 $f(x) = x^5 - 3x^3 + 9x^2 - 8x + 11$

10 $f(x) = -x^4 + 2x^2 + 8x + 3$

9-3. صفروں اور قیمتوں (جذروں) پر عمومی تصریحات :

یاد کریں کہ کسی تفاعل کے صفر اُس مساوات کے جذر (قیمت) کے حامل ہیں جو تفاعل کو صفر کے برابر رکھنے سے حاصل ہوگا۔ نتیجے کے طور پر کثیر رکنی تفاعل کی بابت ہماری تمام گزشتہ تصریحات کا اس متعلقہ مساوات کے جذروں پر بھی اطلاق کیا جا سکتا ہے۔

باب 7 میں کسی بھی کثیر رکنی ذیل کی مساوات کو حل کرنے کے لیے ہم نے مخصوص طریقہ معلوم کیا تھا

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0 \qquad (a_0 \neq 0)$$

جس میں $n = 1$ (مفرد مساوات) اور $n = 2$ (دو درجی مساوات)۔ اس قسم کی مساوات کو حل کرنے کے لیے جبکہ $n = 3$ اور $n = 4$ ہو ضابطے ہیں لیکن یہ اس کتاب کی حدود سے خارج ہیں۔ ٹارٹگلیا (Tartaglia) پہلا شخص تھا جس نے عام سہ درجی مساوات کے حل بتانے کے لیے

ضابطے معلوم کیے۔ انھیں کارڈن (Cardan) نے 1545 میں شائع کیا تھا اور کارڈن کے ضابطوں کے نام سے موسوم ہیں۔ اس کے تھوڑی مدت بعد فیراری (Ferrari) نے عام چہار درجی مساوات کے حل کرنے کے لیے ضابطے نکالے۔ اُن مساواتوں کے لیے جن میں $n \geq 5$ یہ ثابت کیا جا چکا ہے کہ عام طور پر قیمتوں (جذروں) کے لیے ضریب کے ارکان میں کوئی الجبرائی ضابطے موجود نہیں ہیں۔ عمومی ضابطے معلوم کرنے کے لیے بہت سی کوششیں کی گئیں لیکن آخری طور پر این۔ ایچ۔ ایبل (N. H. Abel) (1802–1829) جو ایک نارویجین تھا 1824 میں ثابت کر دیا کہ عام حالت میں کسی ضابطے کا وجود نہیں ہے۔ بعد میں ایک فرانسیسی ای۔ گیلو (E. Galois) نے (1811–1832) یہ ثابت کر دیا کہ چند مخصوص شرائط کے تحت ایسے ضابطوں کا وجود ہے۔

کسی کثیر رکنی مساوات کے تمام ناطق قیمتوں کا نکالنا یا غیر ناطق قیمتوں کو تقریباً نکالنا مقابلتاً زیادہ آسان ہے۔ غیر حقیقی قیمتوں پر باب 16 میں مختصراً بحث کی جائے گی۔

9-4 ناطق قیمتیں (جذر) :

ایسی مساوات جس کے ضریب اعداد صحیح ہوں اُن کے ناطق جذروں کے متعلق ہمارے پاس مندرجہ ذیل مسئلہ ہے۔

مسئلہ 9-7 : اگر ناطق عدد p/q جو کہ اپنے کمترین ارکان کی کسر ہے اس مساوات کا جذر ہو

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0, \qquad (9\text{-}8)$$

جہاں a_i $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$ اعداد صحیح ضریب ہیں تو p ٹھیک ٹھیک قاسم ہوگا a_n کا اور q ٹھیک ٹھیک قاسم ہے a_0 کا۔

ثبوت : کیوں کہ p/q مساوات (9-8) کی قیمت (جذر) ہے۔ ہمیں حاصل ہوگا

$$a_0\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_1\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + a_2\left(\frac{p}{q}\right)^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right) + a_n = 0.$$

اس مساوات کے ہر رکن کو q^n سے ضرب دینے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے :

$$a_0p^n + a_1p^{n-1}q + a_2p^{n-2}q^2 + \cdots + a_{n-1}pq^{n-1} + a_nq^n = 0. \qquad (9\text{-}9)$$

اگر ہم a_nq^n کو دائیں طرف بدل دیں اور دونوں رکنوں کو p سے تقسیم کر دیں تو

$$a_0p^{n-1} + a_1p^{n-2}q + a_2p^{n-3}q^2 + \cdots + a_{n-1}q^{n-1} = \frac{-a_nq^n}{p}.$$

کیوں کہ ہر a_i ، p اور q ایک عدد صحیح ہے۔ بایاں رکن اور اسی لیے دایاں رکن بھی ایک عدد صحیح ہوگا۔ مزید p اور q میں کوئی جزو مشترک نہیں ہے اس لیے p اور q^n کو تقسیم بھی نہیں کرتا۔ اس لیے p ، a_n کا ٹھیک ٹھیک قاسم ہے۔

اگر مساوات (9-9) میں ہم رکن a_0p^n کو مساوات کی مخالف سمت لے جائیں اور دونوں ممبروں کو q سے تقسیم دیں تو ہمیں حاصل ہوگا

$$a_1p^{n-1} + a_2p^{n-2}q + \cdots + a_{n-1}pq^{n-2} + a_nq^{n-1} = \frac{-a_0p^n}{q}.$$

اب اسی قسم کی دلیل سے یہ ثابت ہوجائے گا کہ q ، a_0 کا ٹھیک ٹھیک قاسم ہے۔

مندرجہ ذیل مسئلہ صاف طور پر اس کا براہِ راست ضمنی نتیجہ ہے۔

مسئلہ 9-8 : مندرجہ ذیل مساوات کا کوئی بھی ناطق جذر (قیمت)

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0, \qquad (9\text{-}10)$$

جہاں پر a_i ایک صحیح ضریب ہے ایک ایسا عدد ہونا چاہیے جو ایک مستقل رکن a_n کا ٹھیک ٹھیک قاسم ہو۔

اب ہم مساوات (9-8) کی قسم کی کسی بھی کثیر رکنی مساوات کے تمام ناطق جذر (قیمتیں) نکالنے کے لیے تیار ہیں۔

مثال 1 : مندرجہ ذیل مساوات کو پہلے ناطق جذر نکال کر حل کرو :

$$x^4 - x^3 - 7x^2 - 14x - 24 = 0$$

حل : ممکن ناطق جذروں کے لیے مساوات کو جانچنے سے بذریعہ مسئلہ 9-8 ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ وہ ہیں ±1 ، ±2 ، ±3 ، ±4 ، ±6 ، ±8 ، ±12 اور ±24 تالیفی تقسیم سے معلوم ہوا کہ 1 ، 2 اور 3 اس کے جذر نہیں ہیں۔ $x = 4$ کے لیے

1	−1	−7	−14	−24	4
	4	12	20	24	
1	3	5	6	0	

اس نتیجے کو الجبرائی شکل میں (مساوات 9-3) رکھنے سے حاصل ہوگا

$$x^4 - x^3 - 7x^2 - 14x - 24 = (x^3 + 3x^2 + 5x + 6)(x - 4).$$

کیوں کہ $x - 4$ اصل مساوات کا جزو ضربی ہے۔ $x = 4$ ایک جذر ہوگا اور یہ سوال اس سوال میں تحلیل ہوگیا کہ ہم درجہ میں پست شدہ $x^3 + 3x^2 + 5x + 6 = 0$ مساوات کے جذر نکالیں۔ کیوں کہ اس مساوات میں تمام علامات مثبت ہیں اس لیے اس کے کوئی بھی جذر مثبت نہیں ہوں گے (کیوں ؟)۔ تالیفی تقسیم کے استعمال سے ہمیں معلوم ہوگا کہ -1 جذر نہیں ہے لیکن $x = -2$ ایک جذر ہے :

	1	3	5	6
-2		-2	-2	-6
	1	1	3	0

اب نئے درجے میں پست شدہ نئی مساوات ہوگی $x^2 + x + 3 = 0$ اس کو بذریعہ دو درجی ضابطہ حل کرنے سے مساوات 10-7 ہمیں حاصل ہوگا $x = (-1 \pm \sqrt{-11})/2$ تاکہ ہمارا مکمل حل ہوگا

$$x = 4, \quad -2, \quad \frac{-1 \pm \sqrt{-11}}{2},$$

جس میں دو آخری جذر (قیمتیں) غیر حقیقی ہیں۔

مثال 2 : مندرجہ ذیل مساوات کو ٹھیک ٹھیک جذروں کے لیے حل کرو :

$$4x^5 - 16x^4 + 17x^3 - 19x^2 + 13x - 3 = 0.$$

حل : کیوں کہ ارکان کی علامات متبادل ہیں اس مساوات کے کوئی نفی جذر نہیں ہیں (کیوں ؟) اس کی ممکن ناطق قیمتیں ہیں 1 ، 3 ، $\frac{1}{2}$ ، $\frac{3}{2}$ ، $\frac{1}{4}$ اور $\frac{3}{4}$ تالیفی تقسیم کی مدد سے ہمیں معلوم ہوگا کہ 1 جذر نہیں ہے لیکن $\frac{1}{2}$ ہے۔

	4	-16	17	-19	13	-3
$\frac{1}{2}$		2	-7	5	-7	3
	4	-14	10	-14	6	0

کیوں کہ درجہ میں پست شدہ مساوات کے ہر رکن میں 2 مشترک ہے اس کو اس سے تقسیم کرکے تحلیل کرلیا جائے $2x^4 - 7x^3 + 5x^2 - 7x + 3 = 0$ ہمیں دوبارہ معلوم ہوگا کہ $\frac{1}{2}$ ایک جذر ہے یعنی یہ اصل مساوات کا دوہرا جذر ہے۔

$$\begin{array}{rrrrr|l} 2 & -7 & 5 & -7 & 3 & \frac{1}{2} \\ & 1 & -3 & 1 & -3 & \\ \hline 2 & -6 & 2 & -6 & 0 & \end{array}$$

دوبارہ مشترک جزو 2 باہر نکال کر ہمیں معلوم ہوگا کہ نئی پست شدہ مساوات بنتی ہے

$x^3 - 3x^2 + x - 3 = 0$ اب ممکن ناطق جذر عدد صحیح 3 ہی باقی ہے (کیوں؟)۔

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & -3 & 1 & -3 & 3 \\ & 3 & 0 & 3 & \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & \end{array}$$

ہم دیکھتے ہیں کہ 3 اس کا جزو ہے اور پست شدہ مساوات $x^2 + 1 = 0$ کا حل ہمیں دو آخری غیر حقیقی جذر $\pm\sqrt{-1}$ دیتا ہے۔ پس مکمل حل ہوگا $x = \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 3, \pm\sqrt{-1}$

سوالات

مندرجہ ذیل مساوات کی ٹھیک ٹھیک جذر (قیمتیں) نکالو:

$2x^3 - 3x^2 - 11x + 6 = 0$	1
$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$	2
$x^4 - 16x^3 + 86x^2 - 176x + 105 = 0$	3
$x^3 + x^2 - 24x + 36 = 0$	4
$x^4 - x^3 - 19x^2 + 49x - 30 = 0$	5
$x^4 - 4x^2 + 4x - 1 = 0$	6
$4x^4 + 8x^3 - 7x^2 - 21x - 9 = 0$	7
$2x^4 + 5x^3 - 11x^2 - 20x + 12 = 0$	8
$x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 = 0$	9
$10x^4 - 13x^3 + 17x^2 - 26x - 6 = 0$	10
$8x^6 - 12x^4 + 14x^3 - 13x^2 + 6x - 1 = 0$	11
$12x^3 - 52x^2 + 61x - 15 = 0$	12

مندرجہ ذیل میں سے ہر ایک کو θ کی اُن مثبت قیمتوں کے لیے حل کرو جو 2π سے کم ہوں۔

13 $4\sin^4\theta - 12\sin\theta\cos^2\theta - 7\cos^2\theta + 9\sin\theta + 5 = 0$

[اشارہ: متماثلہ $\cos^2\theta \equiv 1 - \sin^2\theta$ کو استعمال کرو اور $x = \sin\theta$ مان کر اختصار کرو۔]

14 $4\sin^3\theta - 4\sin\theta\cos^2\theta - 11\cos^2\theta + 3\sin\theta + 8 = 0$

15 $3\tan\theta\sec^2\theta + 3\sec^2\theta - 4\tan\theta - 4 = 0$

9–5 غیر ناطق جذر (قیمتیں): کثیر رکنی مساوات کو غیر ناطق قیمتوں کے لیے حل

کرنے کے بہت سے مشہور تخمینی طریقے ہیں — ہم یہاں بہت ہی ابتدائی طریقے پر غور کریں گے۔ دفعہ 2–9 میں ہم نے دیکھا تھا کہ $f(x) = 0$ کی کوئی آسان قیمت نظری طور پر جدا کی جا سکتی ہے۔ اگر تفاعل مقابلتاً آسان ہو تو بہت ہی کم کام کرنا پڑے گا۔ اگر $f(a)$ اور $f(b)$ مخالف علامات کے ہوں تو a اور b کے درمیان کم از کم ایک ایسی قیمت ہوگی جس کے لیے $f(x) = 0$ ۔ یہی بنیادی نظریہ ذیل کی مثال میں استعمال کیا جائے گا۔

مثال 1 : $x^3 - x^2 - 3x + 1 = 0$ مساوات کے جذر کی بڑی سے بڑی مثبت تخمینی قیمت نکالو۔

حل : پہلے تفاعل $y = x^3 - x^2 - 3x + 1$ کی شکل 3–9 میں کھینچے گئے گراف سے نوٹ کریں کہ جذر جس کا تخمینہ کرنا چاہتے ہیں 2 اور 3 کے درمیان واقع ہے۔ اگر ہم اس درمیانی فاصلہ کو دس برابر حصّوں میں تقسیم کر دیں اور متواتر تالیفی تقسیم x کی قیمتوں

$2.1, 2.2, 2.3, \ldots, 2.9, 3,$ کے لیے استعمال کریں تو معلوم ہوگا کہ $f(2.1) = -0.45$ اور $f(2.2) = 0.21$ یعنی قیمت 2.1 اور 2.2 کے درمیان واقع ہے۔ اگر ہم یہی طریقہ ان قیمتوں کے لیے دُہرائیں $2.11, 2.12, 2.13, \ldots, 2.19, 2.2,$ ہمیں معلوم ہوگا کہ $f(2.17) = -0.0006$ لیکن $f(2.18) = 0.0678$ اس سے ہمیں یہ یقین ہوتا ہے کہ $x = 2.17$ اعشاریہ کی دو مقاموں تک صحیح قیمت کی نمائندگی کرتا ہے۔ درحقیقت

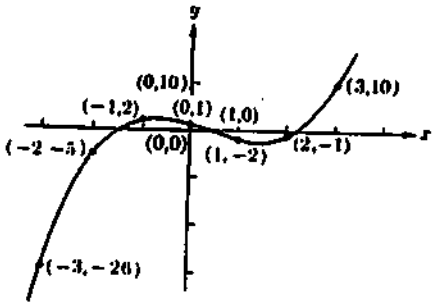
---

* بحث مساوات کی زیادہ تر کتابوں میں گریف، ہارنر اور نیوٹن کے طریقے دیے ہوئے ہیں۔ تیز رفتار تخمینی مشینوں کی وجہ کی ایجاد کی وجہ سے نیوٹن کا طریقہ اہم ترین ہو گیا ہے۔ بجائے اس کے کہ منحنی پر دو نقاط کے درمیان کا فاصلہ ایک خطِ مستقیم مانا جائے۔ یہ ایک ہی نقطہ کا استعمال اس طرح کرتا ہے کہ منحنی کو تخمینی مماس اُس نقطہ پر x محور کو کہاں کاٹتا ہے۔ یہ اندازہ کرتا ہے۔ اس عمل کی سادگی اُس کے بار بار دُہرانے میں ہے جو کسی بھی معقول طریقے سے اچھا برتاؤ کرنے والے تفاعل کے لیے استعمال کیا جا سکتا ہے خواہ وہ کثیر رُکنی ہو یا نہیں۔

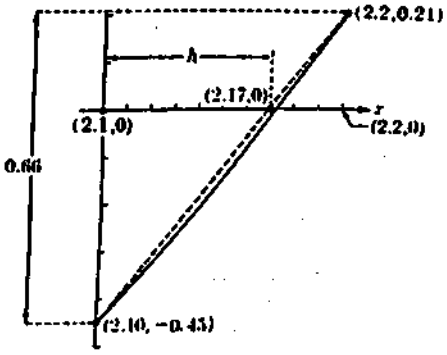
$f(2.171) = 0.00621$ جو ظاہر کرتا ہے کہ $x = 2.170$ اعشاریہ کے تین مقام تک صحیح قیمت ہوگی۔ یہ عمل دراصل لامتناہی طور پر جاری رکھا جا سکتا ہے۔

ایسی قیمت کو تخمینی طور پر نکالنے میں جو کام کرنا پڑتا ہے اُس کو بہت حد تک خطّی ادراج سے بہت کم کیا جا سکتا ہے۔ ہم نے دیکھا کہ مطلوبہ قیمت 2.1 اور 2.2 کے درمیان ہے۔ منحنی کا یہ حصّہ شکل 9–4 میں دکھایا گیا ہے جس میں دونوں نقاط کے محل کا فصلہ 2.1 اور 2.2 ہے۔ اگر ہم یہ مان لیں کہ منحنی دونوں نقاط کے درمیان تقریباً ایک خطِ مستقیم ہے تو مشابہ مثلثین سے

$$\frac{h}{0.45} = \frac{0.1}{0.66},$$



شکل 9–3



شکل 9–4

تاکہ $h = 0.07$ تقریباً۔ اس لیے x کے لیے ایک معقول تخمینہ ہے۔ $2.1 + 0.07 = 2.17$، اب ہم $f(2.17)$ کی قیمت نکال کر اس کا نفی نکالتے ہیں۔ اُس طریقے کو دیکھ کر جس سے کہ منحنی کھینچی گئی ہے ہم خیال کرتے ہیں کہ زیرِ بحث قیمت 2.17 سے بڑی ہے۔ $f(2.18)$ کی قیمت نکال کر اس قیمت کو بغیر دوسری ممکن آخذ قیمتوں کو نکالے الگ کر لیتے ہیں۔ یہ خطّی ادراج کا طریقہ ہر نئے اعشاریہ کے لیے اُس وقت تک عمل میں لایا جا سکتا ہے جب تک کہ مطلوبہ درستی حاصل نہ ہو۔

اس طریقے کی خوب صورتی اس کی سادگی ہے۔ مزید برآں اس کو کسی بھی حقیقی قیمت کو تخمینہ کرنے کے لیے استعمال کیا جا سکتا ہے بشرطیکہ تفاعل کا گراف x۔ محور کو واقعی طور پر کاٹتا ہے نہ یہ کہ صرف اُس کو مماس ہو

مطالعہ کرنے والے یاد کریں کہ دفعہ 13-6 میں ہم نے θ کی دائری تفاعلی قیمت معلوم کی تھی جہاں کہ θ جدول میں دیا گیا تھا۔ اگر θ کی ایسی قیمت ہو جو جدول میں دی گئی قیمتوں کی درمیانی قیمت ہو تو ہم یہی خطی ادراج کا عام قاعدہ لگائیں گے۔ مخصوص طور پر اگر x اور $x + (0.0001)r$ جدول I (وہ کالم جو ریڈین بتاتے ہیں) میں متصل قیمتیں ہوں اور r کوئی بھی عدد صحیح 0 اور 29* کے درمیان ہو تو ہم $\sin(x + r)$ کو ارجمنٹ متناسب سے ادراجی طور پر تخمینہ کر سکتے ہیں (ایک خطِ مستقیم کو مان کر):

$$\sin(x + r) = \sin x + \frac{r}{29}[\sin(x + 0.0029) - \sin x]. \qquad (9\text{-}11)$$

دوسری تفاعلی قیمتیں اسی قسم کے ضابطوں سے نکالی جاتی ہیں۔

مثال 2 : $\sin 0.4236$ معلوم کرو۔

حل : کیوں کہ 0.4236 واقع ہے 0.4218 اور 0.4247 کے درمیان

$r = 36 - 18 = 18$ تاکہ

$$\begin{aligned}\sin 0.4235 &= \sin 0.4218 + \tfrac{18}{29}(\sin 0.4247 - \sin 0.1218)\\ &= 0.4094 + \tfrac{18}{29}(0.4120 - 0.4094)\\ &= 0.4094 + 0.0016\\ &= 0.4110.\end{aligned}$$

مثال 3 : $\cos 1.0071$ معلوم کرو۔

حل : کیوں کہ 1.0071 واقع ہے 1.0065 اور 1.0094 کے درمیان۔ اس لیے

$r = 6$ تاکہ

---

* تقریباً تمام حالتوں میں متعلقہ کالم میں دو متصل اعداد کا درمیانی فرق 0.0029 ہے۔ کیوں کہ ہم غیر ناطق اعداد کے تخمینوں کے ساتھ کام کر رہے ہیں (ایک اکائی دائرہ کی قوسی نمبائی 2π کے برابر تقسیم در تقسیم) یہ اعداد قطعی نہیں ہیں۔ یہ ہو سکتا ہے کہ فرق 0.0030 ہو اور اگر ایسا ہے تو اس کو اہمیت دینا چاہیے۔ مثال کے طور پر دیکھو اندراجات 0.3752 اور 0.3782

$$\begin{aligned}\cos 1.0071 &= \cos 1.0065 + \tfrac{6}{7}(\cos 1.0004 - \cos 1.0065)\\ &= 0.5348 + \tfrac{6}{7}(0.5324 - 0.5348)\\ &= 0.5348 - 0.0005\\ &= 0.5343.\end{aligned}$$

اس جدول کا اور اس طرح اُس عدد کو معلوم کرنے کے لیے بھی کر سکتے ہیں جو کہ اعشاریہ کے قریب ترین چار مقام تک تقریباً صحیح لایا گیا ہو جبکہ اس عدد کے کسی تفاعل کی قیمت جدول کے دو اندراجات کے درمیان ہو۔ اگر $\sin\theta$ دیا گیا ہو ہمیں sine کالم میں ایسے دو متصل اندراجات ملیں گے جن کے درمیان دی ہوئی قیمت واقع ہوگی۔ پس فرض کرو کہ $\theta = x + (0.0001)r$ جہاں r کوئی عدد صحیح ہے 0 اور 29 کے درمیان اور x اور $x + 0.0029$ دو متصل اندراجات جدول میں ہیں تو ہم r کی قیمت اُسی تخمینی ضابطہ (مساوات 11-9) سے نکالیں گے جو $r/29$ کے لیے حل کیا گیا ہوگا

$$\frac{r}{29} = \frac{\sin(x + (0.0001r) - \sin x}{\sin(x + 0.0029) - \sin x} \qquad (9\text{–}12)$$

دوسرے تفاعل بھی اسی نمونے کی تقلید کریں گے۔

مثال 4 : اگر $\sin\theta = 0.6231$ تو عدد θ کی قیمت 0 اور $\pi/2$ کے درمیان نکالو۔

حل : ہم sine کالم میں 0.6231 کو $\sin 0.6720 = 0.6225$ اور $\sin 0.6749 = 0.6248$ کے درمیان دریافت کرتے ہیں۔ پس

$$\frac{r}{29} = \frac{0.6231 - 0.6225}{0.6248 - 0.6225}$$

یا

$$= 29\left(\frac{0.0006}{0.0023}\right) =$$

تاکہ $\theta = 0.6728$ جسے اعشاریہ کے نزدیک ترین چار مقام تک تقریباً لایا گیا ہے۔

مثال 5 : اگر $\cos\theta = 0.5741$ تو عدد θ معلوم کرو۔

حل : ہمیں معلوم ہوگا کہ $\cos 0.9570 = 0.5760$ اور $\cos 0.9599 = 0.5736$ اس لیے

$$\frac{r}{29} = \frac{0.5741 - 0.5760}{0.5736 - 0.5760},$$

$$r = 29\left(\frac{0.0019}{0.0024}\right) = 23, \qquad \text{تاکہ}$$

اور ہمارا نتیجہ نکلے گا $\theta = 0.9593$

اسی قسم کا ادراج باب 13 اور 15 میں استعمال کیا جائے گا۔

سوالات

مندرجہ ذیل مساوات سے متعلق ہر ایک تفاعل کا گراف کھینچو اور اعشاریے کے درست دو مقام تک اُن مطلوبہ حقیقی جذر (قیمتوں) کی قیمت نکالو:

1 $x^3 - 3x^2 - x + 2 = 0$ (کمترین مثبت)

2 $x^3 + 3x^2 - 6x - 3 = 0$ (اعظم مثبت)

3 $x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$ (کمترین مثبت)

4 $x^3 - 3x + 1 = 0$ (تین حقیقی جذر)

5 $x^3 - 7x + 7 = 0$ (1 اور 2 کے درمیان جذر)

6 $x^4 - x^3 + 2x^2 - 3x - 3 = 0$ (تمام)

7 $x^4 - 2x^3 + x^2 - 1 = 0$ (سب)

8 $x^4 - 4x^3 - 4x + 12 = 0$ (تمام)

اعشاریہ کے تین مقامات تک ٹھیک ٹھیک مطلوبہ اصل قیمتیں نکالو

9 $\sqrt[3]{6}$ 10 $\sqrt[3]{15}$ 11 $\sqrt[3]{2}$ 12 $\sqrt{-9}$

13 ادراج اور جدول I کی مدد سے مندرجہ ذیل میں سے ہر ایک کی قیمت اعشاریہ کے چار مقامات تک تقریباً صحیح نکالو۔

(a) sin 1.2692 (b) cos 0.5021 (c) tan 0.8986 (d) cos 1.1063
(e) tan 0.6860 (f) sin 2.2446 (g) cos 2.0754 (h) sin 0.1423

14 ادراج اور جدول I کی مدد سے 0 اور $\pi/2$ کے درمیان کی تخمینی قیمت اعشاریہ کے چار مقامات تک نکالو اگر:

(a) $\tan\theta = 0.8172$, (b) $\sin\theta = 0.5331$,
(c) $\cos\theta = 0.2717$, (d) $\cos\theta = 0.9392$,
(e) $\sin\theta = 0.7531$, (f) $\tan\theta = 0.8083$,
(g) $\cos\theta = 0.5386$, (h) $\sin\theta = 0.9648$.

باب 10

معکوس تفاعل

گزشتہ چند ابواب میں ہم نے ایک حد تک مخصوص قسم کے تفاعل پر بحث کی ہے۔ کچھ خاص شرائط کے تحت تفاعل کے آپس کے تعلقات اہمیت اختیار کر لیتے ہیں۔ ہماری آنے والی بحث میں ان میں سے ایک تعلق خاص طور سے سُود مند ہوگا۔

10-1 **معکوس تفاعل** : اگر f ایسا کوئی تفاعل ہو کہ

$$f : x \to \frac{12 - 3x}{4}, \qquad (10\text{-}1)$$

جس میں اس کی سعت اور علاقہ دونوں ہی R ہوں تو ہماری تعریفی مساوات ہوگی

$f(x) = (12 - 3x)/4$ اس کے علاوہ اگر تفاعل g کی تعریف کی جائے

$$g : x \to \frac{12 - 4x}{3}, \qquad (10\text{-}2)$$

جہاں کہ اس تفاعل کی سعت اور علاقہ بھی R ہے۔ تو ہم دونوں ہی کو $f[g(x)]$ اور $g[f(x)]$ پر غور کر سکتے ہیں۔ مخصوص طور پر کیوں کہ $g(x) = (12 - 4x)/3$ تمام x کے لیے تو ہم $f[g(x)]$ سے مُراد لیتے ہیں f کے لیے $(12 - 4x)/3$ کی تفاعلی قیمت یعنی

$$f\left(\frac{12 - 4x}{3}\right)$$

ہمیں حاصل ہوگا

$$f\left(\frac{12 - 4x}{3}\right) = \frac{12 - 3[(12 - 4x)/3]}{4} = \frac{12 - (12 - 4x)}{4} = x,$$

تاکہ

$$f[g(x)] = x \qquad (10\text{-}3)$$

g کے علاقہ میں تمام x کے لیے۔ اسی طرح ہم یہ ثابت کرسکتے ہیں کہ

$$g[f(x)] = x \qquad (10\text{–}4)$$

f کے علاقہ میں تمام x کے لیے۔ اس قسم کے دو تفاعلوں کو ایک دوسرے کا **معکوس** کہتے ہیں۔

ایک حد تک ایک دوسری آسان مثال جو ہم بیان کرسکتے ہیں وہ تفاعل f ہے جہاں $f: x \to 1/x$ تمام $x \in R$ کے لیے جس میں $x \neq 0$ ، یہ تفاعل اپنا ہی معکوس ہے کیوں کہ $f[f(x)] = 1/(1/x) = x$ اُن کے تمام $x \neq 0$ کے لیے۔

معکوس تفاعل کے نظریہ کو تعمیمی طور پر سے بیان کیا جاسکتا ہے۔

تعریف 10–1 : اگر f اور g دو ایسے تفاعل ہوں جن کا آپس کا ایسا تعلق ہو کہ $f[g(x)] = x$ ہر x کے لیے g کے علاقہ میں اور $g[f(x)] = x$ ہر x کے لیے f کے علاقہ میں تو f اور g ایک دوسرے کے معکوس کہلاتے ہیں۔ f اور g میں سے ہر تفاعل کا ایک معکوس ہوگا اور ہر تفاعل دوسرے کا معکوس ہے۔

اس دفعہ کے شروع میں تذکرہ کیے گئے دونوں تفاعلوں کا حالانکہ ایک معکوس ہوگا لیکن ہمیشہ ہی ایسا نہیں ہوتا۔ ذیل کے تفاعل پر غور کرو :

$$f: x \to \frac{x^2 - 1}{x}, \qquad (10\text{–}5)$$

جو ہر اُس $x \in R$ کے لیے تعریف کیا گیا ہے اور $x \neq 0$ ، تفاعل f کا کوئی معکوس تفاعل نہیں ہے۔ ہم اس کو یہ فرض کرکے ثابت کریں کہ f کا معکوس موجود ہے اور g کے برابر ہے۔ اگر f کا معکوس g ہے ہم جانتے ہیں $g[f(x)] = x$ ، f کے علاقہ میں تمام x کے لیے۔ اگر $x = 1$ تو $g[f(1)] = g(0)$ مزید یہ کہ اگر $x = -1$ تو $g[f(-1)] = g(0)$ ، اس لیے $g[f(1)] = g[f(-1)]$ لیکن چونکہ ہم مان چکے ہیں کہ g معکوس ہے f کا بہ لحاظ تعریف $g[f(1)] = 1$ اور $g[f(-1)] = -1$ تاکہ $-1 = 1$ ، ہمارا مفروضہ ہمیں تضاد کی طرف لے جاتا ہے پس اس تفاعل f کے لیے کسی معکوس کا وجود نہیں ہے۔

اس مشکل کی وجہ صاف ہوگی اگر ہم تفاعل f پر زیادہ گہرائی سے غور کریں۔ اگر ہم اپنی تعریفی مساوات $f(x) = (x^2 - 1)/x$ کو x کے لیے حل کریں تو کسور حل کرنے کے بعد ہمیں معلوم ہوگا

کہ $xf(x) = x^2 - 1$ یا $x^2 - xf(x) - 1 = 0$ ، یہ مساوات x میں دو درجی ہے اس لیے

$$x = \frac{f(x) \pm \sqrt{[f(x)]^2 + 4}}{2}. \qquad (10\text{–}6)$$

اس $f(x)$ کی کسی مخصوص قیمت کے لیے x کی دو مختلف قیمتیں متطابق ہیں مثلاً اگر $f(x) = 0$ (جو اوپر غور کیا گیا) تو $x = 1$ یا $x = -1$ ، دوسرے الفاظ میں تفاعل f ، f کے علاقہ میں دونوں 1 اور -1 کو ایک ہی قیمت میں نقش کرتا ہے۔ کسی بھی تفاعل کا جو دو واضح عناصر کو ایک ہی عنصر میں نقش کرتا ہے اُس کا معکوس تفاعل ہو ہی نہیں سکتا۔ ہم اسی کو بہ حیثیت مسئلہ کے پیش کرتے ہیں۔

مسئلہ 10–1 : کسی تفاعل f کا معکوس تبھی ہوگا جبکہ f کے علاقہ میں کوئی دو عناصر x_1 اور x_2 کے لیے جبکہ $x_1 \neq x_2$ تو $f(x_1) \neq f(x_2)$

ثبوت : فرض کرو کہ مسئلہ صادق نہیں ہے۔ تب اگر $x_1 \neq x_2$ لیکن $f(x_1) = f(x_2)$۔ کیوں کہ معکوس موجود ہے جو مان لو کہ وہ g ہے اور $g[f(x_1)] = g[f(x_2)]$ لیکن چونکہ g معکوس ہے f کا، $g[f(x_1)] = x_1$ اور $g[f(x_2)] = x_2$ جس سے $x_1 = x_2$ لیکن چونکہ یہ اس مفروضہ کا تضاد ہے کہ $x_1 \neq x_2$ اس لیے ہمارا مفروضہ غلط تھا اس لیے مسئلہ ثابت ہو گیا۔

دفعہ 1–1 سے یاد کرو سٹوں کے لیے ایک/ایک تناظر کی تعریف (تعریف 1–1)۔ ہم ثابت کر چکے ہیں کہ اگر f کا معکوس ہو تو تفاعل ہے ایک/ایک یعنی اُس علاقہ میں ہر واضح عنصر کو تفاعل اُس سعت میں ایک واضح عنصر میں نقش کرتا ہے۔ اس مسئلہ کا برعکس بھی صادق ہے۔

مسئلہ 10–2 : اگر تفاعل ایک/ایک ہو تو f کا معکوس ہوتا ہے۔

ثبوت : f کی سعت میں کسی بھی y کے لیے f کے علاقہ میں ایک اور صرف ایک ہی ایسا x ہوگا کہ جس کے لیے $y = f(x)$۔ اگر اس عنصر x کو عنصر y کے ساتھ متعلق کریں تو ایک تفاعل g ایسے متعارف ہوگا کہ y کو x میں نقش کرے گا۔ یعنی $g : y \to x$ تاکہ $x = g(y)$ جس میں g کا علاقہ f کی سعت ہے (اور g کی سعت f کا علاقہ ہے) پس $y = f(x) = f[g(y)]$ اور $x = g(y) = g[f(x)]$۔ لیکن یہ اس بات کی بعینہٖ تعریف تھی کہ g معکوس ہے f کا (اور f معکوس g کا)۔

اب ہم تفاعل f کے معکوس (اگر اُس کا وجود ہو) کو f^{-1} سے ظاہر کریں گے (جو

پڑھا جائے گا" f معکوس" یا" f کا معکوس")۔

نہ یہ کہ ہم نے صرف مسئلہ 2-10 کو ثابت کیا ہے بلکہ یہ بھی ثابت کر دیا کہ جب کبھی معکوس کا وجود ہوتا ہے تو

$$f[f^{-1}(x)] = x \quad \& \quad f^{-1}[f(x)] = x, \tag{10-7}$$

مزید برآں f کا معکوس f^{-1} کا وجود جبھی ہوگا کہ اگر اور صرف اگر تفاعل f ایک/ایک ہو۔

اگر ہم f اس طرح مانیں کہ اُس کی تعریف مرتّب جوڑوں کے سٹ سے کی گئی ہو اور اس کے معکوس کو f^{-1} مان لیں تو ہم ایک بہت ہی فائدہ مند نتیجے پر پہنچیں گے۔ یاد کرو کہ f کی تعریف (تعریف 2-5) اس طرح کی جاسکتی ہے:

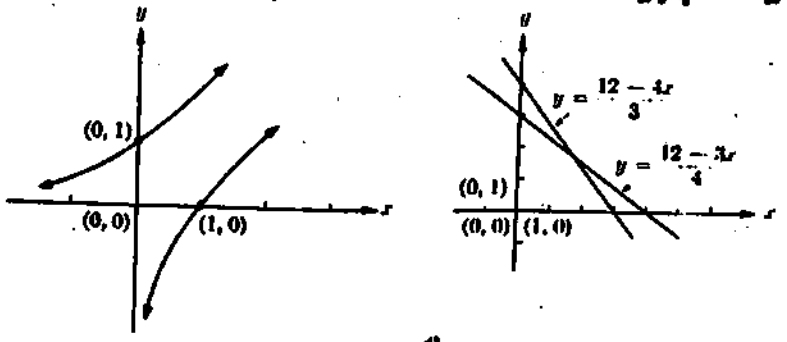
$$\{(x, y)|y = f(x)\}. \tag{10-8}$$

کیوں کہ یہ مرتّب جوڑوں کا سٹ ایک تفاعل کی تعریف کرتا ہے مرتّب جوڑوں کے کوئی سے دو جوڑوں میں پہلا عنصر یکساں نہیں ہو سکتا اور مزید ہم یہ مان لیں کہ f^{-1} موجود ہے (تفاعل ایک/ایک f ہوگا) تو مرتّب جوڑوں میں سے کوئی بھی دو میں دوسرا عنصر یکساں نہیں ہوگا۔ اس لیے اگر x، f کے علاقہ میں ہے اور $y = f(x)$ تو $x = f^{-1}(y)$ یا تفاعل f^{-1} کی تعریف بہ حیثیت ایسے مرتّب جوڑوں کے سٹ کے کی جاسکتی ہے جس میں کہ f کی تعریف کرنے والے مرتّب جوڑوں کے اعداد کو محض آپس میں ادل بدل کر دیا گیا ہے۔ یعنی f^{-1} کو بہ حیثیت ایسے سٹ کے متعارف کیا جاسکتا ہے کہ

$$\{(y, x)|x = f^{-1}(y)\}. \tag{10-9}$$

مثلاً اگر f کی تعریف کریں $f: x \to (12 - 3x)/4$ تاکہ $f(x) = y = (12 - 3x)/4$ ہو تو ہم اس مساوات $y = (12 - 3x)/4$ کو x کے لیے حل کر کے حاصل کریں $x = (12 - 4y)/3$ اور اس میں x اور y کو آپس میں بدل دیں تو $y = (12 - 4x)/3$ پس $f^{-1}: x \to (12 - 4x)/3$ عمومی طور پر اگر $y = f(x)$ کسی ایسے تفاعل کی تعریفی مساوات ہو جس کا معکوس ہو تو اس کا معکوس x اور y اعداد کو آپس میں ایسے بدل دینے سے حاصل ہو سکتا ہے تاکہ $x = f(y)$ اور پھر y کے لیے

حل کر لیا جائے۔ f کی سعت f^{-1} کا علاقہ ہوگا اور f کا علاقہ f^{-1} کی سعت۔ اس طریقے* میں کچھ مشکلات پیدا ہو سکتی ہیں۔ اس لیے ہر تفاعل کی سعت اور علاقوں کو اخذ کرنے میں ایسی احتیاط برتنی چاہیے جس سے کہ وہ f ایک/ایک ہونے کا ضامن ہوں۔



شکل 1-10

مندرجہ ذیل فہرست میں دی گئیں تمثیلوں میں نوٹ کریں کہ ہر تفاعل کا علاقہ اور سعت محدود ہونا چاہیے:

	$y = f(x)$		$y = f^{-1}(x)$	
(a)	$y = \frac{12 - 3x}{4}$	$(-\infty < x < \infty)$†	$y = \frac{12 - 4x}{3}$	$(-\infty < x < \infty)$
(b)	$y = \frac{1}{x}$	$(x \neq 0)$	$y = \frac{1}{x}$	$(x \neq 0)$
(c)	$y = \frac{x^2 - 1}{x}$	$(0 < x)$	$y = \frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2}$	$(-\infty < x < \infty)$
		$(x < 0)$	$y = \frac{x - \sqrt{x^2 + 4}}{2}$	$(-\infty < x < \infty)$
(d)	$y = \sqrt{1 - x^2}$	$(0 \leq x \leq 1)$	$y = \sqrt{1 - x^2}$	$(0 \leq x \leq 1)$
		$(-1 \leq x \leq 0)$	$y = -\sqrt{1 - x^2}$	$(0 \leq x \leq 1)$
	$y = -\sqrt{1 - x^2}$	$(0 \leq x \leq 1)$	$y = \sqrt{1 - x^2}$	$(-1 \leq x \leq 0)$
		$(-1 \leq x \leq 0)$	$y = -\sqrt{1 - x^2}$	$(-1 \leq x \leq 0)$

* ہم شاید y کے لیے حل نہ کر سکیں جیسا کہ اس حالت میں $x = y - \sin y$

† علامت $-\infty < x < \infty$ کا مطلب ہے کہ x کی تمام حقیقی متناہی قیمتیں خواہ وہ مثبت ہوں یا منفی۔

$f(x)$ اور $f^{-1}(x)$ کی تمثیل (a) اور (c) کے اوّل تفاعل کے گراف شکل 1-10 میں دکھائے گئے ہیں۔ نوٹ کریں کہ $y = f(x)$ اور $y = f^{-1}(x)$ کے منفی خط $y = x$ کی نسبت سے متشاکل ہیں۔ کیا آپ ہمیشہ ہی ایسی حالت کے اُمیدوار رہیں گے؟ تمثیل میں دیے گئے دوسرے تفاعل کے گراف کا امتحان کرو۔

سوالات

مندرجہ ذیل سوالات (1 سے 11 تک) میں سے ہر ایک میں دیے گئے تفاعل کے معکوس ـــــ اگر معکوس موجود ہوں ـــــــ معلوم کرو۔ اگر بڑے سے بڑے علاقہ کے لیے معکوس کا وجود نہ ہو تو علاقہ کو ایسے محدود کر دو کہ معکوس وجود میں آجائے۔ ہر حالت میں تفاعل اور اُس کے معکوس کا علاقہ اور رسعت نکالو:

1. $y = 5x - 6$
2. $y = x^2$
3. $y = x^3 - 4x$
4. $y = \frac{x}{x-3}$
5. $y = \frac{x^2-1}{x^2}$
6. $y = \frac{x^3-1}{x}$
7. $y = x^n$
8. $y = x^{2n} + 2x^n + 1$
9. $y = \sqrt{x^2-4}$
10. $y = \frac{-3\sqrt{25-x^2}}{5}$
11. $y = \frac{x}{x^2-1}$
12. واضح کرو کہ کیوں ایک خط جو x-محور یا y-محور کو متوازی ہے تفاعل کے گراف کو اگر اُس کا معکوس ہے زیادہ سے زیادہ ایک دفعہ قطع کرے گا۔
13. دفعہ 3-6 کے حاشیہ کو یاد کریں کہ کوئی بھی تفاعل f بڑھتا تفاعل کہلائے گا اگر $f(x_1) < f(x_2)$ جب کبھی $x_1 < x_2$ ۔ ثابت کرو کہ اگر f بڑھے تو f^{-1} کا وجود ہوگا۔
14. ہم نے نوٹ کیا تھا کہ اگر (a, b) ، f کے گراف پر کوئی نقطہ ہے تو (b, a) ، f^{-1} کے گراف پر نقطہ ہوگا۔ اُس خطِ مستقیم جس کی مساوات $y = x$ ہو کے گراف کے تعلق سے ان دونوں نقاط کے درمیان کے تعلق کو بیان کرو۔ یہ خصوصیت f^{-1} کے گراف کھینچنے میں فائدہ مند ہوگی اگر f کا گراف معلوم ہو۔

10-2 . چند رشتوں کے گراف کھینچنا : اگر ہم مندرجہ ذیل مرتب جوڑوں کے سٹ پر غور کریں

$$\{(x, y) | xy - x^2 + 1 = 0\}, \qquad (10\text{–}10)$$

ہم اس سٹ کو بہ حیثیت تفاعل $f: x \to y$ کے کہیں کیوں کہ x کی سوائے صفر کے کسی بھی قیمت کے لیے مساوات y کی متطابق یکتا قیمت ساخت کرتا ہے۔ ہم یہ ثابت کر سکتے ہیں کہ یہ صادق ہے کیوں کہ اگر ہم مساوات $xy - x^2 + 1 = 0$ کو y کے لیے حل کریں تو ہمیں حاصل ہوگا $y = (x^2 - 1)/x$ ۔ تاہم اگر ہم اس مساوات کو x کے لیے حل کریں تو ہمیں حاصل ہوگا $x = (y \pm \sqrt{y^2 + 4})/2$ اس لیے ہم مساوات $xy - x^2 + 1 = 0$ پر بہ حیثیت اُس تفاعل کے بحث نہیں کر سکتے جو نقش کرتا ہے $x \to y$ بلکہ اُسے ہم صرف ایک رشتہ کی حیثیت سے لے سکتے ہیں تاہم ایسے رشتوں کو، جو ایسے ہی مساوات سے متعارف ہوں، کے گراف کھینچے جا سکتے ہیں۔ یہ اکثر مددگار ثابت ہوگا اگر ہم y کی عبارت کو x کے ارکان میں اور x والی عبارت کو y کے ارکان میں استعمال کریں اگرچہ وہ لازمی طور پر کسی تفاعل کی تعریف نہ بھی کرتے ہوں۔

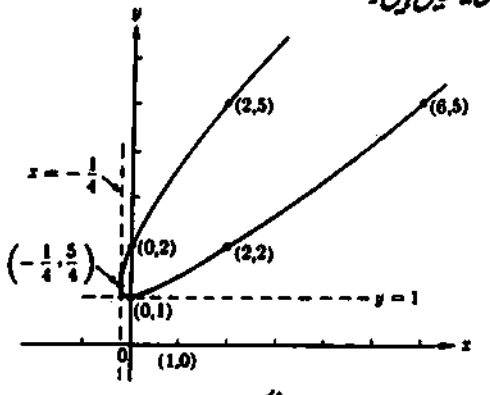
مثال : دی ہوئی مساوات جس رشتہ کو ظاہر کرتی ہے اُس کا گراف کشید کرو :

$$x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 3y + 2 = 0$$

حل : x کو y میں حل کرنے کے لیے دو درجی ضابطہ استعمال کر کے ہمیں حاصل ہوگا

$$x = y - 1 \pm \sqrt{y - 1}.$$

اس عبارت سے ہم چند قیمتوں کا جدول تیار کر سکتے ہیں جس میں نوٹ کریں کہ y کی ہر قیمت کے لیے x کی دو متطابق قیمتیں ہیں۔



شکل 10-2

مثلاً جب $y = 2$ تو $x = 0$ یا 2، جب $y = 1$ تو $x = 0$ دُہری قیمت ہے اور منحنی اس نقطہ پر $y = 1$ کو مماس ہے۔ مزید یہ کہ جب $y < 1$ تو x کی قیمتیں غیر حقیقی ہیں پس منحنی صرف اُس وقت کھینچی جا سکتی ہے جب $y \geq 1$

y کو x کے ارکان میں حل کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$y = \frac{2x + 3 \pm \sqrt{4x + 1}}{2}.$$

دوبارہ ہم اُن قیمتوں کے سٹ نکال سکتے ہیں جو اس مساوات کو مطمئن کرتے ہیں۔ اس کے علاوہ منحنی صرف اُس جگہ واقع ہوتی ہے جہاں $x \geq -\frac{1}{4}$ اور خط $x = -\frac{1}{4}$ کو $y = \frac{1}{2}$ پر مماس ہے۔ نتیجے کے طور پر حاصل شدہ منحنی کو شکل 2-10 میں دکھایا گیا ہے ایک شلجمی ہے حالانکہ اس کی مساوات اتنی آسان نہیں جیسی کہ دفعہ 3-7 میں زیرِ بحث آئی تھی۔

دفعہ 12-7 کی مثال 2 میں بحث کیے گئے مساوات کے نظام کو اب بذریعہ گراف حل کر سکتے ہیں۔

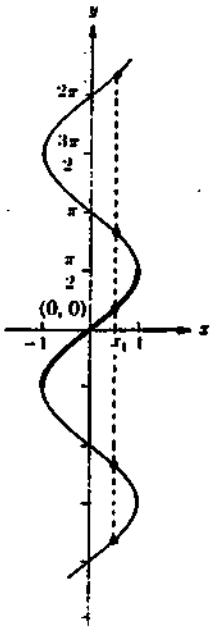
سوالات

سوال 1 سے 10 تک میں دیے گئے ہر رشتہ کے گراف کھینچو:

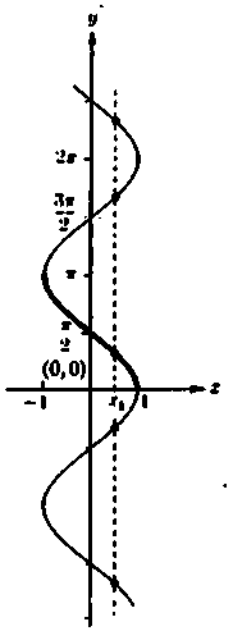
1. $x^2 - y^2 - 1 = 0$
2. $16x^2 + 25y^2 - 400 = 0$
3. $x - 2 = \frac{1}{y - 3}$
4. $xy = 1$
5. $2xy + 4y - 6x = 0$
6. $4x^2 + 4y^2 - 12x - 10y + 5 = 0$
7. $x^2 + xy + y^2 - 3y - 3 = 0$
8. $x^2 + 2xy + y^2 - 2x - 2y = 1$
9. $x^2 + 2xy + y^2 - 2x - 2y = 0$
10. $2x^2 + 3xy - 2y^2 - 5 = 0$

11. دفعہ 12-7 کی مثال 2 کو بذریعہ گراف حل کرو۔
12. دفعہ 12-7 کے سوال 7 اور 9 کو بذریعہ گراف حل کرو۔
13. دفعہ 12-7 کے سوال 8 اور 10 کو بذریعہ گراف حل کرو۔

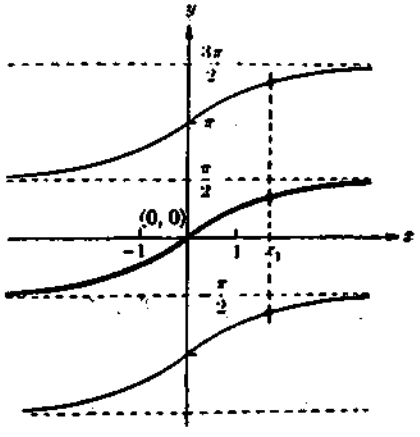
10-3. معکوس دائری تفاعل: معکوس رشتہ یا تفاعل کا نظریہ دائری تفاعل اور اُس کی خصوصیت کے مطالعے میں خصوصی اہمیت رکھتا ہے۔ اُس تفاعل پر غور کرنے کے سلسلے میں جس کی مساوات $y = \sin \theta$ ہے ہم y کے بارے



شکل 10-3



شکل 10-4



شکل 10-5

ہیں یعنی θ کے سائن (sine) کے متعلق بات کرنا چاہیں گے لیکن ہم عدد θ پر بھی غور کرنا چاہیں گے یا اُس پر زور دینا چاہیں گے یعنی وہ θ جس کا sine y ہو۔ "وہ عدد θ جس کا sine y ہو" یا اس کا معکوس رشتہ $y = \sin \theta$ اپنی اہمیت کے اعتبار سے اس کثرت سے مستعمل ہے کہ اس کو ایک نام اور علامت سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ ڈینیل برنولی (Daniel Bernoulli) اور لیونارڈ آئلر (Leonhard) نے تقریباً 1730 میں اس قیمت کے اظہار کے لیے جس کا sine y ہو یہ علامتی اظہار رائج کیا

$$\theta = \arcsin y \qquad (10\text{–}11)$$

اور اس طرح اس عبارت کا نام y کا آرک سائن پڑ گیا۔ معکوس دائری رشتہ کے لیے یہ پہلی موزوں علامت تھی بعد میں 1813 میں جان ہرشل (John Herschel) نے ایک اور علامت $\theta = \sin^{-1} y$ کو رواج دیا جو عام طور سے مستعمل ہے۔ جب -1 کو اس طرح استعمال کیا جائے تو یہ سمجھ لیا جائے کہ یہ کوئی قوت نما نہیں ہے بلکہ مروجہ استعمال شدہ علامت f^{-1} کے مطابق ہے جو کہ کسی تفاعل کے معکوس کے لیے ہے۔

مندرجہ بالا تعریف سے اگر $y = \arcsin \frac{1}{2}$ تو y وہ عدد ہے جس کا sine $\frac{1}{2}$ ہے۔ پس y کی قیمت ہو سکتی ہے $\pi/6$ ، $5\pi/6$ ، $13\pi/6$ ، $-7\pi/6$ وغیرہ یا عمومی طور پر $y = \pi/6 \pm 2n\pi$, یا $5\pi/6 \pm 2n\pi$, جس میں $n = 0, 1, 2, \ldots$ وغیرہ۔ مزید برآں y صرف انھیں قیمتوں کا حامل ہو سکتا ہے۔ یہ اس رشتہ کے گراف سے صاف ظاہر ہوگا۔ اس ایک مشاہدہ سے ہم دیکھتے ہیں کہ $y = \sin x$ ایک تفاعلی مساوات ہے معکوس رشتہ کی مساوات $y = \arcsin x$ لامتناہی قیمتوں والی ہے۔

باقی ماندہ معکوس دائری رشتوں کی بھی اسی طرح تعریف کی گئی ہے۔ عبارت $\arccos x$ اُس عدد کو ظاہر کرتا ہے جس کا ماس x ہے وغیرہ۔ دوسرے تین معکوس دائری رشتے $\operatorname{arccot} x$ ، $\operatorname{arcsec} x$ ، $\operatorname{arccsc} x$ کم اہمیت کے ہیں۔ مساوات (11–6) ، (12–6) اور (13–6) کی مدد سے ان کو آسانی سے $\arctan x$ ، $\operatorname{arcsec} x$ اور $\arcsin x$ کے ارکان میں لگاتار تبدیل کیا جا سکتا ہے۔ اس طرح عبارت $\operatorname{arccsc} x$ کو $\arcsin 1/x$ کے ہم قیمت کیا

جا سکتا ہے۔ زیادہ صراحت کے ساتھ

$$\operatorname{arccsc} 2 = \arcsin \tfrac{1}{2} = \pi/6,$$

اور وغیرہ۔

معکوس دائری رشتوں کے گراف اپنے طریقے کا اظہار قطعی واضح کر دیتے ہیں۔ $y = \arcsin x$ کے گراف پر غور کرتے وقت ہم اُس کی ہم قیمت عبارت $x = \sin y$ کے متعلق ہی غور کرتے ہیں اور اُس کے گراف کو ذہن میں لاتے ہیں (یہ گراف شکل 7-6 میں دکھایا گیا تھا جس میں y اور θ کے لیے x اور y لیا گیا تھا)۔ اگر ہم $x = \sin y$ کے گراف کو جس میں x محورِ انتصابی اور y محورِ اُفقی ہو شفاف کاغذ پر کشید کریں کاغذ کو اُلٹ دیں اور اس کو گھڑی کی سُوئیوں کی سمت میں بذریعہ $90°$ گھما دیں تو نتیجے کے طور پر $y = \arcsin x$ کا گراف حاصل ہوگا جیسا کہ شکل 10-3 میں دکھایا گیا ہے۔ $y = \arccos x$ اور $y = \arctan x$ جو اسی طرح حاصل کیے گئے ہیں شکل 10-4 اور 10-5 میں دکھائے گئے ہیں۔ نوٹ کریں کہ $\arcsin x$ اور $\arccos x$ صرف اُس علاقے کے لیے معرف ہیں جس میں x کی قیمت -1 اور 1 کے درمیان دونوں کو شامل کرکے ہے حالانکہ $\arctan x$، x کی تمام متناہی قیمتوں کے لیے معرف ہے۔ $\arcsin 2$ پُر مفہوم نہیں ہے کیوں کہ ایسا کوئی حقیقی عدد موجود نہیں ہے جس کا سائن (sine) 2 ہو لیکن $\arctan 2$ پُر مفہوم ہے۔ ان کے گراف سے ہم اس کا ایک دفعہ اور مشاہدہ کریں گے کہ x کی ایک قیمت کے لیے ان معکوس رشتوں کی لامتناہی بہت سی قیمتیں ہیں۔ ہر رشتہ میں اس خصوصیت کو نوٹ کرو۔

مان لو کہ y_1 اگر y کی کسی مخصوص قیمت کا سائن x_1 کے برابر ہو تو y کی کون سی دوسری قیمتیں ہوں گی جن کا sine یہی ہوگا؟ یاد کریں کہ 2π کے عدد صحیح اضعاف کے جوڑنے یا تفریق کرنے سے کسی عدد کا دائری تفاعل تبدیل نہیں ہوتا۔ sine تفاعل کی حالت میں بھی ہم نے دیکھا کہ

• یہ حقیقی قیمتوں کے موجودہ متن کے لحاظ سے صادق ہے۔ زیادہ ترقی یافتہ ریاضیات میں دائری تفاعل کو مختلف قیمتوں کے متن کے لحاظ سے برتا گیا ہے۔ اور اس سلسلے میں $\arcsin 2$ ایک مختلف عدد ہوگا۔

$\sin(\pi - y) = \sin y$ اس لیے $\pi - y + 2n\pi$ کا sine وہی ہوگا جیسا کہ y کا۔ بہ الفاظ دیگر کسی بھی عدد کی sine کی یکساں قیمت حاصل کرنے کے لیے y میں π کا جفت اضعاف یا $y - \pi$ میں π کا جفت اضعاف جوڑا جا سکتا ہے۔ ایک ہی مساوات میں اس کو اس طرح لکھا جا سکتا ہے : (بائیں سے دائیں پڑھو)

$$\text{اگر } \sin y_1 = x_1, \quad \arcsin x_1 = (-1)^n y_1 + n\pi \quad (-1 \le x_1 \le 1)$$

(10–12)

یہ n کی ہر عدد صحیح قیمت کے لیے صادق ہے اور n کی ہر قیمت کے لیے $\arcsin x_1$ کی قیمت مختلف ہوگی مثلاً جب $n = 0$ تو $\arcsin x_1 = y_1$ ؛ جب $n = 1$ تو $n = -1$ $\arcsin x_1 = -(\pi + y_1)$ وغیرہ۔ یہ کہ ضابطہ $\arcsin x_1$ کی تمام قیمتیں دیتا ہے۔ شکل 10–3 سے واضح ہو جائے گا۔ ان کو مسلسل نقطوں سے انتصابی کھینچے گئے خط اور منحنی کے انقطاع سے نشاندہی کی گئی ہے۔

کیوں کہ $\cos(2\pi + y) = \cos y$ اور $\cos(-y) = \cos y$ یہ تصدیق کرنا آسان ہے کہ مندرجہ ذیل عبارت $\arccos x_1$ کی تمام قیمتوں کی متحمل ہے : (بائیں سے دائیں)

$$\text{اگر } \cos y_1 = x_1, \quad \arccos x_1 = \pm y_1 + 2n\pi \quad (-1 \le x_1 \le 1)$$

(10–13)

اس حقیقت سے کہ دونوں ہی

$$\tan(2\pi + y) = \tan y \quad \text{اور} \quad \tan(\pi + y)$$

ہمیں یہ عبارت $\arctan x_1$ کی تمام قیمتوں کے لیے حاصل ہوگی : (بائیں سے دائیں پڑھو)

$$\text{اگر } \tan y_1 = x_1, \quad \arctan x_1 = y_1 + n\pi \quad (-\infty < x_1 < \infty)$$

(10–14)

ایسے معکوس رشتوں کی مخصوص قیمتوں کی مثالیں مندرجہ ذیل ہیں۔ ان میں n ایک کوئی سا بھی عدد صحیح ہے :

$$\arcsin \frac{1}{2} = (-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi,$$

$$\arccos \frac{1}{2} = \pm \frac{\pi}{3} + 2n\pi,$$

$$\arctan (-1) = -\frac{\pi}{4} + n\pi,$$

ہم نے اس بحث میں اس بات پر زور دیا ہے کہ معکوس دائری ضابطے متعدد قیمتوں والے ہوتے ہیں پھر بھی مناسب شرائط کے تحت ان معکوس ضابطوں کو ایک/ایک بنایا جا سکتا ہے اور اس طرح ہمیں اہم **قوسی تفاعل** حاصل ہوں گے جیسا کہ $y = \arcsin x$ شکل 3-10 کے گراف سے دیکھا گیا ہے کہ اگر ضابطہ کی سعت کو $-\pi/2 \le \arcsin x \le \pi/2$ سے محدود کر دیا جائے تو علاقہ کے ہر x کے لیے y کی ایک یکتا قیمت ہوگی۔ معکوس ضابطوں اور تفاعل کے درمیان تمیز کرنے کے لیے اسی طرح ہر دوسرے قوسی تفاعل کی سعت پر پابندی عائد کی جا سکتی ہے۔ قوسی تفاعل کو لکھنے میں بڑا A استعمال ہوگا پس ہر معکوس دائری تفاعل کی سعت مندرجہ ذیل ہوگی :

$$-\pi/2 \le \operatorname{Arcsin} x \le \pi/2, \tag{10-15}$$

$$0 \le \operatorname{Arccos} x \le \pi, \tag{10-16}$$

$$-\pi/2 < \operatorname{Arctan} x < \pi/2. \tag{10-17}$$

ان تفاعلوں کے گراف اشکال میں موٹے خطوط سے دکھائے گئے ہیں۔

تفاعلی قیمتوں کے سلسلے میں مندرجہ بالا مثالیں بن جاتی ہیں :

$$\operatorname{Arcsin} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}, \quad \operatorname{Arccos} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}, \quad \operatorname{Arctan} (-1) = -\frac{\pi}{4}.$$

تفاعلی قیمتوں کی دوسری مثالیں ہیں :

$$\operatorname{Arcsin} \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}, \quad \operatorname{Arccot} (-\sqrt{3}) = \frac{5\pi}{6},$$

$$\operatorname{Arccos} \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}, \quad \operatorname{Arcsec} \left(\frac{-2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{5\pi}{6}.$$

سوالات

جدول کو بغیر استعمال کیے مندرجہ ذیل کی قیمتیں نکالو :

1. $\arcsin \sqrt{3}/2$ [اشارہ : ہم جانتے ہیں کہ $\sin \pi/3 = \sqrt{3}/2$ اس

[arcsin $\sqrt{3}/2 = (-1)^n\pi/3 + n\pi$ لیے

arcsin 0	.4	arccos $(-\frac{1}{2})$	.3	arctan 1	.2
arcsec $\sqrt{2}$	.7	arccos (-1)	.6	arctan 0	.5
Arctan (-1)	.10	Arccos 0	.9	arccot $(-\sqrt{3})$	.8
		Arccsc 2	.12	Arcsin (-1)	.11

جدول I کی مدد سے مندرجہ ذیل کی قیمت نکالو:

arctan 1.5399	.14	arcsin 0.4067	.13
\arccos 0.8450	.16	arccos 0.6293	.15
\arctan 0.3281	.18	Arcsin 0.9951	.17

مندرجہ ذیل میں سے ہر ایک کو θ کے لیے حل کرو:

.19 $y = \sin 4\theta$ [اشارہ: ہم جانتے ہیں کہ $4\theta = \arcsin y$ اس لیے $\theta = (\arcsin y)/4$]

$y = \cos 3\theta$	.20	$y = 3\tan 2\theta$	.21
$y = \sin(\theta/2)$	.22	$2y = 4\sec 2\theta$	.23
$3y = 2 + \sin 3\theta$	.24		

.25 واضح کرو کہ $y = \text{Arccos } x$ کی قیمت $-\pi/2 \le y \le \pi/2$ وقفہ کے درمیان کیوں نہیں لی جا سکتی۔

مندرجہ ذیل میں سے ہر ایک کو x کے لیے حل کرو:

$y = \arcsin 2x$	.26	$y = \frac{1}{4}\arccos(4x - 4)$	.27
$y = \arctan(x - 2)$	.28	$y = \arctan x - 2$	.29
$y = \pi + 2\arcsin x$	.30	$8y = (\pi/3) - 4\arccos(2x + 1)$	.31

10-4 معکوس دائری تفاعل پر مشتمل عملیات؛ معکوس ضابطوں اور تفاعل کے ساتھ مختلف عملیات پر

بحث کرنے کا آسان ترین طریقہ مختلف مثالوں کا تجزیہ کرنا ہوگا۔ کیوں کہ معکوس دائری تفاعل وہی اعداد θ ہیں جن کے لیے ہم نے بہت سے ضابطے ثابت کیے ہیں۔ یہ بعض اوقات زیادہ واضح رہے گا کہ کسی بھی قوسی تفاعل یا ضابطہ کی جگہ ایک عدد θ یا ω (اومیگا) رکھ دیں۔ اس قسم کے ابدال کو مثال کے ذریعے سمجھایا جائے گا۔

مثال 1: $\sin(\arccos \frac{3}{5})$ کی قیمت معلوم کرو۔

حل: اس مثال میں ـــــ باب 9 کے بہت سے سوالوں کی مانند ـــــ اُس عدد کے

sine کو نکالنا ہوگا جس کا cosine برابر ہو $\frac{3}{5}$ کے۔ فرض کرو کہ یہ عدد θ ہے۔ تو

$$\cos\theta = \frac{3}{5} \text{ اور } \sin\theta = \pm\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \pm\frac{4}{5}$$

مثال 2 : $\cos(\text{Arcsin } u + \text{Arccos } v)$ کی قیمت نکالو۔

حل : اگر ہم $\text{Arcsin } u = \theta_1$ اور $\text{Arccos } v = \theta_2$ مان لیں تو ہمارا سوال اس بات کی تحویل (تحلیل) ہو جاتا ہے کہ $\cos(\theta_1 + \theta_2)$ کو ہم u اور v کے ارکان میں نکالیں جہاں کہ

$$\sin\theta_1 = u \text{ اور } \cos\theta_2 = v$$

اور اس لیے

$$\cos\theta_1 = \sqrt{1-u^2}, \qquad \sin\theta_2 = \sqrt{1-v^2}$$

(اس کی وضاحت کرو کہ دونوں جذر کی علامت مثبت کیوں ہے) اس طرح

$$\begin{aligned}\cos(\text{Arcsin } u + \text{Arccos } v) &= \cos(\theta_1 + \theta_2)\\ &= \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2\\ &= v\sqrt{1-u^2} - u\sqrt{1-v^2}.\end{aligned}$$

مثال 3 : ثابت کرو کہ $\text{Arctan } \frac{1}{2} + \text{Arctan } \frac{1}{3} = \pi/4$

حل : کیوں کہ بائیں طرف کے دونوں اعداد میں سے ہر ایک $\pi/4$ سے کم ہے بائیں سمت اس عدد کی نمائندگی کرتی ہے جو 0 اور $\pi/2$ کے درمیان واقع ہو جیسا کہ عدد $\pi/4$ دائیں سمت کی نمائندگی کرتا ہے۔ اگر دونوں ایسے اعداد کے مماس (tangents) برابر ہیں تو اعداد خود بھی آپس میں برابر ہوں گے۔ مشتبہ برابری والے ایسے ہر ایک نمبر کا ہم مماس نکال لیں اور اگر وہ آپس میں برابر ہوں تو ہم نے اصل رشتہ ثابت کر دیا۔ یہاں اس بات پر زور دینا چاہیے کہ یہ صرف اس لیے صادق ہوگا کیوں کہ 0 اور $\pi/2$ کے درمیان مماسی تفاعل ایک/ایک ہے۔

$$\tan\left(\text{Arctan } \frac{1}{2} + \text{Arctan } \frac{1}{3}\right) \stackrel{?}{=} \tan\frac{\pi}{4}$$

$$\frac{\tan(\text{Arctan } \frac{1}{2}) + \tan(\text{Arctan } \frac{1}{3})}{1 - \tan(\text{Arctan } \frac{1}{2})\tan(\text{Arctan } \frac{1}{3})} \stackrel{?}{=} 1$$

$$\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = 1.$$

سوالات

جدول کے بغیر امداد کے مندرجہ ذیل کی قیمتیں نکالو:

.1 $\sin(\arctan \frac{3}{4})$
.2 $\cos(\arcsin \frac{7}{25})$
.3 $\tan(\arccos \frac{5}{13})$
.4 $\sin[\arccos(-\frac{24}{25})]$
.5 $\cos(\operatorname{Arcsin} \frac{8}{8})$
.6 $\tan[\operatorname{Arcsin}(-\frac{8}{8})]$
.7 $\sin(\arcsin u)$
.8 $\cos(\operatorname{Arccos} v)$
.9 $\tan(\arccos u)$
.10 $\sin(\arctan v)$
.11 $\operatorname{Arcsin}(\sin \pi/7)$
.12 $\operatorname{Arccos}[\cos(-\pi/5)]$
.13 $\operatorname{Arctan}(\cot 4\pi/9)$
.14 $\operatorname{Arcsin}(\cos \pi/7)$
.15 $\operatorname{Arccos}(\sin \pi/10)$
.16 $\operatorname{Arccot}[\tan(-\pi/5)]$
.17 $\operatorname{Arcsin}(\tan \pi)$
.18 $\operatorname{Arctan}(\sin 7\pi/2)$
.19 $\sin(\arcsin u + \arccos v)$
.20 $\cos(\arccos u + \arcsin v)$
.21 $\sin(\arccos \frac{3}{5} + \pi)$
.22 $\cos(\pi/2 - \operatorname{arcsin} \frac{8}{17})$
.23 $\sin(\arcsin \frac{1}{4} + \arccos \frac{1}{4})$
.24 $\cos(\arctan \frac{8}{40} - \arccos \frac{15}{17})$
.25 $\tan(\operatorname{Arcsin} \frac{8}{13} + \operatorname{Arctan}(-\frac{3}{4}))$
.26 $\cos[\operatorname{Arccos}(-\frac{1}{2}) + \operatorname{Arcsin}(-\frac{1}{2})]$
.27 $\sin[2 \operatorname{Arcsin} \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \operatorname{Arccos} \frac{1}{3}]$
.28 $\cos(\operatorname{Arcsin} \frac{3}{5} + \operatorname{Arccos} \frac{8}{13} + \operatorname{Arctan} \frac{8}{15})$

بغیر جدول کی امداد کے مندرجہ ذیل مساوات کی جانچ کرو:

.29 $\operatorname{Arctan} 3 + \operatorname{Arctan} \frac{1}{2} = \pi/2$
.30 $\operatorname{Arcsin} \frac{3}{5} + \operatorname{Arccos} \frac{12}{13} = \operatorname{Arcsin} \frac{63}{65}$
.31 $\operatorname{Arctan} \frac{1}{3} + \operatorname{Arctan} \frac{1}{5} = \operatorname{Arctan} \frac{8}{7}$
.32 $\operatorname{Arctan} \frac{1}{7} + 2 \operatorname{Arctan} \frac{1}{3} = \pi/4$
.33 $\operatorname{Arctan} \frac{1}{8} + \operatorname{Arctan} \frac{1}{5} + \operatorname{Arctan} \frac{1}{4} = \pi/4$

.34 کیا مندرجہ ذیل مساوات صادق ہے؟ اپنے جواب کی وضاحت کرو:

$$\operatorname{Arctan} 2 + \operatorname{Arctan} 3 = -\pi/4.$$

.35 نوٹ کرو کہ سوال 11 سے 18 تک میں صرف تفاعل شامل ہیں۔ $\arcsin(\cos \theta)$ کی تمام ممکن قیمتیں نکالو۔

[اشارہ: فرض کرو کہ $y = \arcsin(\cos \theta)$ تو $\sin y = \cos \theta = \sin(\frac{1}{2}\pi - \theta)$

$$y = \pi - (\tfrac{1}{2}\pi - \theta) + 2n\pi = \tfrac{1}{2}\pi + \theta + 2n\pi$$

اس لیے

$$y = \tfrac{1}{2}\pi - \theta + 2n\pi$$

یا

اس طرح ان کو باہم ترکیب دینے سے ایک ہی عبارت حاصل ہوگی $y = \frac{1}{2}\pi \pm \theta + 2n\pi$]

مندرجہ ذیل کی تمام ممکن قیمتیں نکالو:

.36 $\arcsin(\sin\theta)$	.37 $\arccos(\sin\theta)$
.38 $\arccos(\cos\theta)$	.39 $\arctan(\tan\theta)$

مندرجہ ذیل مساوات کو x کی تمام ممکن قیمتوں کے لیے بغیر جدول کی مدد کے حل کرو اور احتیاط سے پڑتال کرو:

.40 $\operatorname{Arctan} x + 2\operatorname{Arctan} 1 = 3\pi/4$

.41 $\operatorname{Arccos} x + 2\operatorname{Arcsin} 1 = \pi$

.42 $\operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arccos} 2x = \pi/6$

[اشارہ: فرض کرو کہ $\operatorname{Arcsin} x = \alpha$ ، $\operatorname{Arccos} 2x = \beta$ اور $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ کو استعمال کرو۔]

.43 $\operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arccos}(1-x) = 0$

.44 $\operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arccos}(1-x) = \pi/2$

.45 $\operatorname{Arctan}(1+x) + \operatorname{Arctan}(1-x) = \pi/2$

باب 11

ترتیب، اجتماعات اور مسئلہ دورکنی

اکثر ہم سے کہا جاتا ہے کہ ایک دی ہوئی اشیا کے گروہ کو دی ہوئی شرائط کے تحت ترتیب دینے کے طریقوں کی تعداد بتائیے۔ آٹھ آدمی کتنے طریقوں سے مزید بٹھائے جاسکتے ہیں؟ اگر ہر ایک پلیٹ پر تین عدد اور دو حروف لکھے ہوں تو ایسی کتنی مختلف لائسنس پلیٹیں تیار کی جاسکتی ہیں۔ وغیرہ؟ ایسے اور اس سے زیادہ اہم اور پیچیدہ سوالات کے جواب دینا ایک ایسے عمل سے ممکن ہے جسے بعض اوقات تدریسی شمار کرنا کہتے ہیں حالانکہ یہاں پر مفصل بحث ناممکن ہے پھر بھی مضمون کے کچھ خصوصی ابتدائی پہلوؤں پر بحث کی جائے گی کیوں کہ یہ ریاضیات اور دوسرے طبیعی و معاشرتی علوم میں بہت مفید ہے۔

11-1 . **بنیادی اصول :** ہم ایک آسان مثال کو زیرِ غور لاکر شروع کریں۔ ہمیں معلوم کرنا چاہیے کہ ان چار اعداد صحیح 1، 2، 3 اور 4 میں سے دو مختلف ہندسے والے کتنے اعداد بنائے جاسکتے ہیں۔ اگر ان ہندسوں میں سے کوئی بھی دُہرایا نہ جائے۔ ان چاروں میں سے کوئی سے ایک عدد کے دہائی کے ہندسہ کے لیے اخذ کیا جاسکتا ہے۔ اس قسم کی ہر مخصوص پسند کے ساتھ باقی ماندہ تین اعداد صحیح میں سے کوئی ایک اکائی ہندسہ کی جگہ کے لیے اخذ کیا جاسکتا ہے۔ پس چاروں انتخابات میں سے ہر ایک کے لیے تین اور انتخابات ہیں جن کا میزان $4 \cdot 3$ یا 12 کل تعداد ہوگی۔ ہمیں حاصل ہوں گے :

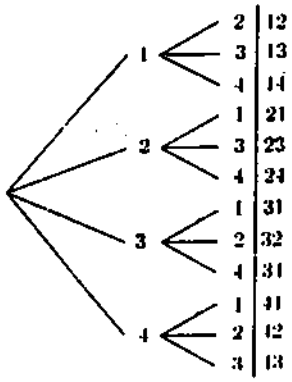
(11-1)

12, 13, 14	(دہائی کے ہندسہ کے لیے 1)
21, 23, 24	(دہائی کے ہندسہ کے لیے 2)
31, 32, 34	(دہائی کے ہندسہ کے لیے 3)
41, 42, 43	(دہائی کے ہندسہ کے لیے 4)

بہ حیثیت ممکن دو ہندسی اعداد۔

اس مثال کو ہم (شکل 1-11) میں دیے گئے ایک شجری شکل سے واضح کر سکتے ہیں۔ اگر دُہرانے کی اجازت ہو تو 12 اعداد کی بجائے $4 \cdot 4 = 16$ ممکن دو ہندسی اعداد ہوں گے۔

ایک ذرا اور پیچیدہ سوال یہ ہوگا کہ انھیں چار اعداد صحیح 1، 2، 3 اور 4 سے تین مختلف ہندسوں والے کتنے اعداد بنائے جا سکتے ہیں؟ مساوات (1-11) میں دی ہوئی فہرست میں درج 12 اعداد میں سے ہر ایک کو سینکڑے اور دہائی کے ہندسہ کی نمائندگی کرنے والے کی حیثیت سے مانا جا سکتا ہے۔ کیوں کہ ہر عدد میں چار اعداد صحیح میں سے دو پہلے ہی سے اخذ کیے جا چکے ہیں تو نئے اکائی کے ہندسہ کا امکان باقی ماندہ دو اعداد صحیح میں سے کسی ایک کا ہے۔ مثلاً پہلے عدد 41 کے ساتھ 2 یا 3 کو 412 یا 413 عدد بنانے کے لیے لیا جا سکتا ہے۔ اس لیے ہمارے پاس $2 \cdot (4 \cdot 3)$ یا 24 ایسے اعداد ہوں گے جن میں ہر ایک میں تین ہندسے ہوں گے جو کہ دیے ہوئے اعداد سے بنائے گئے ہیں۔



شکل 1-11

اس کا بھی نقشۂ شجری شکل 1-11 سے مشابہ ہوگا لیکن اس کے علاوہ آخری شاخوں میں ہر ایک کے سرے پر دو مزید شاخیں ہوں گی۔ اسی طرح اگر اس میں دُہرانے کی بھی اجازت ہو تو اس کی تعداد $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ ہوگی۔

ان مثالوں نے ایک بُنیادی اصول کی تشریح کر دی ہے۔

بُنیادی اصول: اگر ایک کام بغیر پابندی کے n_1 مختلف طریقوں سے کیا جا سکتا

ہے اور دوسرا بغیر پابندی کے n_2 طریقوں سے کیا جاسکتا ہے اور تیسرا بھی بغیر پابندی کے n_3 مختلف طریقوں سے کیا جاسکتا ہے وغیرہ (کسی بھی متناہی تعداد اشیا کے لیے) تو دی ہوئی ترتیب میں کاموں کے کرنے کے طریقوں کی میزان ہوگی $n_1 n_2 n_3 \cdots$

مثال 1 : مساوات $(1-11)$ میں طاق دو ہندسی اعداد کی تعداد کیا ہوگی ؟

حل : ان میں سے کسی بھی عدد کو طاق ہونے کے لیے آخری ہندسہ 1 یا 3 ہونا چاہیے۔ ان دونوں امکانات میں سے ہر ایک کے لیے پہلے ہندسہ کے اخذ کرنے کے لیے تین طریقے ہیں پس طاق دو ہندسی اعداد کی تعداد $2 \cdot 3 = 6$ ہوگی۔ مثال کی جانچ کر کے نوٹ کر و کہ یہی صحیح ہے۔

اگرچہ کسی مقام کے لیے اخذ کرنے کی ترتیب کے امکانات کی تعداد اختیاری ہے۔ یہ عام طور سے عقل مندی کی بات ہوگی کہ اگر ہم کسی مخصوص عمل کو پہلے کر لیں جیسا کہ مثال 1 میں اکائی کے ہندسہ کو اخذ کیا۔

مثال 2 : 7 ڈیموکریٹ اور 4 ری پبلکن میں سے ایک ڈیموکریٹ اور ایک ری پبلکن والی کتنی مختلف کمیٹیاں بنائی جاسکتی ہیں؟

حل : ڈیموکریٹ 7 طریقوں میں سے کسی ایک طریقے سے اخذ کیا جاسکتا ہے اور بغیر پابندی کے ری پبلکن چار طریقوں میں سے کسی ایک طریقے سے چنا جاسکتا ہے۔ اس لیے بنیادی اصول سے ممکنہ مختلف کمیٹیوں کی تعداد کی میزان ہوگی $7 \cdot 4 = 28$

مثال 3 : اگر دو کعبی پانسے پھینکے جائیں تو وہ کتنے طریقوں سے گریں گے ؟

حل : چونکہ ہر مکعب کے چھ رُخ ہوتے ہیں تو ہر ایک بغیر پابندی کے اُن چھ مختلف طریقوں میں سے کسی ایک طریقے سے گر سکتا ہے۔ نتیجے کے طور پر گرنے کے ممکن طریقے ہوں گے $6 \cdot 6 = 36$

مثال 4 : کسی چناؤ میں صدر کی جگہ کے لیے تین اُمیدوار ہیں۔ نائب صدر کے لیے چار، پانچ سکریٹری کے لیے لیکن خزانچی کے لیے صرف دو تو بتاؤ کہ کتنے مختلف طریقوں سے چناؤ کا نتیجہ نکلے گا ؟

حل : صدر کے تین ممکن انتخابات میں سے ہر ایک کے لیے نائب صدر کے لیے چار ہیں۔ ان $(4 \cdot 3 = 12)$ میں سے ہر ایک ممکن چناؤ کے لیے سکریٹری کے انتخابات کے امکان پانچ ہیں وغیرہ۔ اس لیے چناؤ کے مختلف ممکن نتائج کے تعداد کی میزان ہوگی $4(3)(5)(2) = 120$

سوالات

1. ایک نکل اور ایک ڈائم کو میز پر پھینکا گیا۔ تو وہ کتنے طریقے سے گریں گے؟
2. اگر دس سوالوں والے سچ جھوٹ کے ایک معمہ میں تمام سوالات کے جواب دیے جائیں تو مکمل معمہ کے جواب دینے کے لیے کتنے طریقے ہوں گے؟
3. اعداد صحیح 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7 میں سے بنائے گئے ایسے تین مختلف ہندسوں والے اعداد جو 500 سے چھوٹے ہوں، کی تعداد بتاؤ؟
4. اگر ایک میل کی دوڑ دوڑنے والے 12 اشخاص ایک دوڑ میں شریک ہوں تو پہلا، دوسرا، تیسرے مقام کا فیصلہ کتنے طریقوں سے کیا جا سکتا ہے؟
5. A اور B دو شہروں کے درمیان 5 بڑی سڑکیں ہیں اور چار B اور C کے درمیان۔ تو بتاؤ کہ کتنے طریقوں سے ایک شخص A سے C تک گاڑی چلا کر واپس آ سکتا ہے جبکہ دونوں چکر میں وہ B ہو کر آئے اور جائے اور کسی بھی سڑک پر دوبارہ سفر نہ کرے؟
6. اعداد صحیح 1، 2، 3، 4، 5، 6 میں سے زیادہ سے زیادہ تین مختلف ہندسوں والے کتنے اعداد بنائے جا سکتے ہیں؟
7. اعداد صحیح 1، 2، 3، 4، 5، 0 میں سے کم از کم تین مختلف ہندسوں والے کتنے اعداد بنائے جا سکتے ہیں؟
8. ایک ٹینس کلب میں 12 لڑکے اور 9 لڑکیاں ہیں۔ کتنی مخلوط جوڑوں کی ٹیم (ایک لڑکا اور ایک لڑکی) ممکن ہیں؟ کتنے طریقوں سے مخلوط جوڑوں کے مقابلے طے کیے جا سکتے ہیں؟
9. یونیورسٹی کی پہلی جماعت کے طالب علم کو ایک جدید زبان، ایک طبیعی سائنس، ایک معاشرتی علم اور انگریزی لینی چاہیے۔ اگر چار مختلف ممکن جدید زبانیں ہوں، پانچ طبیعی علوم، تین معاشرتی علوم لیکن ہر طالب علم کو ایک ہی انگریزی کا کورس لینا ہو تو بتاؤ کہ کتنے مختلف طریقوں سے وہ اپنا مطالعہ کے کورس کو انتخاب کر سکتا ہے؟
10. معمولی تاش کے 52 پتوں میں سے ایک یکہ، بادشاہ، ملکہ اور غلام کا انتخاب کتنے طریقوں سے کیا جا سکتا ہے۔ اگر (a) وہ مختلف رنگوں کے ہوں (b) وہ مختلف رنگوں کے

ہوں یا نہ ہوں (c) وہ ایک ہی رنگ کے ہوں (d) وہ ایک مخصوص ترتیب کے ہوں؟

11. اگر ایک خوابگاہ میں آٹھ باہری دروازے ہیں تو ایک طالب علم کتنے طریقے سے ایک سے داخل ہوکر (a) کسی ایک دروازے سے باہر جاسکتا ہے (b) کسی بھی دروازے سے باہر جاسکتا ہے؟

12. بیس بال (کھیل کا نام) کے ایک میدان میں چار داخلہ کے دروازے اور نو باہر جانے کے دروازے ہیں۔ دو آدمی کتنے طریقے سے ساتھ ساتھ داخل ہوکر علاحدہ علاحدہ دروازوں سے باہر جاسکتے ہیں؟

11-2 . **ترتیب** : ہم ترتیب کی تعریف کرنا چاہتے ہیں۔

تعریف 11-1 : ہر مختلف ترتیب یا اشیا کے مرتب سٹ اُن اشیا کی ترتیب کہلاتے ہیں۔

مثلاً 423 اور 234 میں گو ایک ہی ہندسے ہیں لیکن یہ مختلف اعداد ہیں کیونکہ ہندسے 2 ، 3 ، 4 کی یہ مختلف مرتب ترتیبیں ہیں۔ عام طور پر اگر ہمارے پاس n اشیا ہوں اور اُن میں r کو ایک مخصوص ترتیب میں ($r \leq n$) لانا ہو تو ایسے انتظام کو کہتے ہیں n اشیا کی ترتیب جس میں سے r ایک وقت میں لی گئی ہوں۔

n میں سے بیک وقت r اشیا لے کر ترتیب کی کل تعداد معلوم کرنے کے ضابطے کو دفعہ 11-1 کے بُنیادی اصول کی مدد سے آسانی سے ثابت کیا جاسکتا ہے۔ یہ عبارت جو اعداد صحیح n اور r کی تفاعلی قیمتیں ہیں علامتی طور پر $P(n, r)$* سے ظاہر کی جائے گی۔

مسئلہ 11-1 : n میں سے بیک وقت r اشیا لیکر ترتیب کی کل تعداد $P(n, r)$ یہ عبارت دے گی :

$$P(n, r) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1). \qquad (11\text{-}2)$$

ثبوت : n میں سے بیک وقت r اشیا لے کر ممکن انتظامات کی تعداد برابر ہے اُن طریقوں کی تعداد کے جن میں r مقامات کو n مختلف چیزوں میں سے اخذ کرکے پُر کیا جائے۔ پہلے مقام کے لیے n طریقے

---

* علامت $_nP_r$ بھی اکثر استعمال ہوتی ہے۔

ہیں، دوسرے مقام کے لیے $n-1$ طریقے، تیسرے کے لیے $n-2$ وغیرہ۔ r۔واں مقام باقیماندہ $n-(r-1)=n-r+1$ اشیا میں سے کسی سے پُر کیا جا سکتا ہے۔ اس طرح r مقامات کو $n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)$ طریقوں سے پُر کیا جا سکتا ہے۔ اس لیے

$$P(n, r) = n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1).$$

اگر ہم n میں سے بیک وقت n (یا سب کی سب) لے کر ترتیب کی تعداد نکالنا چاہتے ہیں تو نوٹ کریں کہ مساوات (11-2) میں $r=n$ اور ہمیں حاصل ہوگا۔

$$P(n, n) = n(n-1)(n-2)\dots 3\cdot 2\cdot 1 = n! \qquad (11\text{-}3)$$

مساوات (11-2) کے دائیں ممبر کے شمار کنندہ اور نسب نما کو $(n-r)!$ سے ضرب دینے سے ہمیں $P(n, r)$ کے لیے ایک متبادل ضابطہ حاصل ہوگا

$$P(n, r) = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)(n-r)!}{(n-r)!}$$

یا

$$\boxed{P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}.} \qquad (11\text{-}4)^*$$

مثال 1 : چار اعداد صحیح 1، 2، 3، 4 میں سے بیک وقت دو لے کر ترتیب کی تعداد بتاؤ۔

حل : کیوں کہ ہم چار میں سے دو اشیا بیک وقت لے کر ترتیب کی تعداد نکالنے کے خواہش مند ہیں

$$P(4, 2) = 4\cdot 3 = 12.$$

یہ بارہ انتظامات دفعہ 1-11 میں درج ہیں۔

مثال 2 : اگر چار اشخاص ایسی بس میں داخل ہوں جس میں دس خالی نشستیں ہوں تو چاروں کو بٹھانے کے کتنے طریقے ہوں گے؟

حل : کیوں کہ یہ دس نشستوں میں سے بیک وقت چار لے کر انتظامات کی نمائندگی کرتا ہے اسلیے

$$P(10, 4) = 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7 = 5040.$$

---

* ضربیہ صفر از روئے تعریف $0!$ کے برابر ہے۔

مثال 3 : پانچ کتابیں کتنے طریقوں سے ایک الماری کے تختے پر جمائی جا سکتی ہیں؟

حل : یہ پانچ اشیا میں سے بیک وقت پانچوں لے کر ترتیب کی نمائندگی کرتا ہے۔ اس لیے

$$P(5, 5) = 5! = 120.$$

لفظ "readings" کے آٹھ حرفوں کی ترتیب کی تعداد حالانکہ 8! ہوگی لیکن لفظ "gargling" کے حرفوں کی ترتیب کی تعداد کچھ کم ہوگی کیوں کہ اس میں تین حروف ایک ہی ہیں۔ ایک مثال اگلے مسئلہ کی تشریح کرے گی۔

مثال 4 : لفظ "gargling." کے آٹھوں حرفوں کی ترتیب کی تعداد نکالو۔

حل : یہ مان کر کہ تمام حروف مختلف ہیں ترتیب کی مطلوبہ تعداد P برابر ہوگی 8!، یہ ہر g کو مختلف ذیلی تحریر دے کر حاصل ہو سکتا ہے مثلاً g_1، g_2 اور g_3 تاہم درحقیقت یہ تینوں g آپس میں 3! طریقوں سے ترتیب دیے جا سکتے ہیں۔ دراصل دوسرے حروف کی ہر واضح ترتیب کے لیے یہی ہوگا۔ اس لیے

$$3!\,P = 8!$$

یا

$$P = \frac{8!}{3!}.$$

مندرجہ ذیل عام مسئلہ کے ثبوت کا استدلال مثال 4 کے استدلال کے مماثل ہے اور برائے مشق چھوڑ دیا جاتا ہے۔

مسئلہ 11-2 : اگر P اُن مختلف ترتیبوں کی تعداد کی نمائندگی کرے جس میں n اشیا میں سے بیک وقت تمام لے لی گئی ہیں جبکہ p ایک قسم کی ہوں، q دوسرے قسم کی اور r تیسرے قسم کی وغیرہ تو

$$P = \frac{n!}{p!q!r!\ldots}. \qquad (11\text{-}5)$$

مثال 5 : "Mississippi" لفظ میں سے 11 حروف میں سب بیک وقت لے کر کتنی ترتیبیں ہوں گی؟

حل : کیوں کہ اس میں چار s، چار i اور دو p ہیں اس لیے

$$P = \frac{11!}{4!4!2!} = 34{,}650.$$

سوالات

1. 1 سے 9 تک کے ہندسوں میں سے تین مختلف ہندسوں والے کتنے اعداد بنائے جاسکتے ہیں؟
2. سوال 1 کے ہندسوں سے 700 سے چھوٹے تین مختلف ہندسوں والے کتنے اعداد بن سکتے ہیں؟
3. سوال 1 کے ہندسوں سے زیادہ سے زیادہ تین مختلف ہندسوں والے کتنے اعداد بن سکتے ہیں؟
4. 100 طلبا کی ایک جماعت میں سے ایک صدر، ایک نائب صدر، ایک سکریٹری اور ایک خزانچی کتنے طریقوں سے چُن سکتے ہیں؟
5. ایک صف جس میں 7 نشستیں ہوں اُس میں چار لڑکوں اور تین لڑکیوں کو کتنے طریقے سے بٹھایا جاسکتا ہے (a) اگر وہ کہیں بھی بیٹھیں (b) اگر لڑکا اور لڑکی یکے بعد دیگرے بیٹھیں؟
6. 8 نشستوں والی ایک صف میں چار لڑکے اور چار لڑکیاں کتنے طریقوں سے بٹھائے جاسکتے ہیں (a) اگر وہ کہیں بھی بیٹھیں (b) اگر لڑکا اور لڑکی یکے بعد دیگرے بیٹھیں؟
7. ایک بیس بال کی ٹیم کا منیجر اپنے بہترین بلّے باز کو چوتھا اور گیند پھینکنے والے کو آخر میں بھیجنے پر بضد ہے۔ ان حالات میں بلّہ بازی کی کتنی ترتیبیں ممکن ہیں؟
8. 8 نشستوں والی ایک صف میں ان 8 لوگوں کو کتنے طریقوں سے بٹھایا جاسکتا ہے اگر دو آدمی ہمیشہ ایک دوسرے کے پاس ہی بیٹھنا چاہیں؟
9. زبان کا ایک اُستاد ایک ہی زبان کی کتابوں کو ساتھ ساتھ الماری کے تختے پر رکھنا چاہتا ہے۔ اگر اُس کے پاس 5 فرانسیسی، 12 اطالوی اور 3 جرمن زبان کی کتابوں کے لیے 4 جگہیں ہوں تو اُس تختے پر وہ کتنے طریقے سے رکھی جاسکتی ہیں؟
10. میز کے چاروں طرف آٹھ آدمی کتنے طریقوں سے بٹھائے جاسکتے ہیں؟
11. میز کے چاروں طرف آٹھ آدمی کتنے طریقوں سے بٹھائے جاسکتے ہیں اگر دو آدمی ساتھ ہی ساتھ بیٹھنے پر بضد ہوں؟
12. لائسنس کی کتنی ایسی پلیٹیں تیار کی جاسکتی ہیں جس میں پہلے دو مقام میں دو حروف ہوں اور آخری تین مقاموں پر 0 سے 9 تک میں سے کوئی بھی تین عدد ہوں؟

13. سوال 12 اس شرط کے ساتھ حل کرو کہ کوئی بھی حرف یا عدد دُہرایا نہ جائے؟

14. لفظ (a) "algebra" ، (b) "college" کے حروف کی کتنی ترتیبیں ہو سکتی ہیں؟

15. لفظ "Tennessee" کے حروف کی کتنی ترتیبیں ہو سکتی ہیں؟

16. چار سرخ، پانچ سفید اور تین نیلے دانے ایک ہی صف میں کتنے طریقے سے ترتیب دیے جا سکتے ہیں؟

17. سات مختلف رنگ والے دانوں سے کتنے طریقوں سے ایک کنگن بنایا جا سکتا ہے؟

18. ثابت کرو کہ $P(n+1, r) \equiv (n+1)P(n, r-1)$

19. مساوات کو حل کرو $P(n, 5) = 20P(n, 3)$ ، n کے لیے۔

20. مندرجہ ذیل کی قیمت معلوم کرو:

$$P(5, 1) + P(5, 2) + P(5, 3) + P(5, 4) + P(5, 5).$$

11-3 . اجتماعات : ترتیب کے مقابلہ میں جو کہ مختلف اشیا کی ایک مرتب ترتیب ہے **اجتماع** اشیا کا ایک ایسا مجموعہ یا سٹ ہے جو کسی مخصوص ترتیب میں نہیں۔

اس لیے n مختلف اشیا میں سے بیک وقت r لینے سے $(r \leq n)$ حاصل شدہ اجتماعات سے مُراد وہ تمام ممکن انتخابات ہیں جو n میں سے r مختلف اشیا لے کر بغیر اُن کے مراتب یا ترتیب کو دھیان دیے حاصل ہوں۔ ان **اجتماعات** کی تعداد کی میزان کو $C(n, r)$ * سے موسوم کرتے ہیں کیوں کہ یہ پہلے کی طرح n اور r کی تفاعلی قیمت ہے۔

ترتیب اور اجتماعات کے مابین فرق اور ایک اہم فرق مرتبہ یا ترتیب کا ہے۔ اس فرق کی وضاحت مندرجہ ذیل مسئلہ کر دے گا۔

مسئلہ 11-3 : n اشیا میں سے r کو بیک وقت لے کر، $C(n, r)$ جو اجتماعات کے اعداد کی میزان حاصل ہوگی وہ مندرجہ ذیل ضابطہ دے گا :

---

* علامات ${}_nC_r$ اور $\binom{n}{r}$ بھی اکثر استعمال ہوتے ہیں۔ ہم نے $C(n, r)$ اس لیے پسند کیا ہے کہ یہ علامت تفاعلی قیمت کی علامت کے مطابق ہے۔ یہ آسانی سے ثابت بھی کی جا سکتی ہے جو کہ شمار کرنے والی مشین کی زبان کے لیے مزید فائدہ مند ہے۔

$$\boxed{C(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!r!}.} \qquad (11\text{-}6)$$

ثبوت : $C(n, r)$ اجتماعات میں سے کسی ایک کے لیے جس میں r مختلف اشیا ہوں ان r اشیا کو $r!$ طریقے سے ترتیب دے کر مرتب کیا جا سکتا ہے۔ پس ہر ایک اجتماع کے لیے $r!$ ترتیب ہوں گی، اس لیے تمام $C(n, r)$ ممکن اجتماعات کے لیے $C(n, r)r!$ مختلف ترتیبیں ہوں گی کیوں کہ یہ کل ممکن ترتیبیں ہیں n اشیا کی جس میں بیک وقت r لی گئی ہیں۔ ہمیں حاصل ہوگا :

$$C(n, r)r! = P(n, r),$$

یا

$$\boxed{C(n, r) = \frac{P(n, r)}{r!}.} \qquad (11\text{-}7)$$

اب اگر ہم اس مساوات میں 11-4 کی عبارت $P(n, r)$ کی جگہ پر بدل دیں تو

$$C(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!r!}. \qquad (11\text{-}6)$$

اس مساوات کا بدیہی اہم نتیجہ یہ ہے کہ

$$\boxed{C(n, r) = C(n, n-r).} \qquad (11\text{-}8)$$

اگر n مقابلتاً بڑا ہو اور $n \geq r$ لیکن بڑا ہو تو اس کے استعمال سے درحقیقت ہمارا شمار کرنے کا کام بہت کم ہو جائے گا (دیکھو مثال 1)۔

مثال 1 : $C(15, 12)$ کی قیمت نکالو۔

حل : مساوات (11-7) کے استعمال سے یہ ضابطہ اکثر سوالات میں استعمال کیا جا سکتا ہے :

$$C(15, 12) = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}$$

$$= \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3} = C(15, 3),$$

تاکہ

$$C(15, 12) = 455$$

مثال 2 : 15 لڑکے اور 10 لڑکیوں والی ایک جماعت میں 3 لڑکے اور 2 لڑکیوں والی ایک

کمیٹی کتنے طریقوں سے بنائی جاسکتی ہے؟

حل : کیوں کہ کمیٹی کی ترکیبت میں ترتیب کو کوئی دخل نہیں ہے اس لیے لڑکے $C(15, 3)$ طریقے سے اخذ کیے جاسکتے ہیں اور لڑکیاں $C(10, 2)$ طریقوں سے۔ بنیادی اصول کی رو سے ہمیں حاصل ہوگا

$$C(15, 3) \cdot C(10, 2) = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} = 20{,}475.$$

مثال 3 : کسی امتحان میں ایک طالب علم کو 12 سوالوں میں سے آٹھ کرنا ہیں، جن میں پہلے چھ میں سے 5 شامل ہوں تو بتاؤ وہ کتنے طریقوں سے امتحان میں سوال حل کرسکتا ہے؟

حل : کیوں کہ چھ میں سے پانچ کے جواب دینا ہیں اس لیے یہ $C(6, 5)$ طریقے سے ہوسکتا ہے۔ اب یہ پانچ سوال کرنے کے بعد اُس کو باقی ماندہ میں سے تین حل کرنے ہیں۔ یہ $C(6, 3)$ طریقے سے کیا جاسکتا ہے۔ اس لیے امتحان میں جوابات لکھنے کے طریقوں کی تعداد ہوگی

$$C(6, 5) \cdot C(6, 3) = 120.$$

اکثر ہم n اشیا میں سے $1, 2, 3, \ldots$ یا n بیک وقت لے کر اجتماعات کی کُل تعداد نکالنا چاہتے ہیں۔

مثال 4 : ایک پنس، ایک نکل، ایک ڈائم اور ایک کوارٹر سے کتنی مختلف رقوم کے مجموعے بنائے جاسکتے ہیں؟

حل : کیوں کہ کُل چار سکے ہیں، اس لیے رقوم کے مختلف مجموعوں کی تعداد ہوگی

$$C(4, 1) + C(4, 2) + C(4, 3) + C(4, 4) = 15.$$

اگلی دفعہ میں اسی کو شمار کرنے کا ایک زیادہ آسان طریقہ تجویز کیا گیا ہے (دیکھیے سوال 29، دفعہ 4–11)۔

سوالات

1. قیمت معلوم کرو: (a) $C(7, 4)$, (b) $C(10, 2)$, (c) $C(21, 19)$

2. قیمت معلوم کرو:

$$C(8, 3) + C(8, 4) + C(8, 5) + C(8, 6) + C(8, 7) + C(8, 8).$$

3. 25 کے ایک گروہ میں سے چار کی ایک کمیٹی کتنے طریقوں سے اخذ کی جاسکتی ہے؟

4. 25 ڈیموکریٹ اور 18 ری پبلکن میں سے 3 ڈیموکریٹ اور دو ری پبلکن والی کتنی

ممکن کمیٹیاں بنائی جاسکتی ہیں ؟

5. سوال چار کے گروہ میں سے اگر کوئی بھی دو مخصوص ڈیموکریٹ میں سے ایک صدر ہو تو بتاؤ کہ گزشتہ سوال میں دیے گئے بیان کے مطابق کمیٹی کے توازن کو برقرار رکھتے ہوئے کتنی ممکن کمیٹیاں بنائی جاسکیں گی ؟

6. کسی کانفرنس کی 9 ٹیموں میں سے اگر ہر ایک ٹیم اسی کانفرنس کی دوسری ٹیم کے ساتھ صرف ایک دفعہ میچ کھیلے تو بتاؤ فٹ بال کے کتنے میچ کھیلے جائیں گے ؟

7. کالج کی ایک بیس بال کی جماعت میں تین کیچ پکڑنے والے ہیں، پانچ گیند پھینکنے والے، سات اندر کی طرف کے کھلاڑی اور سات بیرونی کھلاڑی ہیں تو ان میں سے کتنے طریقوں سے بیس بال کی 9 کی ٹیم بنائی جاسکتی ہے ؟

8. تاش کے 52 پتّوں میں سے برج کا 13 پتّوں والا ایک ہاتھ کتنے طریقوں سے اخذ کیا جاسکتا ہے ؟

9. کتنے طریقوں سے ایک کھلاڑی برج کا ایک ہاتھ ایسا حاصل کرسکتا ہے جس میں صرف یکّے ہی ہوں یا تصویر والے تاش ؟

10. کتنے طریقوں سے ایک کھلاڑی کو برج کا ایسا ہاتھ مل سکتا ہے جس میں سات یا اُس سے کم کے پتّے ہوں ؟

11. کتنے طریقوں سے کسی کھلاڑی کو برج کا ایسا ہاتھ حاصل ہوسکتا ہے جس میں دو یکّے، ایک بادشاہ، ایک ملکہ، تین غلام اور چھ ایسے دوسرے تاش جو دہلے یا اُس سے کم ہوں ؟

12. چار سرخ، پانچ سفید اور چھ نیلی گیندوں میں سے کتنی ایسی 5 گیندوں کے انتخابات کیے جاسکتے ہیں جن میں دو سُرخ، ایک سفید اور دو نیلی ہوں ؟

13. خصوصی حالات کو نظر انداز کرکے

(a) 9 نقاط میں سے کتنے خطوط مستقیم بنیں گے ؟ (b) 9 نقاط سے کتنے دائرے بنیں گے ؟

14. 9 نقاط سے کتنے مثلث بنیں گے جن میں سے کوئی بھی تین ایک ہی خطِ مستقیم پر واقع نہ ہوں ؟

15. 9 نقاط سے کتنے ذُو اربعۃُ السطوح تیار ہوں گے جبکہ اُن میں سے کوئی بھی چار نقاط ایک ہی سطح پر نہ ہوں ؟

16. پندرہ آدمیوں کی ایک جماعت میں دو تین یا چار آدمیوں والی کتنی کمیٹیاں بنائی جا سکتی ہیں ؟

17. کسی کالج کے صدر کی بیوی اُس کالج کے آٹھ اساتذہ کی بیویوں کو کتنے طریقوں سے چائے پر مدعو کر سکتی ہے اگر وہ بیک وقت (a) دو (b) تین (c) دو یا دو سے زیادہ کو بلائے ؟

18. ایک پنس، ایک نکل، ایک ڈائم، ایک کوارٹر اور ایک نیم ڈالر میں سے کتنی مختلف رقوم کے ایسے مجموعے بنائے جا سکتے ہیں جس میں کم از کم دو سکّے لیے گئے ہوں ؟

n \ r	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

19. n کے لیے مساوات حل کرو $C(n+2, 4) = 6C(n, 2)$

*20. ثابت کرو کہ $C(n, r) + C(n, r-1) \equiv C(n+1, r)$

*21. مندرجہ بالا جدول میں درج کیے اعداد پر غور کرو یہ $C(n, r)$ کی قیمت کو ظاہر کرتا ہے جس میں r کی قیمت اُفقی طور پر اور n کی قیمت انتصابی طور پر درج کی گئی ہے مثلاً $C(4, 3) = 4$ کیوں کہ ہم $n = 4$ کی قیمت کے مطابق صف کے آر پار اور $r = 3$ کی قیمت کے مطابق کالم میں نیچے کی طرف چلیں تو اُس جگہ میں جہاں یہ دونوں کالم اور صف ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں عدد 4 لکھا ہے۔ نوٹ کرو کہ مساوات $C(n+1, r) \equiv C(n, r) + C(n, r-1)$ ان اندراجات کو مطمئن کرتی ہے۔

22. مساوات $C(n+1, r) \equiv C(n, r) + C(n, r-1)$ اصول پیسکل (Pascal) کہلاتا ہے۔ پیسکل (1623-1662) سترھویں صدی میں اُن اشخاص میں سے ایک تھا

جس نے قسمت آزمائی کے کھیلوں کے مطالعے کے سلسلے میں مندرجہ بالا جدول کے اعداد کی قطاری ترتیب کا مطالعہ کیا تھا۔ اس قطاری اعداد کی ترتیب کو مثلث پیسکل کہتے ہیں۔

مندرجہ بالا مساوات کی مدد سے اور یہ فرض کر کے کہ $C(n, n) = 1$ اور $C(n, 0)$ مندرجہ بالا جدول کو n اور r کی قیمت 10 تک لے کر بڑھاؤ۔

23 ثابت کرو کہ رشتہ : $C(n, r+1) = \frac{n-r}{r+1} C(n, r)$ ، $0 \leq r < n$ کے لیے۔ مندرجہ بالا ضابطہ کی مدد سے مثلث پیسکل تیار کیا جا سکتا ہے۔ یہ مان کر کہ $C(7, 0) = 1$ ، اُن اعداد کو معلوم کرو کہ جو $n = 7$ کے مطابق ہوں۔

24 ضابطہ ثابت کرو : $rC(n, r) = nC(n-1, r-1)$

11-4 . دوُرکنی مسئلہ : اُن تصوّرات کی نسبت سے جن پر ہم نے اس باب میں بحث کی ہے یہ الجبرا کا ایک اہم مسئلہ ہے۔ ہم نے باب تین میں کثیر رکنی کو آپس میں ضرب دینے کا طریقہ سیکھا ہے۔ اس ضرب سے ہمیں حاصل ہوگا

$$(a+b)^1 = a + b,$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

اور

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

اگر ہم ان حاصل ضرب کا مطالعہ کریں تو فوراً دو ہی دو باتیں نظر آئیں گی :

(1) ضریب وہی ہیں جو کہ دفعہ 11-3 کے سوال 21 کے جدول میں دیے گئے ہیں۔

(2) ضریب کو $C(n, r)$ کی تفاعلی قیمت کے ارکان میں ظاہر کیا جا سکتا ہے مثلاً

$$(a+b)^4 = C(4, 0)a^4 + C(4, 1)a^3b + C(4, 2)a^2b^2 + C(4, 3)ab^3 + C(4, 4)b^4$$

ان دونوں توجیہات کی وجہ سے $(a+b)^n$ کے پھیلاؤ میں جہاں n ایک مثبت عدد صحیح ہے۔ ہمیں ایسی ہی ایک عبارت حاصل ہونے کی اُمید ہے۔

مسئلہ 11-4 : مسئلہ دو رقمی کسی بھی مثبت عدد صحیح n کے لیے

$$(a+b)^n = C(n,0)a^n + C(n,1)a^{n-1}b + C(n,2)a^{n-2}b^2 + \cdots + C(n,r)a^{n-r}b^r + \cdots + C(n,n)b^n. \quad (11\text{-}9)$$

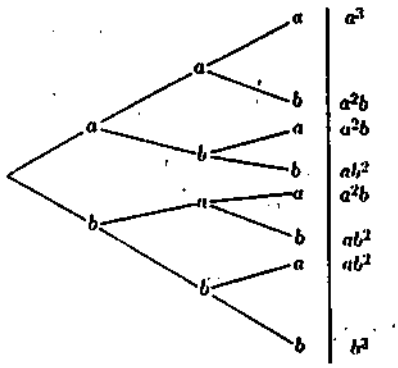
ثبوت : کسی بھی مثبت عدد صحیح n کے لیے $(a+b)^n$ برابر ہے n برابر کے اجزا کے یعنی

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)(a+b) + \cdots + (a+b)}_{n \text{ اجزا ضربی}}. \quad (11\text{-}10)$$

اس ضرب کے لیے ہم n اجزا ضربی میں سے ہر ایک میں سے a یا b منتخب کرکے ان n حروف کو آپس میں ضرب دے لیتے ہیں۔ اگر ہم جداگانہ ہر جزو میں سے تمام ممکن طریقوں سے a یا b کو اخذ کرکے حاصل ضرب حاصل کرکے آپس میں جوڑ دیں تو $(a+b)^n$ کا پھیلاؤ حاصل ہو جائے گا۔ مخصوص طور سے a^n ہم کو n جزو میں سے ہر ایک میں سے a اخذ کرنے سے حاصل ہوگا۔ ارکان $a^{n-1}b$ ہمیں حاصل ہوں گے جب ہم a سوائے ایک کے سب اجزا میں سے لیں اور b اُس بچے ہوئے جزو میں سے وغیرہ۔ عمومی طور پر r کی کسی بھی ایسی قیمت کے لیے جہاں $0 \le r \le n$ ، ارکان $a^{n-r}b^r$ ہمیں اس طرح حاصل ہوں گے کہ ہم a اخذ کریں $n-r$ اجزا میں سے اور b باقی r اجزا میں سے۔ اب ہمیں اپنی توجہ r اجزا میں سے b کو اخذ کرنے پر مرکوز کرنا چاہیے اور یہ کو r اجزا کو اخذ کرنے کے کتنے ممکن مختلف طریقے موجود ہیں۔ کیوں کہ ایسے رکن کے لیے ہم n انتخابات میں سے r اجزا کو چنتے ہیں اس لیے $a^{n-r}b^r$ ارکان کی تعداد بعینہٖ $C(n,r)$ ہوگی اس لیے $C(n,r)a^{n-r}b^r$ پھیلاؤ میں آئے گی۔ لیکن r کی سعت کی وجہ سے اس قسم کی تمام ارکان کی حاصل جمع جس میں r بہ شمولیت دونوں قیمت 0 سے n تک ہے اور یہی درست طور پر مسئلہ کا بیان ہے۔

شکل 11-2 میں $(a+b)^3$ کے تمام ممکنہ حاصل ضرب کے سٹ کی تمثیل بذریعہ شجری خاکہ کی گئی ہے۔ اگر ہم نقطہ 0 سے شروع کریں تو کوئی بھی راستہ جو شجر کے آر پار سیدھے ہاتھ کے کنارے کی طرف جائے متماثل کے کسی نہ کسی حاصل ضرب کی نمائندگی کرتا ہے۔ غور کریں کہ صرف ایک a^3 ہے تین a^2b حاصل ضرب، تین ab^2 حاصل ضرب اور ایک b^3 چنانچہ کُل آٹھ حاصل ضرب ہیں جیسا کہ ہونا چاہیے۔

اس مسئلہ کی وجہ سے $C(n,r)$ یعنی n اشیا میں سے بیک وقت r کو لینے سے اجتماعات، کو بہ حیثیت دو رقمی مسئلہ کے منسوب کرتے ہیں۔



شکل 2-11

مساوات 11-9 میں کسی مثبت عدد صحیح n کے لیے پھیلاؤ کی مندرجہ ذیل خصوصیات براہِ راست نوٹ کرتے ہیں :

(1) کسی بھی متماثل میں ارکان کی تعداد $n + 1$ ہوگی۔

(2) متماثل میں پہلا رکن a^n ہوگا۔

(3) کسی بھی رکن سے اگلے رکن میں جانے پر a کا قوّت نما ایک سے کم ہوتا ہے اور b کا ایک سے بڑھتا ہے تاکہ کسی بھی رکن میں a اور b کے قوت نماؤں کا جوڑ n ہوگا۔

(4) متماثل کے اوّل رکن اور آخر کے، دوسرے اور آخر سے دوسرے کے، تیسرے اور آخر سے تیسرے کے وغیرہ ضریب ایک ہی ہوں گے [یاد کرو مساوات (11-8)]

یہ خصوصیات مسئلہ کو کہیں بھی استعمال کرنے پر مددگار ثابت ہوں گی۔ مزید یہ نوٹ کرنا بھی اہم ہوگا کہ پھیلاؤ کا r - واں رکن ہوگا :

$$C(n, r-1)a^{n-r+1}b^{r-1} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+2)}{(r-1)!}\,a^{n-r+1}b^{r-1} \tag{11-11}$$

مثال 1 : $(a + 2b)^6$ کو بذریعہ دورکنی مسئلہ (دو رقمی) پھیلا کر اختصار کرو۔

حل : پھیلائی جانے والی دو رقمی (دورکنی) میں a اوّل اور $2b$ دوسرا رکن ہیں۔ اس لیے

$$(a+2b)^6 = a^6 + 6a^5(2b) + \frac{6\cdot5}{2!}a^4(2b)^2 + \frac{6\cdot5\cdot4}{3!}a^3(2b)^3$$
$$+ \frac{6\cdot5\cdot4\cdot3}{4!}a^2(2b)^4 + 6a(2b)^5 + (2b)^6$$
$$= a^6 + 12a^5b + 60a^4b^2 + 160a^3b^3$$
$$+ 240a^2b^4 + 192ab^5 + 64b^6.$$

مثال 2 : $(x^3 - 3y^2)^{12}$ کے پھیلاؤ میں اوّل چار ارکان نکالو۔

حل : یہاں پر $a = x^3$ اور $b = -3y^2$ اس طرح

$$(x^3 - 3y^2)^{12} = (x^3)^{12} + 12(x^3)^{11}(-3y^2) + \frac{12\cdot11}{2!}(x^3)^{10}(-3y^2)^2$$
$$+ \frac{12\cdot11\cdot10}{3!}(x^3)^9(-3y^2)^3 + \cdots$$
$$= x^{36} - 36x^{33}y^2 + 594x^{30}y^4 - 5940x^{27}y^6 + \cdots$$

اس مثال کے طریقے میں نوٹ کرو کہ جب دو رقمی میں اوّل رکن مثبت ہو اور دوسرا رکن منفی تو پھیلاؤ کی علامات متبادل ہوتی ہیں۔

مساوات 11-11 کا عام رکن اُن بہت سے سوالات میں جہاں کوئی مخصوص رکن شامل ہو مددگار ثابت ہوگا۔

مثال 3 : $[(1/2a) - 3]^{16}$ کے پھیلاؤ میں چھٹا رکن نکالو۔

حل : اس مثال میں اوّل رکن $1/2a$ ہے اور دوسری -3 ، $n = 16$ اور $r = 6$

اگر ہم مساوات (11-11) میں بدل کر رکھیں تو چھٹی رقم ہوگی :

$$\frac{16\cdot15\cdot14\cdot13\cdot12}{2\cdot3\cdot4\cdot5}\left(\frac{1}{2a}\right)^{11}(-3)^5 = -\frac{66339}{128a^{11}}.$$

سوالات

مندرجہ ذیل میں سے ہر ایک کو دو رقمی مسئلہ کی مدد سے پھیلاؤ اور حسب ضرورت اختصار کرو :

1. $(a+b)^7$
2. $(xy-2)^4$
3. $(2x+y^2)^5$
4. $\left(a^2 - \frac{x}{2}\right)^6$
5. $(5x - y^2)^4$
6. $(x^{-1} + 2y^{-2})^6$

7. $(x^{1/3} + y^{1/3})^6$ 8. $(x^{2/3} - y^{2/3})^5$
9. $(x^{2/5} - 3y^{-2})^5$ 10. $(ax^{1/2} - by^{1/3})^6$

مندرجہ ذیل کے پھیلاؤ میں سے اوّل چار ارکان نکالو اور اختصار کرو :

11. $\left(\frac{x^2}{2} + \frac{2}{y^2}\right)^{12}$ 12. $(x^{1/3} - y^{1/3})^9$
13. $(x^{1/3} - y^{-1/3})^{11}$ 14. $(x^{-2/3} + 2y^{2/3})^8$
15. $(1 + x)^k$

16* $(1 + h)^{1/h}$ | اشارہ : مان لو کہ دو رکنی مسئلہ $n = 1/h$ کے لیے صادق ہے۔

مندرجہ ذیل کے پھیلاؤ میں سے پوچھے گئے رکن کو لکھو اور مختصر کرو :

17. $(2x - y)^{12}$ کا ساتواں رکن 18. $\left(2 + \frac{x}{4}\right)^{15}$ کا نواں رکن
19. $(y^2 - \frac{1}{y})^8$ کا وسطی رکن 20. $\left(2 + \frac{3}{x}\right)^{10}$ میں وسطی رکن
21. $(2x - 3)^{10}$ کے پھیلاؤ میں وہ رکن جس میں x^7 آئے۔
22. $(5 - 2x)^6$ میں x^3 کو شامل کرنے والا رکن۔
23. $\left(x + \frac{1}{2x}\right)^7$ کا x^5 کو شامل کرنے والا رکن۔
24. $\left(\frac{x}{y} - \frac{y^2}{2x^3}\right)^8$ میں $\frac{x^2}{y^2}$ کو شامل کرنے والا رکن۔
25. ثابت کرو کہ مساوات (9-11) کا $(r + 1)$ واں رکن ہوگا
$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}\, a^{n-r}b^r.$$
26. مثبت عدد صحیح n کے لیے $C(n, 4) = 35$ کو حل کرو۔
27. ثابت کرو کہ :
$$2^n = (1 + 1)^n = 1 + C(n, 1) + C(n, 2) + C(n, 3) + \cdots + C(n, n).$$
28. سوال 27 کے بیان کو $n = 5$ کے لیے جانچ کرو۔
29. سوال 27 کی مدد سے دفعہ 3-11 کے سوال 18 کو حل کرو۔
30. اگر n جفت ہو تو ثابت کرو :
$$C(n, 0) + C(n, 2) + \cdots + C(n, n) = C(n, 1) + C(n, 3) + \cdots + C(n, n - 1).$$

11-5 . $(1+x)^n$ **کا پھیلاؤ** : $(1+x)^n$ پر دورقمی مسئلہ کا اطلاق کرتے ہوئے ہمیں حاصل ہوگا :

$$(1+x)^n \equiv 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-r+2)}{(r-1)!}x^{r-1} + \cdots, \qquad (11\text{-}12)$$

جو $n+1$ ارکان پر مشتمل ہے اور تمام مثبت اعداد صحیح n کے لیے صحیح ہے۔ اگر n علاوہ مثبت عدد صحیح ہونے کے کوئی دوسرا حقیقی عدد ہو تو مساوات (11-12) کا پھیلاؤ ختم نہ ہوگا۔ یہ سوال قدرتی طور پر پیدا ہوتا ہے کہ یہ رشتہ کن شرائط کے تحت اب بھی جائز ہوگا ؟

اگرچہ اس کا ثبوت اس کتاب کی حدود سے باہر ہے یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ مساوات (11-12) کے دائیں طرف کے ارکان کی ایک متناہی تعداد n کی کسی ایسی قیمت کے لیے جو مثبت عدد صحیح نہ ہو اگر $|x| < 1$ ، $(1+x)^n$ کے تقریباً برابر آجاتی ہے۔ یہ واضح رہے کہ جتنے زیادہ ارکان لیے جائیں گے قربت اُتنی ہی زیادہ نزدیک ہوگی کیوں کہ ہر رکن کی جسامت آگے آنے والے رکن کی قدر سے عام طور سے کم ہوگی۔

مثال 1 : $(1.02)^{-4}$ کی قیمت چار ملحوظ ہندسوں تک صحیح نکالو۔

حل : مساوات (11-12) کے تعلق سے $(1.02)^{-4}$ کا پھیلاؤ معلوم کرو :

$$\begin{aligned}(1.02)^{-4} &= (1+0.02)^{-4}\\ &= 1^{-4} + (-4)\cdot 1^{-5}(0.02) + \frac{(-4)(-5)}{2!}\cdot 1^{-6}(0.02)^2\\ &\quad + \frac{(-4)(-5)(-6)}{3!}\cdot 1^{-7}(0.02)^3\\ &\quad + \frac{(-4)(-5)(-6)(-7)}{4!}\cdot 1^{-8}(0.02)^4 + \cdots\\ &= 1 - 0.08 + 0.004 - 0.00016 + 0.0000056 + \cdots\\ &= 0.9238456.\end{aligned}$$

مطلوبہ درستی کی ضمانت کے لیے ہمیں ارکان کی کافی تعداد کو لینا چاہیے کیوں کہ مندرجہ بالا میں آخری رکن کے پانچویں اعشاری مقام پر صفر ہے اور ہر آنے والا رکن جسامت میں بہت تیزی سے گھٹ رہا ہے اس لیے مزید ارکان ہمارے نتیجے پر اثر انداز نہ ہوں گے یعنی

$(1.02)^{-4} = 0.9238$ چار ملحوظ ہندسوں تک صحیح۔

مساوات (11-12) کے پھیلاؤ کا ایک مزید قابل توجہ نتیجہ اُس وقت واقع ہوتا ہے جبکہ $n = \frac{1}{2}$ کے۔ ہمیں حاصل ہوگا

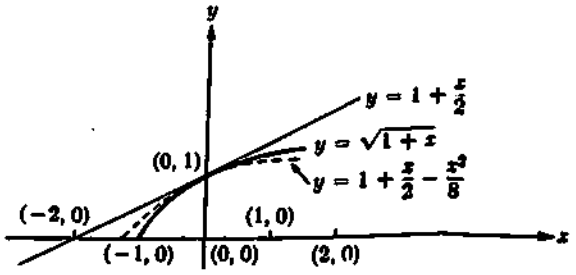
$$(1 + x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})}{2!}x^2 + \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{3!}x^3 + \cdots$$

$$= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + \cdots \qquad (11\text{-}13)$$

شکل 11-3 میں ہم دیکھتے ہیں $y = (1 + x)^{1/2}$ کا گراف، اُس کے اوپر $y = 1 + x/2$ (دو ارکان تک تقریب) کا گراف اور اس کے نیچے $y = 1 + (x/2) - (x^2/8)$ (تین ارکان سے تقریب) کا گراف نوٹ کریں کہ دونوں منحنی حقیقی پھیلاؤ کے کتنے قریب ہیں۔ یہ خاص طور سے x کی اُن قیمتوں کے لیے صحیح ہے جو صفر کے قریب ہیں مثلاً اگر $x = 0.21$ تو y کی درست قیمت ہوگی

$y = (1 + 0.21)^{1/2} = \sqrt{1.21} = 1.1$ تخمینے ہوں گے

$$y \approx 1 + \frac{0.21}{2} = 1.105,^*$$



شکل 11-3

* ≈ علامت کو تقریباً برابر کے معنوں میں رائج کیا جا رہا ہے۔

اور $$y \approx 1 + \frac{0.21}{2} - \frac{(0.21)^2}{8} = 1.09949.$$

یہی ضابطہ اُن قیمتوں کے جذرالمربع نکالنے کے کام میں لیا جاسکتا ہے جو صفر کے قریب نہ ہوں بشرطیکہ یہ خیال رکھا جائے کہ سوال کو اسی کی شکل میں لے آیا جائے۔

مثال 2 : $\sqrt{15}$ کی قیمت چار ملحوظ ہندسوں تک صحیح نکالو۔

حل : ہم مساوات (11-13) کے ضابطہ کا استعمال کرتے ہیں۔

$$\sqrt{15} = \sqrt{16-1} = (16-1)^{1/2} = [16(1-\tfrac{1}{16})]^{1/2} = 4(1-\tfrac{1}{16})^{1/2}$$

$$= 4\left[1 + \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{16}\right) + \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})}{2!}\left(-\frac{1}{16}\right)^2 + \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{3!}\left(-\frac{1}{16}\right)^3 + \cdots\right]$$

$$= 4[1 - \tfrac{1}{32} - \tfrac{1}{2048} - \tfrac{3}{65536} \cdots]$$

$$= 4[1 - 0.03125 - 0.000488 - 0.000015 \ldots]$$

$$= 3.8730,$$ چار ملحوظ ہندسوں تک صحیح

خطی تقرب کے استعمال سے ہمیں تھوڑے ہی کام کرنے سے بہت ہی قریبی تقرب حاصل ہوگا :

$$\sqrt{15} = \sqrt{16-1} = 4[1-\tfrac{1}{16}]^{1/2} \approx 4[1-\tfrac{1}{32}] = 3.875.$$

سوالات

مندرجہ ذیل ہر عبارت کے پھیلاؤ کے پہلے چار ارکان نکالو :

1. $\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$
2. $\sqrt{1+x}$
3. $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$
4. $(1+x)^{1/x}$

مندرجہ ذیل میں سے ہر ایک کو چار ملحوظ ہندسوں تک حساب لگاؤ :

5. $(1.01)^{-2}$
6. $(1.03)^{-5}$
7. $\sqrt[4]{1.02}$
8. $\sqrt{1.05}$
9. $\sqrt{33}$
10. $\sqrt[4]{17}$
11. $\sqrt[3]{120}$
12. $(1.01)^{10}$
13. سوال 9 تا 11 میں قیمت نکالنے کے لیے موزوں خطی تقرب کا استعمال کرو۔

باب 12

ریاضیاتی استقرا

12-1. **ریاضیاتی استقرا** : ریاضی میں ثابت کرنے کا ایک اہم ترین طریقہ ریاضیاتی استقرا ہے۔ یہ نام نامبارک ہے کیوں کہ لفظِ استقرا کو ہم استقرائی استدلال سے متعلق کر سکتے ہیں جس میں بہت سے مخصوص حالات کو لے کر ایک نتیجہ اخذ کیا جاتا ہے۔ استقرائی منطقی عمل سے کسی خاص نتیجے پر نہیں پہنچ سکتے۔ درحقیقت ریاضیاتی استقرا اپنی فطرت میں استنباطی ہے کیوں کہ یہ ہمیں ٹھوس نتیجے پر پہنچاتا ہے۔ کیوں کہ یہ ہمارے کام میں آنے والے بہت سے اہم نتائج کو ثابت کرنے کا ایک آسان طریقہ ہے۔ اس لیے ہم اس طریقے کو کچھ تفصیل سے زیرِ بحث لائیں گے۔ یہ عام طور سے ایسے بیانات کی صداقت کو ثابت کرنے کے لیے استعمال ہوتا ہے جس میں n کی قیمت تمام مثبت اعداد صحیح پر محیط ہے۔

آئیے اس ثبوت کے طریقے کو تمثیل کے طور پر پیش کریں۔ مان لو کہ ہمارے پاس ایک معمولی ایسی سیڑھی ہے جس میں لامتناہی سیڑھیاں ہیں اور ہم یہ ثابت کرنا چاہتے ہیں کہ ہم ان پر کسی بھی موسومہ سیڑھی تک چڑھ سکتے ہیں۔ ہم ایسا تبھی کر سکتے ہیں جبکہ ہمیں دو باتیں معلوم ہوں :

(a) کہ ہم پہلی سیڑھی پر چڑھ سکتے ہیں

(b) اور اگر ہم کسی بھی سیڑھی پر ہوں تو اُس سے اگلی والی سیڑھی پر بھی چڑھ سکتے ہیں۔

(a) کی وجہ سے ہم جانتے ہیں کہ ہم پہلی سیڑھی پر چڑھ سکتے ہیں اس بات کو جان کر اور حصہ (b) میں بیان کی گئی بات کے علم سے ہمیں معلوم ہے کہ ہم دوسری سیڑھی پر چڑھ جائیں گے۔ دوبارہ اس حقیقت کے علم سے اور حصہ (b) کے عام بیان سے ہم جانتے ہیں کہ ہم تیسری سیڑھی پر بھی چڑھ جائیں گے وغیرہ۔

کسی معمولی جوڑنے والی یا شمار کنندہ مشین پر کسی عدد کا جذر المربع معلوم کرنے کے طریقوں میں سے ایک طریقہ اس بات پر منحصر ہے کہ n طاق اعداد صحیح کا جوڑ n^2 ہوتا ہے۔ خصوصی طور پر

$$1 = 1 = 1^2,$$
$$1 + 3 = 4 = 2^2,$$
$$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2,$$
$$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2.$$

یہ خصوصیت تمام اعداد صحیح پر صادق ہے اور ثابت کرنا مشکل نہیں ہے۔

مثال 1 : ریاضیاتی استقرا سے تمام مثبت اعداد صحیح قیمتوں کے لیے ثابت کرو کہ

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) \equiv n^2.$$

حل : حصّہ (a) : **کسی مخصوص قیمت کے لیے تصدیق** : ہم یہ $n = 1, 2, 3, 4$ کے لیے کر چکے ہیں حالانکہ تصدیق صرف ایک قیمت کے لیے ضروری ہے۔

حصّہ (b) : **استقرائی خصوصیت** : اگر دیا ہوا بیان $n = k$ کے لیے صادق ہے جہاں k ظاہر کرتا ہے n کی کوئی سی بھی قیمت تو ہم یہ ثابت کرنا چاہتے ہیں کہ یہ $n = k + 1$ کے لیے بھی صادق ہوگا پس ہم یہ مان لیتے ہیں کہ یہ بات ہم $n = k$ کے لیے جانتے ہیں یعنی

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) \equiv k^2.$$

دونوں طرف $(2k + 1)$ جوڑنے سے ہمیں حاصل ہوگا

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) + (2k + 1) \equiv k^2 + (2k + 1)$$
$$\equiv (k + 1)^2.$$

یہی ٹھیک وہ مساوات ہے جو $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) \equiv n^2$ $n = k + 1$ کے لیے بیان کی گئی ہے۔ اس طرح (b) کا ثبوت مکمل ہوگیا۔

حصّہ (c) : **نتیجہ** : ہم جانتے ہیں کہ مساوات n کی قیمت 1، 2، 3 اور 4 کے لیے صحیح ہے کیوں کہ $n = 4$ کے لیے صحیح ہے اور کیوں کہ حصّہ (b) کے بیان کو ثابت کر چکے ہیں تو ہم جانتے ہیں کہ اصل مساوات $n = 4 + 1 = 5$ کے لیے بھی صادق ہے اور کیوں کہ یہ $n = 5$ کے لیے صادق ہے $n = 6$ کے لیے بھی صادق ہوگا۔ ہم اسی طرح n کی تمام مثبت اعداد صحیح قیمتوں کے لیے نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں۔

ہم نے دیکھا کہ ریاضیاتی استقرا سے ثابت کرنے میں تین حصّے ہوتے ہیں :

حصّہ (a) : مسئلہ یا بیان کی صداقت کی **تصدیق** n کی اُس چھوٹی سے چھوٹی صحیح قیمت کے لیے جس کے لیے مسئلہ کو صادق ثابت کرنا ہے (یہ اس بات کے مترادف ہے جیسا کہ سیڑھی کے پہلے زینے پر چڑھنا)۔

حصّہ (b) : **استقرائی خصوصیت کا ثبوت** : اگر بیان یا مسئلہ $n = k$ کے لیے صادق ہے جہاں k، n کی کسی بھی قیمت کی نمائندگی کرتا ہے تو یہ $n = k + 1$ کے لیے بھی صادق ہوگا (یہ اس بات کے مترادف ہے جیسا کہ سیڑھی کے کسی زینے سے اگلے زینے پر چڑھنا)۔

حصّہ (c) : **نتیجہ** : بیان یا مسئلہ n کی اُن تمام اعداد صحیح قیمتوں کے لیے صادق ہے جو برابر ہوں یا بڑی ہوں اُن قیمتوں سے جن کے لیے حصّہ (a) میں تصدیق کی جا چکی ہے۔

ہم جانتے ہیں کہ $x - y$ جزو ضربی ہے $x^2 - y^2$، $x - y$ اور $x^3 - y^3$ کا۔ کیا یہ n کی کسی مثبت اعداد صحیح قیمتوں کے لیے $x^n - y^n$ کا جزو ضربی ہے؟

مثال 2 : ریاضیاتی استقرا سے n کی تمام مثبت اعداد صحیح قیمتوں کے لیے ثابت کرو کہ $x^n - y^n$، $x - y$ سے تقسیم پذیر ہے۔

حل : **حصّہ (a)**: $x^n - y^n$، $n = 1$ سے $x - y$ ہو جائے گا جو کہ واضح طور پر $x - y$ سے تقسیم پذیر ہے۔ جب $n = 2$ ہو تو $x^2 - y^2 \equiv (x + y)(x - y)$ جو پھر $x - y$ سے تقسیم ہو جائے گا۔

حصّہ (b) : مان لیں کہ $x^k - y^k$ تقسیم ہو جائے گا $x - y$ سے۔ اس مفروضہ سے ہم یہ ثابت کریں کہ $x^{k+1} - y^{k+1}$ بھی تقسیم ہو جائے گا $x - y$ سے۔ اگر ہم xy^k کو $x^{k+1} - y^{k+1}$ میں جوڑ اور تفریق کر دیں تو حاصل ہوگا

$$x^{k+1} - y^{k+1} \equiv x^{k+1} - xy^k + xy^k - y^{k+1}$$

$$\equiv x(x^k - y^k) + y^k(x - y).$$

کیوں کہ اس متماثل کی دائیں طرف کا ہر رکن $x - y$ سے تقسیم ہو جاتا ہے۔ دایاں اور اسی لیے بایاں ممبر بھی $x - y$ سے تقسیم ہوگا۔ یہ حصّہ (b) کو مکمل کر دیتا ہے۔

حصّہ (c) : ہم جانتے ہیں کہ مسئلہ $n = 1$، 2 کے لیے صادق ہے کیوں کہ یہ $n = 2$ کے لیے

صادق ہے (b) کی رو سے یہ $n = 2 + 1 = 3$ کے لیے بھی صادق ہوگا۔ اسی قسم کے دلائل کا n کی تمام مثبت اعداد صحیح والی قیمتوں پر اطلاق ہوتا ہے۔

اس بات پر زور دینا چاہیے کہ مکمل ثبوت کے لیے حصّہ (a) اور (b) دونوں ہی ضروری ہیں۔ مندرجہ ذیل مثالوں پر غور کرو۔

مثال 3 : دفعہ 1–4 میں ہم نے اعدادِ مفرد پر غور کیا۔ کیا یہ عبارت $n^2 - n + 11$، n کی تمام مثبت قیمتوں کے لیے عدد مفرد کی نمائندگی کرتی ہے؟ n کی 1، 2، 3، 4 اور 5 قیمتوں کے لیے ہمیں اعدادِ مفرد 11، 13، 17، 23 اور 31 حاصل ہوں گے۔ حصّہ (a) ہمارے بیان کے لیے یقینی طور پر مطمئن ہوگیا۔ تاہم یہ ثابت کرنے کے لیے کہ یہ بیان صادق نہیں ہے مان لو کہ $n = 11$ اور ہمیں حاصل ہوگا $11^2 - 11 + 11 = 11^2$ جو کہ عدد مفرد نہیں ہے۔

مثال 4 : فرض کرو کہ ہفت اعداد صحیح کے لیے غیر صادق بیان

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n^2 + n + 1$$

$n = k$ کے لیے صادق ہوگا۔ $n = k + 1$ کے لیے دیے ہوئے بنیادی مفروضہ سے اب اپنے بیان کی صداقت کو ثابت کر سکتے ہیں۔ ہمیں دیا ہوا ہے

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 2k = k^2 + k + 1.$$

اس مساوات کے دونوں طرف $2k + 2$ جوڑ کر ہمیں حاصل ہوگا

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 2k + 2k + 2 = k^2 + k + 1 + 2k + 2$$
$$= k^2 + 2k + 1 + k + 1 + 1 = (k + 1)^2 + (k + 1) + 1.$$

اس طرح اگر بیان $n = k$ کے لیے صادق ہے تو $n = k + 1$ کے لیے بھی صادق ہے اور حصّہ (b) ثابت ہوگیا۔ تاہم یہ ظاہر ہے کہ حصّہ (a) اور اسی لیے بیان خود بھی صادق نہیں ہے کیوں کہ اسی حالت کو n کی 1، 2 یا 3 کے لیے غور کرو تو ہمیں لگاتار حاصل ہوگا $3 = 2$، $6 = 7$ یا $12 = 13$

ہمیں اس بات کی اہمیت کو نمایاں کرنا چاہیے کہ ایسی مساوات جس کے صادق ہونے کا علم ہو کے دونوں طرف ایک ہی رقم جوڑے بغیر بھی ریاضیاتی استقرا سے بہت سے ثبوت ممکن ہیں (مثال نمبر 1 میں یہی طریقہ اختیار کیا گیا تھا)۔

سوالات

ریاضیاتی استقرا کی مدد سے ثابت کرو کہ مندرجہ ذیل n کی تمام مثبت اعداد صحیح قیمتوں کے لیے صادق ہیں:

.1 $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

.2 $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n+1)$

.3 $4 + 8 + 12 + \cdots + 4n = 2n(n+1)$

.4 $1 + 4 + 7 + \cdots + (3n-2) = \frac{n(3n-1)}{2}$

.5 $1 + 3 + 6 + \cdots \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

.6 $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

.7 $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$

.8 $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$

.9 $2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 2$

.10 $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

.11 $1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2 - 1)$

.12 $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

.13 $1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \cdots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

.14 $1\cdot 2 + 3\cdot 4 + 5\cdot 6 + \cdots + (2n-1)(2n) = \frac{n(n+1)(4n-1)}{3}$

.15 $1\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 4 + 3\cdot 4\cdot 5 + \cdots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

.16* $t_1 + t_1 r + t_1 r^2 + \cdots + t_1 r^{n-1} = \frac{t_1 - t_1 r^n}{1 - r}$

.17* $t_1 + (t_1 + d) + (t_1 + 2d) + \cdots + t_1 + (n-1)d = \frac{n[2t_1 + (n-1)d]}{2}$

.18 $x^{2n} - y^{2n}$ ، $x - y$ سے تقسیم ہوتا ہے۔

19. $x^{2n-1} + y^{2n-1}$ تقسیم پذیر ہے $x + y$ سے۔

20. $n^3 + 2n$ تقسیم پذیر ہے 3 سے۔

21. اگر $a > -1$ تو $(a+1)^n \geq 1 + na$

22. $\sin(\theta + n\pi) = (-1)^n \sin\theta$

23. $\cos(\theta + n\pi) = (-1)^n \cos\theta$

24. اگر n مثبت طاق عدد صحیح ہو تو $n(n^2-1)$ تقسیم پذیر ہوگا 24 سے،

25. $10^n + 3 \cdot 4^{n+2} + 5$ منقسم ہوگا 9 سے۔

26. $2n \leq 2^n$

27. $2^{n-1} \leq n!$

28* مساوات (4-6) کی تعمیم کو ریاضیاتی استقرا کی مدد سے ثابت کرو یعنی کہ کسی بھی الجبرائی جوڑ میں ایک مقررہ تعداد ارکان کے لیے

$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|.$$

مندرجہ ذیل کو ریاضیاتی استقرا سے ثابت کرو:

29. $$\sin\theta + \sin 2\theta + \cdots + \sin n\theta \equiv \frac{\sin \frac{1}{2}(n+1)\theta \sin \frac{1}{2}n\theta}{\sin \theta/2}$$

30. $$\cos\theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos n\theta \equiv \frac{\cos \frac{1}{2}(n+1)\theta \sin \frac{1}{2}n\theta}{\sin \theta/2}$$

31. $$\sin\theta + \sin 3\theta + \cdots + \sin(2n-1)\theta \equiv \frac{\sin^2 n\theta}{\sin\theta}$$

32. $$\cos\theta + \cos 3\theta + \cdots + \cos(2n-1)\theta \equiv \frac{\sin 2n\theta}{2\sin\theta}$$

33. ریاضی کے بہت سے حلقہ عمل میں تکراری ضابطے کارآمد ہوتے ہیں۔ ایسا ہی ایک ضابطہ کسی بھی عدد صحیح n کے لیے اگر $\sin t$ اور $\cos t$ معلوم ہوں تو $\sin nt$ کی قیمت دریافت کرنا ممکن بنا دیتا ہے۔ اگر $u_0 = 0$، $u_1 = 1$ اور $n = 2, 3, \ldots$ کے لیے $u_n = (2\cos t)u_{n-1} - u_{n-2}$ تو ثابت کرو کہ $n = 0, 1, 2, \ldots$ کے لیے $u_n = \sin nt / \sin t$

34. u_n کی اُن ہی قیمتوں کے لیے جو سوال 33 میں دی گئی ہیں ثابت کرو کہ $(\cos t)u_n - u_{n-1} = \cos nt$ جہاں $n = 0$، 1، 2 وغیرہ۔ اس ضابطہ کی مدد

سے ہم $\cos nt$ کی قیمت معلوم کر سکتے ہیں۔ اگر $\sin t$ اور $\cos t$ معلوم ہو۔ اس عمل کی تکراری فطرت کی بنیاد پر ہم ان ضابطوں کو اُن کاموں کے لیے استعمال کرتے ہیں جن میں تیز رفتار شمار کنندہ مشینوں کا استعمال ہوتا ہے۔

35. اس سوال کو حل کرنے کے لیے بہت سے قطعی مختلف اور اہم مفروضات استعمال کرنا چاہئیں۔ حل کا طریقہ اس بات کی صراحت کرتا ہے کہ ایک نتیجہ حاصل کرنے کے لیے اکثر بہت سے نظریات کا استعمال کرنا پڑتا ہے۔ ہم اُن فیبوناکسی (Fibonacci) اعداد پر غور کریں جن کی تعریف n کی $2, 3, 4, \ldots$ قیمتوں کے لیے تکراری ضابطہ $u_0 = 0$ ، $u_1 = 1$ اور $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ سے ہوتی ہے۔ براہِ راست حساب لگانے u_n کا تسلسل ہوگا

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$$

(a) حاصل قسمت حاصل کرو : $u_1/u_2, u_3/u_4, u_5/u_6, u_7/u_8$

(b) یہ حاصل قسمت بھی بناؤ : $u_2/u_3, u_4/u_5, u_6/u_7, u_8/u_9$

(c) تصدیق کرو کہ (a) کے حاصل قسمت جسامت میں گھٹتے جاتے ہیں اور یہ کہ حصہ (b) کے حاصل قسمت بڑھتے جاتے ہیں اور حاصل قسمت کے دونوں ہی گروپ 0.625 اور 0.615 کی درمیانی "کسی قیمت کے قرب" پہنچتے معلوم ہوتے ہیں۔

(d) استقرا سے ثابت کرو: $u_1/u_2 > u_3/u_4 > \cdots > u_{2n-1}/u_{2n} > u_{2n+1}/u_{2n+2} \cdots$

$\{u_{2n-1}/u_{2n}\}$ کو ہم گھٹتا تسلسل کہتے ہیں۔

(e) استقرا سے ثابت کرو کہ $u_2/u_3 < u_4/u_5 < \cdots < u_{2n}/u_{2n+1} < u_{2n+2}/u_{2n+3} \cdots$

$\{u_{2n}/u_{2n+1}\}$ کو ہم بڑھتا تسلسل کہتے ہیں۔

(f) ثابت کرو کہ اگر m اور n مثبت اعداد صحیح ہوں تو: $u_{2n-1}/u_{2n} > u_{2m}/u_{2m+1}$

پس سٹ $\{u_{2n-1}/u_{2n}\}$ زیریں طور پر محدود ہے تاکہ تکمیلی خصوصیت (دفعہ 3-4) سے اس سٹ کی ایک اعظم زیریں حد G موجود ہے۔ اسی طرح سٹ $\{u_{2n}/u_{2n+1}\}$ بالائی طور پر محدود ہے تاکہ اس سٹ کی ایک کمترین بالائی حد L موجود ہے۔

(g) ثابت کرو کہ جب n کافی بڑا ہو تو عبارت

$$\left|\frac{u_{2n-1}}{u_{2n}} - \frac{u_{2n}}{u_{2n+1}}\right| = \left|\frac{u_{2n+1}u_{2n-1} - u_{2n}^2}{u_{2n+1}u_{2n}}\right|$$

کو اپنی مرضی کے مطابق چھوٹا بنا سکتے ہیں۔

[اشارہ : ثابت کرو کہ (1) n کے بڑھنے کے ساتھ ساتھ نسب نما بھی بڑھتا ہے اور (2) تمام مثبت اعداد صحیح n کے لیے $u_{2n+1}u_{2n-1} - u_{2n}^2 = 1$ (استقرا استعمال کرو)۔ (f) اور (g) کے نتیجے کے طور پر ہمیں معلوم ہے کہ G جو $\{u_{2n-1}/u_{2n}\}$ کی اعظم زیریں حد ہے۔ $\{u_{2n}/u_{2n+1}\}$ کی کمترین زیریں حد L کے برابر ہوگی۔ فرض کرو کہ ہم اس قیمت کو x سے ظاہر کرتے ہیں تاکہ $G = L = x$ اس کے علاوہ n کی کافی بڑی قیمت کے لیے ان دونوں سٹوں کے ایسے عناصر موجود ہیں جو x کو مستبدانہ طور پر قریب ہیں۔]

(h) اگر ہم اصل تعریفی تکراری ضابطہ $u_{2n+1} = u_{2n} + u_{2n-1}$ کو u_{2n} سے تقسیم دیں تو ہمیں حاصل ہوگا

$$\frac{u_{2n+1}}{u_{2n}} = 1 + \frac{u_{2n-1}}{u_{2n}} \quad \text{یا} \quad \frac{1}{\frac{u_{2n}}{u_{2n+1}}} = 1 + \frac{u_{2n-1}}{u_{2n}}.$$

کافی بڑے n کے لیے ہم اس مساوات میں u_{2n}/u_{2n+1} اور u_{2n-1}/u_{2n} کی جگہ x بدل کر قریب لا سکتے ہیں تاکہ $1/x = 1 + x$ یا $x^2 + x - 1 = 0$ اس مساوات کو x کی مثبت قیمت کے لیے حل کرو (ہم مثبت قیمت ہی کیوں لینا چاہتے ہیں؟)۔ اور اس طرح ثابت کرو کہ :

$$x = G = L = (-1 + \sqrt{5})/2 = .618 \text{ (تقریباً)}$$

[یاد کرو مساوات (6-19) اور دفعہ 9-7 کا سوال 24]

12-2 . دوڑ کنی مسئلہ کا متبادل ثبوت : دوڑ کنی مسئلہ کو ریاضیاتی استقرا سے ثابت کرنا عین ممکن ہے۔ ثبوت ذیل میں درج ہے اور الجبرا کے ساتھ ایک مخصوص قسم کی آسانی پر مشتمل ہے۔ ہم اس کو ریاضیاتی استقرا کے ذریعے ثابت کرنے کی اہمیت پر زور دینے کے لیے اور استقرا کی مدد سے ایک اور ایسے اہم ثبوت کی تمثیل پیش کرنے کے لیے جس میں کہ ایسی مساوات جو صادق ہو کے طرفین میں ایک ہی عبارت جوڑنے کے عمل پر مشتمل نہیں ہے۔ دے رہے ہیں۔

مسئلہ 12-1 : کسی بھی مثبت عدد صحیح n کے لیے

$$(a+b)^n \equiv a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{n-3}b^3 + \cdots + b^n. \quad (12\text{-}1)$$

ثبوت :- ہم مساوات (11-11) میں r - ویں رکن کی عمومی عبارت دُہرائیں :

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+2)}{(r-1)!}a^{n-r+1}b^{r-1} \quad (12\text{-}2)$$

اب ہم یہ ثابت کرنے کے لیے تیار ہیں کہ مساوات (12-1) n کی تمام مثبت اعدادِ صحیح قیمتوں کے لیے صادق ہے کیوں کہ ہم دفعہ 4-11 میں n کی قیمتوں 1 ، 2 ، 3 اور 4 کے لیے تصدیق کر چکے ہیں۔ اب ہم کو صرف یہ فرض کرنے کی ضرورت ہے کہ یہ $n = k$ کے لیے صادق ہے یعنی

$$(a+b)^k \equiv a^k + ka^{k-1}b + \frac{k(k-1)}{2!}a^{k-2}b^2 + \cdots + \frac{k(k-1)(k-2)\cdots(k-r+2)}{(r-1)!}a^{k-r+1}b^{r-1} + \cdots + b^k, \quad (12\text{-}3)$$

اور اب اس سے ثابت کریں کہ یہ $n = k+1$ کے لیے بھی صادق ہے۔ یا

$$(a+b)^{k+1} \equiv a^{k+1} + (k+1)a^k b + \frac{(k+1)k}{2!}a^{k-1}b^2 + \cdots + \frac{(k+1)(k)(k-1)\cdots(k-r+3)}{(r-1)!}a^{k-r+2}b^{r-1} + \cdots + b^{k+1}. \quad (12\text{-}4)$$

اگر ہم متماثل (12-3) کے دونوں ممبروں کو $(a+b)$ سے ضرب دے دیں تو حاصل ہوگا

$$(a+b)^{k+1} \equiv a^{k+1} + ka^k b + \cdots \frac{k(k-1)\cdots(k-r+2)}{(r-1)!}a^{k-r+2}b^{r-1} + \cdots + ab^k + a^k b + \cdots + \frac{k(k-1)\cdots(k-r+3)}{(r-2)!}a^{k-r+2}b^{r-1} + \cdots + kab^k + b^{k+1}.$$

ab^k سے آگے تمام ارکان مساوات (12-3) کی دائیں طرف کی جو a سے ضرب دی گئی ہے، نمائندگی

کرتی ہے۔ اور باقی ماندہ ارکان سیدھے طرف کی جو b سے ضرب دی گئی ہیں اُن کو ظاہر کرتی ہیں۔ آخر میں r - ویں رکن حاصل کرنے کے لیے دائیں ہاتھ کے اوّل نصف کی r - ویں رکن اور دوسرے نصف کی $(r-1)$ ویں رکن رکھی کیوں کہ دونوں ہی $a^{k-r+2}b^{r-1}$ ہے۔ اگر ہم پورے دائیں ممبر کو مختصر کریں تو $a^{k-r+2}b^{r-1}$ کا کُل ضریب ہوگا

$$\frac{k(k-1)\cdots(k-r+2)}{(r-1)!}+\frac{k(k-1)\cdots(k-r+3)}{(r-2)!}$$

$$=\frac{k(k-1)\cdots(k-r+3)}{(r-1)!}(k-r+2)$$

$$+\frac{k(k-1)\cdots(k-r+3)}{(r-1)(r-2)!}(r-1)$$

$$=\frac{k(k-1)\cdots(k-r+3)}{(r-1)!}[(k-r+2)+(r-1)]$$

$$=\frac{(k+1)k(k-1)\cdots(k-r+3)}{(r-1)!}\ *$$

اس طرح کل دائیں طرف ٹھیک ٹھیک مساوات (4–12) کی دائیں طرف کے برابر ہے۔ نتیجہ یعنی حصّہ (c) واضح ہوجانا چاہیے اور ثبوت مکمّل ہوگیا۔

---

* یہ نوٹ کرنا باعث دلچسپی ہوگا کہ ہم $C(k,r-1)$ اور $C(k,r-2)$ کو جوڑا ہے اور دفعہ 3–11 کے سوال 20 سے اسی جواب $C(k+1,r-1)$ کی اُمید تھی۔

باب 13

قوّت نُما اور لوگارتمی تفاعل

ہم نے الجبرائی تفاعل اور ایک قسم کے عُلوی تفاعل یعنی دائری تفاعل پر کافی تفصیل سے بحث کی ہے۔ دائری تفاعل کے معکوس تفاعل بھی زیرِ بحث آئے تھے۔ دو اور دوسرے اہم علوی تفاعل ہیں : تفاعل قوّت نما اور اُس کا معکوس، اور لوگارتمی تفاعل۔ اس باب میں ہم ان دونوں تفاعل، ان کی خصوصیات اور ان کے آسان استعمال کی تحقیق کریں گے۔

13-1. قوّت نما تفاعل a^x : اس سے قبل کہ ہم ایک قوّت نما تفاعل کی تعریف کریں ہم کو a^x کی تعریف کرنا چاہیے جس میں a کوئی مثبت حقیقی عدد ہے اور x کوئی بھی حقیقی عدد۔ یہ ہم (دفعہ 3-4) تکمیلی خصوصیت کی مدد سے کر سکتے ہیں مثلاً ہم $\sqrt{2}$ کے ناطق تقریبات کے سٹ کو یاد کریں۔ کیونکہ یہ سٹ $A = \{1, 1.4, 1.41, 1.414 \ldots\}$ بالائی طور پر محدود ہے اس کی ایک کمترین بالائی حد ہوگی جسے ہم $\sqrt{2}$ کہتے ہیں۔ اگر ہم $5^{\sqrt{2}}$ کی تعریف کرنا چاہیں تو ہم اس سٹ $\{5^1, 5^{1.4}, 5^{1.41}, \ldots\}$ پر غور کریں جو کہ بالائی طور پر محدود ہے۔ اس کی کمترین بالائی حد ہوگی (تقریباً) $5^{\sqrt{2}} = 9.738$ اور بہت واضح ہے کیوں کہ 5^r جہاں r ناطق ہو قطعی واضح ہے۔

ہماری عمومی تعریف اس کی مشابہ ہے۔ مان لو کہ $S = \{a^r | r \leq x, r \in F\}$ جس میں $a \in R$، $a > 1$ اور $x \in R$ یہ واضح رہے کہ S بالائی طور پر محدود ہے کسی بھی $n \in I$ جس میں $n > x$ ، $n > r$ تاکہ $a^n > a^r$ (دفعہ 4-1 سوال 6) کیوں کہ کسی بھی x کے لیے ایک عدد صحیح n ایسا ہمیشہ موجود ہوتا ہے کہ a^n ، S کی بالائی حد ہے۔ اس طرح از روئے

تکمیلی خصوصیت S کی ایک کمترین بالائی حد ہے اور ہم a^x کی تعریف ان شرائط کے تحت کر سکتے ہیں۔

تعریف 13-1 : a پر غور کرو جبکہ $x \in R$ اور $a > 0$

(1) اگر $a > 1$ تو a^x کمترین بالائی حد ہوگی $\{a^r | r \leq x, r \in F\}$ کی

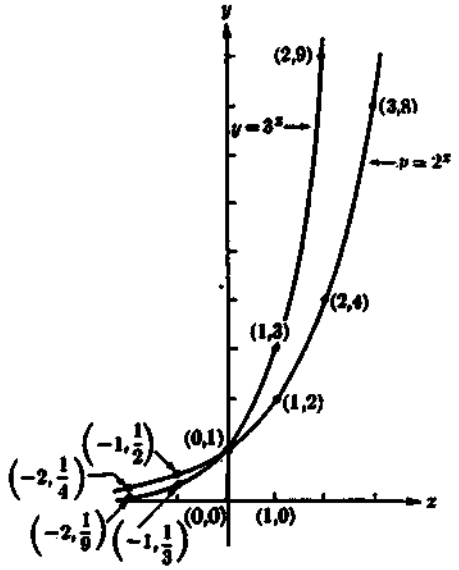
(2) اگر $a = 1$ ، $a^x = 1$

(3) اگر $a < 1$، $1/a > 1$ تب $a^x = 1/(1/a)^x$

کیوں کہ a^x کی تعریف اگرچہ $x \in F$ پہلے ہی کی جا چکی ہے (دفعہ 3-10)۔ اب ہم نے a^x کی اور x کی تمام حقیقی قیمتوں کے لیے اگر $a > 0$ کی تعریف کر دی۔ حالانکہ یہاں یہ ثابت نہیں کیا جائے گا مگر یہ ثابت کرنا ممکن ہے کہ حقیقی قوت نماؤں کی یہ تعریفیں قوت نماؤں کے تمام کلیوں کی تعمیل کرتے ہیں۔ ناطق یا غیر ناطق کسی بھی حقیقی قوت نماؤں کے معنی کے اس فہم کے ساتھ ہمیں آسان ترین قوت نما تفاعل f کو مندرجہ ذیل طریقے سے زیر غور لانا چاہیے :

$$f: x \to a^x, \quad a > 0 \tag{13-1}$$

جس کا علاقہ R ہے۔ اس کی تعریفی مساوات اس لیے ہے $y = f(x) = a^x$



شکل 13-1

اب ہم اس قسم کے تفاعل $y = 2^x$ اور $y = 3^x$ کی دو مخصوص حالتوں کے گرافوں کی پڑتال کریں۔ یہ گراف اُن نقاط کو پلاٹ کر کے کھینچے گئے ہیں جن کے محصات ان مساوات (شکل 13-1) کو مطمئن کرتے ہیں۔

x	-2	-1	0	1	2	3
y	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

$y = 2^x$

x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9

$y = 3^x$

تفاعل کی مندرجہ ذیل خصوصیات جس کی تعریف مساوات $y = a^x$ ہے گرافوں سے واضح ہونا چاہیے:

(1) تفاعل مثبت ہے (اس کا گراف x-محور کے اوپر واقع ہے) x کی تمام قیمتوں کے لیے۔

(2) اگر $a > 1$ تو تفاعل بڑھتا ہوا تفاعل کہلاتا ہے۔ x جیسے جیسے بڑی سی بڑی قیمت لیتا جاتا ہے تو تفاعل بھی بڑھتا ہے اور x جیسے جیسے الجبرائی طور پر گھٹتا جاتا ہے تو تفاعل صفر کے قریب تر آجاتا ہے لیکن صفر کبھی نہیں ہوتا۔

(3) a کی تمام قیمتوں کے لیے جب $x = 0$ تو تفاعل کی قیمت 1 ہوگی۔

(4) تفاعل کے کوئی صفر نہیں ہیں۔

سوالات

سوال 1 سے 6 تک کے تفاعلوں کے گراف کھینچو:

1. 4^x 2. 10^x 3. 2^{-x} 4. $(\frac{1}{2})^x$ 5. 3^{-x} 6. $(\frac{1}{3})^x$

7. اُس تفاعل کے لیے جس کی تعریفی مساوات $y = a^x$ ہو۔ اگر $0 < a < 1$ تو خصوصیت نمبر 2 کے مطابق اس کی ایک خصوصیت بیان کرو۔

13-2. **سلسلۂ جیومیٹریہ**: اپنی توجہ (دفعہ 2-7) کی طرف مبذول کریں کہ تسلسل ایک سعت ہے یا تفاعل کی تفاعلی قیمتیں ہیں جس کا علاقہ مثبت اعداد صحیح کا کُل سٹ یا اُس کا کوئی حصّہ ہے۔ اب ہم سلسلۂ جیومیٹریہ کی تعریف قوت نما تفاعل a^x کی مدد سے کر سکتے ہیں۔

تعریف 13-2: سلسلۂ جیومیٹریہ وہ تسلسل ہے جس میں اوّل رکن کے بعد ہر رکن ماقبل

رکن کو ایک ایسے مستقل عدد سے ضرب دینے سے حاصل ہوتا ہے جسے نسبت مشترک کہتے ہیں۔

متبادل تعریف 13-2 : سلسلۂ جیومیٹریہ وہ کوئی بھی تسلسل ہے جس کی تعریفی تفاعل میں ka^n قسم کی مساوات ہوتی ہے جہاں n ایک مفرد مساوات ہے میں (اس دفعہ کے سوال 2b کو دیکھو)۔

تمثیل 1 : تسلسل $2, 4, 8, \ldots, 2^n$ ایک ایسا سلسلۂ جیومیٹریہ ہے جس کی نسبت مشترک 2 ہے۔ اس تسلسل کی تعریفی تفاعل ہے $f: x \to 2^x$

تمثیل 2 : تسلسل $3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \ldots$ ایک ایسا سلسلۂ جیومیٹریہ ہے جس کی نسبت مشترک $\frac{1}{3}$ ہے۔ اس کی تعریفی تفاعل ہوگی $f(x) = 3^{2-x}$

سلسلۂ جیومیٹریہ کے لیے مستعمل تعمیمی ترقیم دفعہ 2-7 سے مشابہ ہے :

t_1 اوّل رقم،

r نسبت مشترک،

n تعدادِ ارکان،

t_n آخری یا n ویں رکن۔

کیوں کہ ہر رکن کو نسبت مشترک سے ضرب دینے سے اس کا آنے والا رکن حاصل ہوتا ہے تو سلسلۂ جیومیٹریہ کو اس طرح ظاہر کیا جا سکتا ہے

$$t_1, \quad t_1 r, \quad t_1 r^2, \quad t_1 r^3, \ldots, t_1 r^{n-1}$$

جس میں آخری قیمت n - ویں رکن کے لیے ضابطہ دیتی ہے :

$$\boxed{t_n = t_1 r^{n-1}} \qquad (13\text{-}2)$$

مثال 1 : ذیل کا سلسلۂ جیومیٹریہ کا دسواں رکن نکالو :

$$-8, \quad 4, \quad -2, \ldots$$

حل : $t_1 = -8$ ، $r = -\frac{1}{2}$ اور $n = 10$ کے لیے ہمیں حاصل ہوگا

$$t_{10} = (-8)(-\tfrac{1}{2})^9$$

$$= (-8)(-\tfrac{1}{512}) = \tfrac{1}{64}$$

مثال 2 : اگر ایک سلسلۂ جیومیٹریہ کی آٹھویں رکن 243 ہے اور پانچواں رکن 9 ہے تو پہلے تین ارکان نکالو۔

حل : $n = 8$ کے لیے ہمیں حاصل ہوگا :

$$t_8 = 243 = t_1 r^7,$$

اور $n = 5$ کے لیے :

$$t_5 = 9 = t_1 r^4.$$

اگر ہم پہلی مساوات کے ممبروں کو دوسری مساوات کے ممبروں سے تقسیم دیں تو ہمیں ملے گا :

$$r^3 = 27 \quad \text{یا} \quad r = 3$$

اگر ہم یہ قیمت دوسری مساوات میں r کی جگہ بدل دیں تو حاصل ہوگا

$$9 = t_1(3)^4 \quad \text{یا} \quad 81t_1 = 9$$

$$t_1 = \tfrac{1}{9}$$

اس لیے مطلوبہ سلسلہ کے اوّل تین ارکان ہوں گے $\frac{1}{9}$ ، $\frac{1}{3}$ اور 1 ۔

کسی بھی سلسلۂ جیومیٹریہ کے n ارکان کے جوڑ کی قیمت کے لیے عبارت ہم آسانی سے حاصل کر سکتے ہیں۔ جوڑ کو لکھ کر اور اُس عبارت کو r سے ضرب دے کر حاصل ہوگا :

$$S_n = t_1 + t_1 r + t_1 r^2 + \cdots + t_1 r^{n-2} + t_1 r^{n-1},$$

اور

$$rS_n = t_1 r + t_1 r^2 + \cdots + t_1 r^{n-1} + t_1 r^n.$$

دوسری مساوات کے ممبروں کو پہلی مساوات کے ارکان میں تفریق کرنے سے ہمیں حاصل ہوگا

$$S_n - rS_n = t_1 - t_1 r^n,$$

یا

$$(1 - r)S_n = (1 - r^n)t_1,$$

اور S_n کے لیے حل کر کے

$$S_n = t_1 \frac{1 - r^n}{1 - r} \qquad (\text{جب } r \neq 1)$$

جو کہ مندرجہ ذیل مسئلہ کو ثابت کرتا ہے۔

مسئلہ 13-1 : کسی بھی سلسلۂ جیومیٹریہ کے n ارکان کے جوڑ کا ضابطہ ہوگا :

$$\boxed{S_n = \frac{t_1(1 - r^n)}{1 - r} \quad (r \neq 1),} \tag{13-3}$$

جس میں t_1 اوّل رکن ہے، r نسبت مشترک اور n ارکان کی تعداد*

کیوں کہ آخری یا n - ویں رقم $t_n = t_1 r^{n-1}$ یا $rt_n = t_1 r^n$ ہمیں یہ بھی حاصل ہوگا۔

$$\boxed{S_n = \frac{t_1 - rt_n}{1 - r} \quad (r \neq 1).} \tag{13-4}$$

نوٹ کریں کہ مساوات (13-3) اور (13-4) میں $r \neq 1$. کسی ایسے سلسلۂ جیومیٹریہ کے بارے میں جب $r = 1$ کیا کہا جا سکتا ہے؟

سوالات

ذیل کے ہر ایک سلسلۂ جیومیٹریہ میں اگلے تین ارکان لکھو اور t_n اور S_n نکالو:

1. آٹھ ارکان تک $1, 4, 16, \ldots$
2. نو ارکان تک $27, 9, 3, \ldots$
3. سات ارکان تک $\frac{1}{125}, -\frac{1}{25}, \frac{1}{5}, \ldots$
4. دس ارکان تک $P(1 + r), P(1 + r)^2, P(1 + r)^3, \ldots$

سوال 5 سے 11 تک میں t_1، t_n، r، n اور S_n میں سے ایک سلسلۂ جیومیٹریہ کے کوئی تین عناصر دیے ہوئے ہیں تو ہر سوال میں غیر حاضر عناصر نکالو:

5. $t_1 = 2$، $r = 3$، $n = 6$
6. $t_1 = 2$، $n = 4$، $t_n = 16$
7. $t_1 = 1$، $n = 3$، $S_n = 13$
8. $r = -3$، $n = 5$، $t_n = 162$
9. $r = \frac{1}{3}$، $n = 5$، $S_n = \frac{4}{9}$
10. $t_1 = 3$، $r = \frac{2}{5}$، $S_n = \frac{993}{125}$
11. $t_1 = -2$، $r = 2$، $t_n = -64$

---

* یہ ضابطہ ریاضیاتی استقرا سے بھی ثابت کیا جا سکتا ہے (دفعہ 1-12 کے سوال 16 کو دیکھو)۔

12. k کی ایسی قیمت نکالو تاکہ $2 + 2k$، $5k - 11$ اور $7k - 13$ سلسلۂ جیومیٹریہ میں ہوں۔

13. اُس سلسلۂ جیومیٹریہ کے اوّل تین ارکان نکالو جس کی تیسری رقم $\frac{2}{3}$ ہو اور ساتویں $\frac{2}{25}$۔

14. ایک سلسلۂ جیومیٹریہ کی دوسری رقم $\frac{4}{5}$ ہے اور چوتھی $\frac{1}{2}$، اس کی تیسری رقم نکالو۔

15. سلسلۂ جیومیٹریہ $\ldots, 18, -12, 8$ میں $\frac{512}{729}$ کون سا رکن ہے؟

16. کسی بھی سلسلۂ جیومیٹریہ کے دو ارکان کے درمیان کے ارکان اُن دونوں ارکان کے درمیان **اوسطِ جیومیٹریہ** کہلاتے ہیں۔ $\frac{2}{3}$ اور $\frac{81}{2}$ کے درمیان چار اوسطِ جیومیٹریہ داخل کرو۔

17. $\frac{1}{27}$ اور $\frac{1}{3}$ کے درمیان تین اوسطِ جیومیٹریہ داخل کرو۔

18. $\frac{2}{5}$ اور $\frac{128}{5}$ کے درمیان ایک اوسطِ جیومیٹریہ داخل کرو۔ اس قسم کا ایک واحد عدد دو اعداد کا **اوسطِ جیومیٹریہ** کہلاتا ہے۔

19. اعداد a اور b کا اوسطِ جیومیٹریہ کیا ہے؟

20. اوسطِ جیومیٹریہ معلوم کرو۔ (a) 12 اور $\frac{1}{3}$ کا۔ (b) 28 اور 112 کا۔

21. ثابت کرو کہ دو غیر مساوی مثبت اعداد a اور b کے لیے اوسطِ حسابیہ بہ نسبت اوسطِ جیومیٹریہ کے بڑا ہوتا ہے۔

22. ایک قصبہ کی آبادی 5000 ہے۔ اگر وہ ہر سال 5% بڑھے تو دس سال بعد تقریباً کتنی آبادی ہوگی؟

23. ایک ربڑ کی گیند کو 9 فٹ اونچائی سے چھوڑا گیا۔ اگر ہر دفعہ گرنے کے بعد وہ اپنی گری ہوئی اونچائی کا ایک تہائی اونچائی تک واپس جائے تو چھٹی دفعہ وہ کتنی اونچائی تک واپس جائے گی؟ ساتویں دفعہ زمین پر گرنے تک وہ کتنا فاصلہ طے کر چکی ہوگی؟

24. ایک شخص ایک عہدہ کو 3600 ڈالر پر اس معاہدہ کے ساتھ قبول کرتا ہے کہ اُس کو ہر سال 2% ترقی ملے گی۔ ملازمت کے دس سال بعد اُس کا مشاہرہ کیا ہوگا؟

25. ایک کار جو 3000 ڈالر میں خریدی گئی ہر سال 12% سے اُس کی فرسودگی کی منہائی ہوتی ہے تو 5 سال کے اختتام پر اُس کی قیمت بتاؤ؟

26. اگر کاغذ کے ایک دست پاک کو جو 0.01 انچ موٹا ہو ایسے تہ کیا جائے تاکہ وہ آدھا ہو جائے لیکن موٹائی میں دوگنا پھر اسی طرح دوبارہ تہ کیا جائے اور پھر اسی طرح حتیٰ کہ یہ عمل 30 مرتبہ دُہرایا جائے تو بتاؤ کہ نتیجے کے طور پر حاصل شدہ کاغذ کے ٹکڑے کی موٹائی تقریباً کیا ہوگی؟

27. اگر آپ کو اس بات کا حق انتخاب ہو کہ آپ 31 دن کے ایک ماہ میں 1000 ڈالر یومیہ مشاہرہ لیں یا پہلے دن کا مشاہرہ ایک ڈالر، دوسرے دن کا دو ڈالر، تیسرے دن کا چار اور اُس کے بعد ماہ کے باقی ماندہ دنوں میں ہر دن آپ کا مشاہرہ دوگنا ہوتا جائے تو کون سے انتخاب سے آپ کا مشاہرہ زیادہ ہوگا؟

28. مساوات (13-2) کی مدد سے ثابت کرو کہ سلسلۂ جیومیٹریہ کی دونوں تعریفیں مساوی ہیں۔

13-3 لاتعداد ارکان والے سلسلۂ جیومیٹریہ:

اب تک کی بحث میں ہم نے متناہی تسلسل کے ارکان کے جوڑ پر ہی غور کیا تھا۔ اگر ہم سلسلۂ جیومیٹریہ کی تعریف پر غور کریں تو یہ واضح ہو جائے گا کہ ایسی لامتناہی تعداد والے ارکان کے سلسلہ کی حاصل جمع متناہی نہیں ہوگی۔ یہی سلسلۂ جیومیٹریہ کے لیے صادق ہے جبکہ $|r| < 1$ ہر رقم ماقبل کی رقم سے جسامت میں بڑی ہوگی۔ کوئی بھی متناہی قیمت جو ایسے لامتناہی حاصل جمع کی نمائندگی کر سکے موجود نہیں ہو سکتی۔ درحقیقت اگر $r = 1$ بھی ہو تو ہر رقم ایک سی ہی ہوگی۔ اس لیے کوئی ایسا لامتناہی جوڑ کا وجود نہیں ہو سکتا۔

اگر $|r| < 1$ تو صورت حال مختلف ہی ہوگی۔ درج ذیل سلسلۂ جیومیٹریہ کی جمع پر غور کرو:

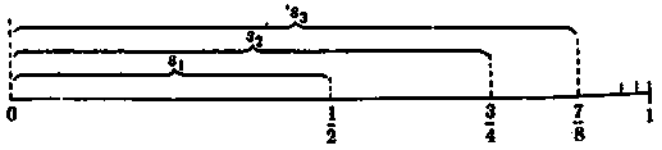
$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n}, \qquad (13\text{-}5)$$

جہاں $r = \frac{1}{2}$

S_n کی ایک توضیح شکل 13-2 میں دیکھی جا سکتی ہے جو کہ ایک اکائی لمبی قطعۂ خط کی نمائندگی کرتی ہے۔ قوسین ارکان کے جوڑ کو ظاہر کرتے ہیں اور نیچے کے اعداد کسی بھی منزل پر سلسلے کے جوڑ کو بتاتے ہیں۔ ہر رقم جو جوڑی جائے گی کل لمبائی کے نصف کی نمائندگی کرے گی۔ ایسی بچی ہوئی لمبائی جو نقطہ 1 اور متناہی جوڑ والے نقطہ کے درمیان لمبائی کی نمائندگی کرتی ہوگی۔ مساوات (13-5)

میں ہم جتنے زیادہ ارکان لیں گے اُتنے ہی نقطہ 1 کے نزدیک تر پہنچتے جائیں گے۔ درحقیقت ہم کافی بڑے ارکان کی تعداد لے کر 1 کے خواہ کتنے ہی نزدیک پہنچ جائیں لیکن کچھ مضائقہ نہیں کتنے ہی ارکان لیے جائیں حاصل جمع 1 سے کبھی زیادہ نہیں ہو سکتا۔ اس لیے ہم کہتے ہیں کہ S_n کی انتہائی قیمت 1 ہے اور اس کو لکھتے ہیں

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = 1. \tag{13-6}$$



شکل 13-2

یہ الجبرا کی مدد سے ثابت کیا جا سکتا ہے۔ مساوات (13-3) کو لکھ سکتے ہیں

$$S_n = \frac{t_1}{1-r} - \frac{t_1 r^n}{1-r}. \tag{13-7}$$

سلسلہ (13-5) میں $t_1 = r = \frac{1}{2}$ تاکہ

$$S_n = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} - \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}}$$

$$= 1 - (\tfrac{1}{2})^n$$

جوں جوں n بڑھتا جاتا ہے $(\frac{1}{2})^n$ گھٹتا جاتا ہے اور درحقیقت $(\frac{1}{2})^n$ کو جسامت میں n کی قیمت کافی زیادہ لے کر جتنا چاہیں اپنی مرضی کے مطابق گھٹا سکتے ہیں اس لیے $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{2})^n = 0$ پس دوبارہ ہمیں حاصل ہوگا

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 1.$$

یہی عمل کسی بھی ایسے سلسلۂ جیومیٹریہ کے لیے جس میں $|r| < 1$ ہو صادق ہے۔ مساوات (13-7) کی مدد سے حاصل ہوگا

$$S_n = \frac{t_1}{1-r} - \frac{t_1 r^n}{1-r}.$$

اگر ہم n کو لاانتہا بڑھنے دیں تو کیوں کہ t_1 اور r کی قیمت مقرر ہے اور $|r| < 1$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{t_1 r^n}{1-r} = 0.$$

مسئلہ 13-2: کسی بھی ایسے سلسلۂ جیومیٹریہ کا جس میں ارکان کی تعداد لاانتہا ہو "حاصل جمع" کا وجود ہوگا اگر $|r| < 1$ اور

$$\boxed{S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{t_1}{1-r}.} \qquad (13\text{–}8)$$

مثال 1 : غیر متناہی سلسلۂ جیومیٹریہ کی حاصل جمع نکالو

$$\tfrac{3}{2}, 1, \tfrac{2}{3}, \tfrac{4}{9}, \ldots$$

حل : یہاں $t_1 = \frac{3}{2}$ اور $r = \frac{2}{3}$ ہمیں حاصل ہوگا

$$S = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{3}{2}}{1-\frac{2}{3}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{3}} = 4\tfrac{1}{2}.$$

مثال 2 : تکراری اعشاریہ $3.242424\ldots$ کو ایک مساوی عام خطی کسر میں تبدیل کرو۔

حل : اس عدد $3.242424\ldots$ کو ہم لکھ سکتے ہیں بہ حیثیت عدد 3 جمع ایک ایسا سلسلۂ جیومیٹریہ جس کا $t_1 = 0.24$ اور $r = 0.01$ کیوں کہ

$$3.242424\ldots = 3 + (0.24 + 0.0024 + 0.000024 + \cdots).$$

قوسین کے درمیان کی حاصل جمع S حاصل ہوگی

$$S = \frac{t_1}{1-r} = \frac{0.24}{1-0.01} = \frac{0.24}{0.99} = \frac{8}{33}.$$

اس طرح

$$3.242424\ldots = 3 + \tfrac{8}{33} = \tfrac{107}{33}.$$

اس نتیجے کی تصدیق 107 کو واقعی طور پر 33 سے تقسیم دے کر کی جا سکتی ہے۔

ہم آپ کی توجہ اس طرف منعطف کرانا چاہتے ہیں کہ کوئی بھی لاانتہا تکراری اعشاریہ کو مساوی عام کسر میں تبدیل کر سکتے ہیں۔ مزید برآں کوئی بھی عام کسر بہ حیثیت ایک دوری اعشاریہ کے لکھی جا سکتی ہے۔ یاد کرو دفعہ 1-5 کے سوال 4 اور 5 کو۔

---

* حالاں کہ ہم ارکان کی لاانتہا تعداد کی جوڑ نہیں کر سکتے پھر بھی $\lim n \to \infty\ S_n = S$ کو "حاصل جمع" کہتے ہیں۔

سوالات

مندرجہ ذیل ہر ایک غیر متناہی سلسلۂ جیومیٹریہ کی حاصل جمع دریافت کرو :

1. $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \ldots$
2. $128, 48, 18, \ldots$
3. $16, -4, 1, \ldots$
4. $\frac{4}{3}, 1, \frac{3}{4}, \ldots$
5. $2, \sqrt{2}, 1, \ldots$
6. $\sqrt{2}+1, 1, \sqrt{2}-1, \ldots$

ذیل کے ہر ایک تکراری اعشاریہ کو اُس کے مساوی عام کسر میں تبدیل کرو :

7. $3.333\ldots$
8. $6.272727\ldots$
9. $0.555\ldots$
10. $8.090909\ldots$
11. $5.818181\ldots$
12. $0.142857142857\ldots$

13. ایک غیر متناہی سلسلۂ جیومیٹریہ کی حاصل جمع $\frac{1}{2}$ ہے۔ اور اوّل رقم 3 ہے تو نسبت مشترک کیا ہوگی ؟

14. مربع کے ایک ضلع کی لمبائی چار انچ ہے۔ ایک دوسرا داخلی مربع پہلے مربع کے اضلاع کے نقاطِ تنصیف کو ملانے سے بنایا ہے۔ ایک تیسرا داخلی مربع اس دوسرے مربع کے اضلاع کے نقاطِ تنصیف کے جوڑنے سے بنایا وغیرہ۔ اس طرح جو غیر متناہی مربع بنے اُن کے رقبے کی حاصل جمع معہ مربع اوّل کے نکالیے۔

15. سوال 14 میں بنائے گئے مربعوں کے احاطوں کی حاصل جمع نکالو۔

16. اگر سوال 14 میں اصل شکل ایک مساوی الساقین مثلث ہوتا جس کے اضلاع کی لمبائی چار انچ ہوتی اور نئے مساوی ضلعی مثلث اس طرح بنائے جاتے تو اصل شکل کے رقبے کو شامل کر کے کُل رقبوں کی حاصل جمع کیا ہوتی ؟

17. ایک گیند کو 48 فٹ کی اونچائی سے چھوڑا گیا جو کہ گرے ہوئے فاصلہ کی دو تہائی پلٹتی ہے۔ اگر یہ اسی طرح گرتی اور پلٹتی رہے تو سکون میں آنے سے پہلے وہ کتنی مسافت طے کرے گی ؟

18. ایک فٹ لمبے خط کا درمیانی تہائی حصہ مٹا دیا گیا۔ باقی ماندہ دو تہائیوں میں سے درمیانی تہائیاں مٹا دی گئیں۔ بچے ہوئے چار نویں حصّوں میں سے درمیانی تہائیاں مٹا دی گئیں۔ اگر یہ عمل لامتناہی حد تک جاری رہے تو باقی ماندہ خطی قطعات کی لمبائیوں کی حاصل جمع کیا ہوگی ؟

13–4 . لوگارتمی تفاعل :

کیوں کہ کسی بھی مثبت عدد x اور کوئی بھی ایسا مثبت عدد $a \neq 1$ کے لیے y کی ایک اور صرف ایک ہی حقیقی قیمت

ہوگی جو مساوات $a^y = x$ * کو مطمئن کرسکے گی۔ ہم اس مساوات کو y کے لیے حل کرسکتے ہیں اور y کو اُس قوت نما کے برابر لیں گے جسے a پر چڑھایا جائے تاکہ عدد x حاصل ہوسکے۔ اس طرح ہمیں مندرجۂ ذیل تعریف حاصل ہوتی ہے۔

تعریف 13-3 : ایسی قوت یا قوت نما y جو ایک عدد a پر عدد x حاصل کرنے کے لیے چڑھائی جائے، a اساس کو x کی لوگارتم کہلاتی ہے اور لکھی جاتی ہے

$$y = \log_a x, \tag{13-9}$$

جس میں $x > 0$ اور $a > 0$ اور 1 کے برابر نہیں ہے۔ لوگارتمی تفاعل کے لیے ذیل کا تعریفی تفاعل ہے

$$\boxed{l: x \to \log_a x.} \tag{13-10}$$

یہ واضح رہے کہ اگر $f: x \to a^x$ تو تفاعل $l: x \to \log_a x$ درحقیقت f^{-1} ہوگا۔ نتیجے کے طور پر اگر ہم یہ یاد رکھیں کہ دونوں عبارات

$$y = \log_a x \quad \text{اور} \quad x = a^y \tag{13-11}$$

مساوی ہیں تو بہت سی لوگارتمی خصوصیات بدیہی طور پر نمایاں ہوجائیں گی۔

تمثیل 1 ❊

$$\log_3 9 = 2 \leftrightarrow 3^2 = 9.$$

$$\log_2 32 = 5 \leftrightarrow 2^5 = 32.$$

$$\log_6 1 = 0 \leftrightarrow 6^0 = 1.$$

$$\log_2 \tfrac{1}{16} = -4 \leftrightarrow 2^{-4} = \tfrac{1}{16}.$$

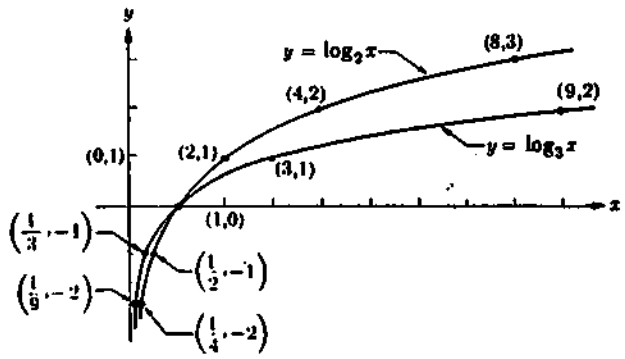
$$\log_8 4 = \tfrac{2}{3} \leftrightarrow 8^{2/3} = 4.$$

اب ہم کو دو لوگارتمی تفاعل کے گراف کھینچنا چاہئیں جن کی تعریفی مساوات ہیں $y = \log_2 x$ اور $y = \log_3 x$ اور ان گرافوں (شکل 13-3) کی مدد سے تفاعل $l: x \to \log_a x$ کی

---

* اس بیان کا ثبوت اس کتاب کے مقصد سے باہر ہے لیکن یہ شکل 13-2 سے نمایاں ہوجائے گا۔

❊ علامت $\leftrightarrow$ ظاہر کرتی ہے "ویسا ہی ہے جیسا کہ" یا کہ دونوں عبارات مساوی ہیں۔



شکل 13-3

کچھ بنیادی خصوصیات پر غور کریں

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
y	-2	-1	0	1	2	3

$y = \log_2 x \leftrightarrow 2^y = x$

x	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9
y	-2	-1	0	1	2

$y = \log_3 x \leftrightarrow 3^y = x$

(1) تفاعل x کی 1 سے تمام بڑی قیمتوں کے لیے مثبت ہے لیکن 1 سے کم تمام قیمتوں کے لیے منفی۔ یہ x کی منفی قیمتوں کے لیے واضح نہیں ہے۔

(2) تفاعل تکثیری تفاعل ہے۔

(3) کسی بھی عدد کا لوگارتم جس کا اساس وہ عدد خود ہی ہو 1 کے برابر ہے۔ گرافی طور پر ایسی تمام منحنی نقطہ $(a, 1)$ سے گزرتی ہیں۔

(4) تفاعل کا واحد صفر $x = 1$ ہے۔

بہت سی ایسی مزید خصوصیات ہیں جن کو ہم یہ یاد رکھ کر کہ لوگارتم صرف ایک قوت نما ہوتا ہے۔ آسانی سے استخراج کر سکتے ہیں۔ ان کو بہ حیثیت مسئلوں کے بیان اور ثابت کیا جائے گا۔

مسئلہ 13-3 : دو رقوم کے حاصل ضرب کا لوگارتم پہلی رقم کے لوگارتم اور دوسری رقم کے لوگارتم کی حاصل جمع کے برابر ہے

$$\log_a uv = \log_a u + \log_a v. \tag{13-12}$$

ثبوت : فرض کرو کہ u اور v دو ایسی مثبت رقوم ہیں جن کے لوگارتم بالترتیب x اور y ہیں

$$x = \log_a u \quad \text{اور} \quad y = \log_a v,$$

یا

$$a^x = u \quad \text{اور} \quad a^y = v.$$

ان مساوات کے مطابق ارکان کو آپس میں ضرب دینے سے حاصل ہوگا

$$uv = a^x a^y = a^{x+y},$$

جو لوگارتم کی تعریف کی مدد سے حل ہو کر آئے گا :

$$\log_a uv = x + y = \log_a u + \log_a v.$$

مسئلہ 13-4 : دو ارقام کے خارج قسمت کا لوگارتم برابر ہے اوّل رقم کے لوگارتم نفی دوسری رقم کے لوگارتم کے

$$\boxed{\log_a \frac{u}{v} = \log_a u - \log_a v.} \qquad (13\text{-}13)$$

ثبوت : اُنھیں مفروضات کو لے کر جیسے کہ مسئلہ 13-3 میں تھے۔ ہمیں حاصل ہوگا

$$\frac{u}{v} = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

لوگارتم کے ارکان میں لکھ کر یہ ہو جائے گا

$$\log_a \frac{u}{v} = x - y = \log_a u - \log_a v.$$

مسئلہ 13-5 : کسی رقم کے قوّت نما کا لوگارتم برابر ہے اُس رقم کے لوگارتم ضرب قوت نما یعنی

$$\boxed{\log_a u^p = p \log_a u.} \qquad (13\text{-}14)$$

ثبوت : فرض کرو کہ u کوئی مثبت رقم ہے اور x اُس کا لوگارتم تب $x = \log_a u$ یا $a^x = u$

اگر ہم دونوں ارکان (ممبر) کو p کی قوّت سے اضافہ کر دیں (چڑھا دیں)

$$(a^x)^p = a^{xp} = u^p,$$

یا لوگارتم کے ارکان میں

$$\log_a u^p = xp = p \log_a u.$$

تمثیل 2 : مسئلہ 13-3 کا مفہوم ہے کہ :

$$\log_{10}(47)(93) = \log_{10} 47 + \log_{10} 9.$$

یا

$$\log_{10} 4700 = \log_{10} 47 \cdot 100 = \log_{10} 47 + \log_{10} 100.$$

تمثیل 3 : مسئلہ 13-4 کا مفہوم ہے کہ :

$$\log_{10} \tfrac{82}{53} = \log_{10} 82 - \log_{10} 53.$$

مسئلہ 13-3 اور 13-4 کا مفہوم ہے کہ :

$$\log_{10} \frac{(48)(96)}{23} = \log_{10} 48 + \log_{10} 96 - \log_{10} 23.$$

تمثیل 4 : مسئلہ 13-5 صحیح قوت نما اور جذر دونوں ہی کے لیے استعمال ہوتا ہے

$$\log_{10} 28^5 = 5 \log_{10} 28,$$

$$\log_{10} \sqrt[3]{472} = \log_{10} (472)^{1/3} = \tfrac{1}{3} \log_{10} 472.$$

سوالات

مساوات (13-11) کی مدد سے مندرجہ ذیل کو لوگارتمی علامات میں ظاہر کرو :

1. $3^3 = 27$	2. $5^4 = 625$	3. $4^0 = 1$
4. $10^3 = 1000$	5. $8^{4/3} = 16$	6. $2^{-6} = \frac{1}{64}$
7. $10^{-3} = 0.001$	8. $b^s = w$	9. $4^1 = 4$

مساوات (13-11) کے استعمال سے قوت نما کی علامات میں ظاہر کرو :

10. $\log_2 \frac{1}{8} = -3$	11. $\log_{36} 6 = \frac{1}{2}$	12. $\log_{10} 1 = 0$

مندرجہ ذیل عبارات میں معائنہ کرکے x ، a یا u کی قیمت نکالو :

13. $x = \log_4 16$	14. $x = \log_7 1$	15. $x = \log_9 \frac{1}{3}$
16. $x = \log_{\sqrt{6}} 36$	17. $\log_3 u = 2$	18. $\log_a 16 = 4$
19. $x = \log_2 4^7$	20. $\log_a 32 = -\frac{5}{7}$	21. $\log_a \frac{2}{3} = -\frac{1}{2}$

مندرجہ ذیل تفاعل کے گراف کھینچو :

22. $y = \log_5 x$	23. $y = \log_{1/2} x$
24. $y = \log_{10} x$	25. $y = \log_{1/3} x$

مسئلے 13-3 ، 4 اور 5 کی مدد سے بہ حیثیت واحد لوگارتم کے ظاہر کرو :

26. $\log_a x + \log_a y - \log_a z$	27. $\log_b (a + 2) - \log_b (a - 3)$
28. $4 \log_{10} x - 3 \log_{10} y$	29. $\frac{1}{2} \log_a x - \frac{3}{5} \log_a y$
30. $\log_b 2x + 3 (\log_b x - \log_b y)$	31. $-\log_a x + 6 \log_a (x - 1) + 3 \log_a x^2$

دی ہوئی عبارت کا لوگارتم اس کے اجزاءِ ضربی کے ارکان کے لوگارتم میں لکھو:

32. $\log_{10}(895)(1.47)$ 33. $\log_{10}(60.3)^4$

34. $\log_{10}(68)^7(\sqrt{147})$ 35. $\log_{10}\frac{(54.3)^3(67)}{(93.9)(32.5)^2}$

13-5. **عام لوگارتم**: گزشتہ دفعہ کی بحث کے بعد یہ واضح ہوگیا ہے کہ 1 کے علاوہ کوئی بھی مثبت عدد کسی بھی لوگارتم کے نظام کا اساس لیا جاسکتا ہے۔ تخمینی اغراض (مقصد) کے لیے آسان ترین نظام وہ ہے جس میں اساس 10 ہو۔ لوگارتم کی پہلی جدول جس کی اساس 10 تھی ہنری برگس (1560-1631) نے تالیف کی تھی۔ اس نظام کے فوائد جیسے جیسے آگے بڑھیں گے ہم کو واضح ہوتے جائیں گے۔ قلم بند کرکے

$$\begin{aligned} 10^3 &= 1000 \\ 10^2 &= 100 \\ 10^1 &= 10 \\ 10^0 &= 1 \\ 10^{-1} &= 0.1 \\ 10^{-2} &= 0.01 \\ 10^{-3} &= 0.001 \end{aligned}$$

اور یہ مان کر کہ یہ جدول لامتناہی طور پر اوپر اور نیچے بڑھایا جاسکتا ہے۔ ہمارے پاس کچھ مخصوص اعداد کو 10 کی قوت میں ظاہر کرنے کا طریقہ معلوم ہوگیا ہے۔ حالانکہ یہ مخصوص اعداد ہی وہ ہیں جو 10 کے ساتھ عدد قوت نما کے ساتھ لکھے جاسکتے ہیں۔ تمام مثبت اعداد کی نمائندگی تقریباً 10 کے ساتھ ایک قوت نما کے ساتھ کی جاسکتی ہے۔ یہ قوت نما ہم اپنی لوگارتم کی تعریف (مساوات 9-13) سے جانتے ہیں۔ اُس عدد کا لوگارتم جس کی اساس 10 ہو اور یہ **ایک عدد کا عام لوگارتم کہلائے گا**۔ اس پوری کتاب میں جہاں اساس نہ لکھی ہو اساس 10 مانی جائے گی۔ اس طرح $\log 1000 = 3$ ، $\log 10 = 1$ یا $\log 0.001 = -3$

نہ یہ کہ مندرجہ بالا فہرست میں دیے گئے 10 کی طاقت والے اعداد کے ہی لوگارتم ہوتے ہیں بلکہ تمام مثبت اعداد کے ہوتے ہیں۔ ضمیمہ کے جدول II میں تمام مثبت اعداد کے لوگارتم کی قیمتیں (اساس 10 کو) 1 سے 10 تک کے درمیان اکائی کے ہر سوویں حصے تک اعشاریہ کے چار مقام تک تقریباً صحیح کرکے دیے گئے ہیں۔ مثلاً $\log 7.63$ معلوم کرنے کے لیے جدول کے پہلے کالم N میں ہم عدد 7.6

تلاش کریں اور پھر 7.6 کے دائیں اُسی لائن میں اُس عدد تک جائیں جو عدد 3 کے سرخی والے کالم میں ملے۔ جو 0.8825 ہے۔ ہمیں حاصل ہوگا $\log 7.63 = 0.8825$ جس کا مطلب یہ ہے کہ

(تقریباً) $10^{0.8825} = 7.63$

درحقیقت خطی ادراج کا وہی طریقہ استعمال کرکے جو دفعہ 5-9 میں استعمال کیا گیا ہے نیز جدول II کی مدد سے ہم ایسے عدد کا لوگارتم دریافت کرسکتے ہیں جس میں چار ملحوظ ہندسے ہوں۔ اگر N، x اور $x + 0.01$ کے درمیان واقع ہے تو $N = x + 0.01r$ جہاں r، 0 اور 1 کے درمیان ہوگا۔ اس لیے یہ مان کر کہ لوگارتمی تفاعل کا گراف ایک خطِ مستقیم ہوگا۔ x اور $x + 0.01$ کے درمیان تو

$$\log N = \log x + r[\log (x + 0.01) - \log x]. \qquad (13\text{-}15)$$

مثال 1 : $\log 3.476$ معلوم کرو۔

حل : کیوں کہ $3.47 < 3.476 < 3.48$ ہمیں حاصل ہوگا

$$\begin{aligned}\log 3.476 &= \log 3.47 + 0.6\,(\log 3.48 - \log 3.47)\\ &= 0.5403 + 0.6(0.5416 - 0.5403)\\ &= 0.5403 + 0.0008\\ &= 0.5411.\end{aligned}$$

اس عدد کے صرف چار ملحوظ ہندسے ہوسکتے ہیں کیوں کہ جدول میں لوگارتم صرف چار ہندسوں تک تقریباً صحیح والے ہیں۔

اگر کسی عدد کا لوگارتم اعشاریہ کے چار مقام والا دیا ہوا ہے تو جدول II کی مدد سے وہ عدد معلوم کرنا بھی ممکن ہے۔ اگر $\log N$ جدول کے وسط میں نمودار ہوتا ہے تو N کو معلوم کرنے والے طریقے کو پلٹ دیتے ہیں۔ اگر $\log N$، $\log x$ اور $\log (x + 0.01)$ کے درمیان واقع ہے تب

جہاں کہ $N = x + 0.01r$

$$r = \frac{\log N - \log x}{\log (x + 0.01) - \log x}, \qquad (13\text{-}16)$$

جو قریب ترین دہائی تک مکمل کردیا گیا ہے (کیوں؟)۔

مثال 2 : اگر $\log N = 0.7281$ تو N معلوم کرو۔

حل : اگر ہم جدول کے وسط میں دیکھیں تو ہمیں معلوم ہوگا :

$$0.7275 < 0.7281 < 0.7284,$$

جہاں کہ

$$\log 5.35 = 0.7284,$$
$$\log 5.34 = 0.7275.$$

اس لیے ہمیں حاصل ہوگا

$$r = \frac{0.7281 - 0.7275}{0.7284 - 0.7275} = 0.7 \quad \text{(مکمل کردینے پر)}$$

اور

$$N = 5.347$$

سوالات

مندرجہ ذیل میں سے ہر ایک عدد کا لوگارتم جدول II کی مدد سے لگالو :

1. 2.57	2. 3.89	3. 6.92	4. 7.65
5. 4.71	6. 9.80	7. 6.875	8. 8.924
9. 3.276	10. 1.802	11. 7.689	12. 5.873

جدول II کی مدد سے ذیل کے ہر ایک میں سے N نکالو اگر $\log N$ برابر ہو

13. 0.3856	14. 0.8756	15. 0.6149	16. 0.6405
17. 0.9415	18. 0.7657	19. 0.2675	20. 0.5217
21. 0.9229	22. 0.7578	23. 0.5069	24. 0.6745

عام طور پر N کے لوگارتم میں دو حصے ہوتے ہیں۔ ایک کامل عدد جس کو ممیّز (امتیازیہ) کہتے ہیں اور ایک مثبت اعشاریہ (ایک ایسا عدد n جس میں کہ $0 \leq n < 1$) جسے اعشاریۂ لوگارتم کہتے ہیں۔ اگر کسی عدد میں اعشاریہ پہلے غیر صفر ہندسہ کے ٹھیک دائیں طرف ہو تو اُس عدد کے لوگارتم کا ممیّز صفر ہوگا۔ جدول II میں تمام اعداد جو 1 اور 10 کے درمیان ہیں اسی قسم کے ہیں۔ ایسے عدد کے لیے کہا جاتا ہے کہ اس کا اعشاریہ معیاری مقام پر ہے۔

اگر کسی عدد کو 10 سے ضرب دیں تو اعشاریہ دائیں طرف ایک مقام ہٹ جاتا ہے اور اگر 10 سے تقسیم دیں تو ایک مقام بائیں ہٹ جاتا ہے لیکن ہر دفعہ جب کسی عدد کو 10 سے ضرب دیتے ہیں تو کیوں کہ

$$\log 10N = \log N + \log 10$$
$$= \log N + 1,$$

اُس عدد کا لوگارتم 1 زیادہ ہوجاتا ہے۔ اسی طرح اگر کسی عدد کو 10 سے تقسیم دیں تو اس کا لوگارتم

1 گھٹ جاتا ہے کیوں کہ

$$\log \frac{N}{10} = \log N - \log 10$$

$$= \log N - 1.$$

اس لیے ممیز حاصل کرنے کے عام اصول کو بہ حیثیت ایک مسئلہ کے بیان کیا جا سکتا ہے۔

مسئلہ 13-6 : کسی عدد کا ممیز لوگارتم اُن مقامات کی تعداد کے برابر ہے کہ جتنے مقام اعشاریہ اپنے معیاری مقام سے ہٹایا گیا ہے۔ ممیز مثبت ہوگا اگر اعشاریہ دائیں طرف ہٹایا گیا ہے اور منفی جب بائیں طرف۔

ہمارے نظام اعداد کی اسی خوبی اور ممیز معلوم کرنے کی متطابق آسانی کی وجہ سے ہی 10 کے اساس والے لوگارتم ہم حساب لگانے میں استعمال کرتے ہیں۔

اعشاریہ لوگارتم ——— لوگارتم کا وہ حصہ جو جدول میں دیا گیا ہے ——— عدد میں اعشاریہ کے مقام سے اثر پذیر نہیں ہوتا بلکہ صرف ہندسوں کے تواتر پر ہی منحصر ہے۔ پس مثال 1 کے نتیجے کی بنا پر

$\log 347.6 = 2.5411$ کیوں کہ اس کا ممیز 2 ہے جبکہ

$$\log 0.003476 = -3 + 0.5411.$$

ممیز -3 عام طور سے لکھا جاتا ہے $10 - 7$ (حساب لگانے کا یہ ایک عام طریقہ ہے کہ کسی بھی منفی ممیز کو بہ حیثیت ایک مثبت عدد صحیح نفی 10 کے کسی مضاعف کی صورت میں لکھتے ہیں) تاکہ

$$-3 + 0.5411 = 7.5411 - 10.$$

سوالات

مندرجہ ذیل لوگارتم میں سے ہر ایک کا ممیز اور اعشاریہ لوگارتم نکالو :

1. $\log N = 1.3782$
2. $\log N = 3.4729$
3. $\log N = 0.5728 - 3$
4. $\log N = 9.6847$
5. $\log N = 5.8723$
6. $\log N = 6.7253 - 10$
7. $\log N = -3.7285$
8. $\log N = -0.6892$

جدول II کی مدد سے مندرجہ ذیل اعداد میں ہر ایک کا لوگارتم نکالو :

9. 329
10. 0.00874
11. 4728
12. 32.46
13. 0.07284
14. 0.6877

جدول ی مدد سے ذیل میں سے ہر ایک میں N نکالو:

15. $\log N = 3.8228$ 16. $\log N = 0.9643 - 2$
17. $\log N = 2.4268$ 18. $\log N = 0.8818 - 10$
19. $\log N = 7.5627 - 10$ 20. $\log N = -1.4892$

13–6 . **تخمینہ بذریعہ لوگارتم :** اب ہم یہ بتانے کے لیے تیار ہیں کہ لوگارتم کے استعمال سے ضرب دینا، تقسیم کرنا، کسی قوت نما پر چڑھانا یا جذر نکالنا اس سے کتنا آسان ہوگیا ہے۔ اس سے قبل کہ فی الواقعہ حساب لگایا جائے کام کا ایک نظم با اُصول طریقہ پر کھینچ لینا چاہیے۔ ایک مرتب ترتیب نہ صرف کام کے اختصار میں بلکہ نتائج کی پڑتال میں بھی بہت ہی مددگار ثابت ہوگی۔

مثال 1 : لوگارتم کی مدد سے تخمینہ کرو $(1280 \cdot 0.849)/62.8$

حل : فرض کرو کہ $N = (1280 \cdot 0.849)/62.8$

تو مسئلے 13-3 اور 13–4 کے استعمال سے ہمیں حاصل ہوگا

$$\log N = \log 1280 + \log 0.849 - \log 62.8$$

کام کی ترتیب مندرجہ ذیل ہوگی :

$$\begin{aligned} \log 1280 &= 3.1072 \\ (+)\ \log 0.849 &= 9.9289 - 10 \\ &= 13.0361 - 10 \quad \text{(شمار کنندہ کا لوگارتم)} \\ (-)\ \log 62.8 &= 1.7980 \\ \log N &= 11.2381 - 10 \\ N &= 17.3. \end{aligned}$$

N تین ملحوظ ہندسوں کے ساتھ دیا ہے کیوں کہ اصل اعداد اسی قسم کے تھے۔

مثال 2 : لوگارتم کی مدد سے تخمینہ کرو : $\sqrt{0.01278}/(.4825)^3$

حل : ہم جانتے ہیں کہ $\log N = \frac{1}{2}\log 0.01278 - 3\log 0.4825$

کام کو ترتیب سے مرتب کرنے سے حاصل ہوگا

$$\begin{aligned} \log 0.01278 &= 18.1065 - 20 \\ \tfrac{1}{2}\log 0.01278 &= 9.0532 - 10 \\ (-)\ 3\log 0.4825 &= 9.0502 - 10 \\ \log N &= 0.0030 \\ N &= 1.007. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log 0.4825 &= 9.6834 - 10 \\ 3\log 0.4825 &= 29.0502 - 30 \\ &= 9.0502 - 10 \end{aligned}$$

مثال 3 : قیمت نکالو جبکہ $x = 52.8 \log 6.79$

حل : اس مثال میں یہ نوٹ کرنا اہم ہے کہ اس میں دو اجزا ضربی 52.8 اور 6.79 کا حاصل ضرب پوچھا ہے نہ کہ 52.8 اور 6.79 کا۔

اس طرح $\log x = \log 52.8 + \log [\log 6.79]$.

$$\log 52.8 = 1.7226$$
$$(+) \log [\log 6.79] = \log 0.832 = \underline{9.9201 - 10}$$
$$\log x = 1.6427$$
$$x = 43.9$$

سوالات

لوگارتم کی مدد سے مندرجہ ذیل اعداد کی قیمت کا تخمینہ ملحوظ ہندسوں کی صحیح تعداد تک کرو :

1. $(367)(87.2)$
2. $(47.2)(0.897)$
3. $\dfrac{32.7}{(0.892)^{1/2}}$
4. $\dfrac{(245)(8.62)}{(7.84)^2}$
5. $(32.79)(497.2)(9.738)$
6. $\sqrt{756.9}\,(4.796,$
7. $(-0.8472)^4$
8. $(-3.472)^{-3}$
9. $\dfrac{(6.892)(-0.9245)^{2/3}}{2.475}$
10. $\left(-\dfrac{47.2}{6.783}\right)^3$
11. $\dfrac{\sqrt{738.2}\,(38.74)}{(0.9576)^2(8743)}$
12. $\left[\dfrac{\sqrt{8453}\,(0.002477)}{347.9}\right]^{1/2}$
13. $4.72 \log 63.9$
14. $\log (\log 82.4)$
15. $\dfrac{\log 48.5}{\log 67.2}$
16. $\dfrac{\log 0.8924}{\log 5.237}$

13-7 . سودِ مرکب اور اُس کی تعمیم :

سودِ مرکب کے مطالعے میں لوگارتمی تخمینہ کا استعمال ہوتا ہے۔ اور یہ مطالعہ لازمی طور پر ایک اور اہم نظام لوگارتم سے متعارف کراتا ہے۔

---

* حالانکہ منفی عدد کے لوگارتم کی تعریف نہیں کی گئی ہے حسابات تمام اجزا کو مثبت مان کر کیے جائیں اور نتیجہ میں موزوں علامت آگے لگا دی جائے۔

اگر ایک رقم P سود کی شرح r (جو اعشاریہ میں ظاہر کی گئی ہو) فی سال پر لگائی جائے تو ایک سال کی مدت کے اختتام پر سود کی رقم Pr ہوگی تاکہ زرِ کل ہوگا $P + Pr = P(1 + r)$، اگر اس رقم پر پھر ایک اور سال سود ملے تو دو سال کی مدت کے اختتام پر زرِ کل ہوگا

$$P(1 + r) + P(1 + r)r = P(1 + r)[1 + r] = P(1 + r)^2$$

یہ اُس مرکب رقم کی نمائندگی کرتی ہے جو کہ دو سال کی مدت کے اختتام پر سود کی شرح r کے حساب سے لگانے پر حاصل ہوئی۔ اگر ہم اس عمل کو جاری رکھیں تو ایسی رقم P جو کہ n سال کے لیے r شرح سود مرکب پر لگائی گئی ہے، مندرجہ ذیل ضابطہ سے حاصل ہوگی

$$\boxed{A = P(1 + r)^n.} \qquad (13\text{–}17)$$

مثال 1 : 500 ڈالر کی زرِ اصل جو کہ سالانہ مرکب کی جاتی ہے 8 سال کی مدت کے لیے بہ شرح 6 فی صدی لگائی گئی ہو تو مدت کے اختتام پر زرِ کل نکالو۔

حل : مساوات (13–17) کی مدد سے ہمیں حاصل ہوگا $P = 500$، $r = 0.06$ اور $n = 8$ اس طرح

$$A = 500(1 + 0.06)^8 = 500(1.06)^8.$$

$$\log 500 = 2.6990$$
$$(+)\ 8 \log 1.06 = 0.2024$$
$$\log A = 2.9014$$
$$A = 796.80 \text{ ڈالر}$$

$$\log 1.06 = 0.0253$$
$$8 \log 1.06 = 0.2024$$

کیوں کہ n نمائندگی کرتا ہے تعداد سال کی اور r سالانہ شرح کی ہم اُس حاصل شدہ رقم پر غور کر سکتے ہیں جو حاصل ہوگی سالانہ، ششماہی، سہ ماہی وغیرہ۔ اگر ہم s سے ہر سال کے تحویلی دور کی تعداد ظاہر کریں۔ اس لیے n سال میں جبکہ ہمارے تحویلی دور s فی سال ہوں تو ایسے دوروں کی تعداد ns ہوگی اور شرح فی دور r/s ہوگی یا

$$\boxed{A = P\left(1 + \frac{r}{s}\right)^{ns}.} \qquad (13\text{–}18)$$

مثال 2 : اگر مثال 1 کے 500 ڈالر کو 8 سال کی مدت کے لیے بہ شرح 6% سود مرکب سہ ماہی پر لگایا گیا ہو تو کس قدر رقم ہوگی؟

حل : کیوں کہ 8 سال کی مدت کے لیے 6% سہ ماہی مرکب کرنے سے سود کی شرح $1\frac{1}{2}\%$ فی دور ہوگی جبکہ دور کی تعداد 32 ہو تو ہمیں حاصل ہوگا:

$$A = 500(1.015)^{32}.$$

جس کا جواب ہوگا $A = 804.20$ ڈالر

لیکن یہ اور مثال 1 کے جوابات دونوں بالکل صحیح نہیں ہیں کیوں کہ چار مقام والی لوگارتمی جدولیں استعمال کی گئی تھیں۔ کیوں کہ قوت نما بڑے ہیں اس لیے صحیح جوابات کے لیے یا تو سات مقامی لوگارتمی جدول یا سود مرکب کی جدول استعمال کرنا چاہیے۔

مساوات (13–18) کی تعمیم کے براہ راست نتیجے کے طور پر ایک اہم ترین قوت نما تفاعل حاصل ہوتا ہے جو بعض اوقات کہلاتا ہے **کلیہ افزائش طبعی**۔ اس کا اطلاق اکثر حیاتیات، علم کیمیا، معاشیات نیز ریاضیات میں بھی ہوتا ہے۔ مان لو کہ تحویلی دور کی تعداد s لاانتہا بڑھا دی جائے تاکہ رقم مسلسل مرکب ہوتی رہے۔ اگر ہم r/s کو x کے برابر مان لیں تاکہ $s/r = 1/x$ تو مساوات (13–18) سے ہمیں حاصل ہوگا:

$$A = P\left[\left(1 + \frac{r}{s}\right)^{s/r}\right]^{rn} = P[(1 + x)^{1/x}]^{rn}. \qquad (13\text{–}19)$$

ایک قائم r کے لیے اگر s کی قیمت لاانتہا بڑھتی رہے تو r/s کی قیمت جو x کے برابر ہے مثبت رہتے ہوئے لاانتہا گھٹتی رہے گی یہاں تک کہ صفر کے تقارب میں آجائے گی۔ اگر مساوات (13–19) کو بذریعہ مسئلہ دوررقمی پھیلایا جائے (دفعہ 11–5 کے سوال 4 کو دیکھو) تو

$$A = P\left[1^{1/x} + \frac{1}{x}\cdot 1^{(1/x)-1}\cdot x + \frac{\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-1\right)}{2!}\cdot 1^{(1/x)-2}\cdot x^2 + \frac{\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-1\right)\left(\frac{1}{x}-2\right)}{3!}\cdot 1^{(1/x)-3}\cdot x^3 \cdots\right]^{rn}$$

$$= P\left[1^{1/x} + 1^{(1/x)-1} + \frac{1-x}{2!}\cdot 1^{(1/x)-2} + \frac{(1-x)(1-2x)}{3!}\cdot 1^{(1/x)-3} + \cdots\right]^{rn},$$

اور اب اگر ہم اس عبارت کی ہر رقم کی قیمت x کو صفر کے برابر رکھ کر نکالیں تو حاصل ہوگا

$$A = P\left(1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \cdots\right)^{rn} \qquad (13\text{–}20)$$

اگرچہ ہم نے یہ ہرگز ثابت نہیں کیا کہ اس لاانتہا حاصل جمع کی کوئی معیّن قیمت* ہے۔ یہ قرین قیاس ہے کہ مساوات (13–19) کی قوسین کے اندر کی عبارت کی کوئی معیّن قیمت ضرور ہوگی اگر x کو تقریباً صفر کے برابر آنے دیا جائے۔ ایسا ہی ہے۔ یہ مستقل قیمت جسے علامتی طور پر e سے ظاہر کرتے ہیں ایک غیر مختتم، غیر تکراری اعشاریہ ہے اور اس لیے غیر ناطق (دفعہ 1–5) چھ ملحوظ ہندسوں کے لیے

$$e = \lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} = \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots\right) = 2.71828. \qquad (13\text{–}21)$$

اس لیے ہمیں یہ تفاعل حاصل ہوگا :

$$\boxed{A = Pe^{rn},} \qquad (13\text{–}22)$$

جو ایسے زرِ کل P کی نمائندگی کرتا ہے جو لگاتار n سال تک r در پر مرکّب کیا جاتا رہا ہے۔

مثال 3 : ایک مقام کی آبادی بیس ہزار ہے اور اُصول افزائش طبعی مساوات (13–21) کے مطابق بہ شرح $r = 0.037$ لگاتار بڑھ رہی ہے تو 25 سال بعد اُس کی تخمینی آبادی نکالو۔

حل : ضابطہ $A = Pe^{rn}$ میں

$$P = 20{,}000 \qquad r = 0.037 \text{ اور سال } n = 25$$

اس لیے

$$A = 20{,}000e^{(0.037)(25)}$$

لوگارتم کے ذریعے حل کرنے سے ہمیں حاصل ہوگا

$$\log A = \log 20{,}000 + (0.037)(25) \log e.$$

$$\log 20{,}000 = 4.3010$$

$$(+)\ (0.037)(25) \log e = 0.4017$$

$$\log A = 4.7027$$

$$A = 50{,}430 \text{ آبادی (تقریباً)}$$

---

* جیسا کہ دفعہ 11–5 میں کہا گیا ہے کہ کسی لاانتہا حاصل جمع کی مستقل قیمت کا وجود کا ثبوت اس کتاب کی حدود سے باہر ہے۔

سوالات

1. ایک زرِ اصل دو سو ڈالر کا بہ شرح 4 فی صدی دس سال کی مدّت کے اختتام پر قابلِ ادائیگی زرِ کل نکالو جبکہ (a) ادائیگی سالانہ (b) ادائیگی ششماہی (c) ادائیگی سہ ماہی (d) لگاتار ادائیگی ہوتی رہے

2. زرِ اصل تین ہزار ڈالر کا بہ شرح 6 فی صدی 20 سال کی مدّت کے اختتام پر قابلِ ادائیگی زرِ کل کیا ہوگا اگر اُس کی ادائیگی ہو (a) سالانہ ہو (b) ماہانہ ہو (c) لگاتار ہو؟

3. کسی رقم کو دوگنا کرنے کے لیے کتنی مدّت درکار ہوگی اگر اُس کی ادائیگی (a) سالانہ بہ شرح 6 فی صدی (b) لگاتار بہ شرح r فی صدی ہو [اشارہ: فرض کرو کہ $P = 1$ اور $A = 2$]؟

سوال 4 سے 8 تک کے لیے مساوات 13-22 کلیۂ افزائشِ طبعی کو قبول کریں:

4. ایک شہر کی آبادی 80,000 ہے اور گزشتہ 20 سال سے لگاتار بہ شرح $r = 0.025$ بڑھتی رہی ہے تو بتاؤ کہ 20 سال قبل اُس کی آبادی کیا تھی؟

5. ایک کِشت (کلچر) میں ابتداءً 1000 جراثیم (bacteria) ہیں اور چار گھنٹے بعد چار ہزار ہو جاتے ہیں تو ان جراثیم کی فی گھنٹہ شرحِ بڑھوتری نکالو۔

6. اگر کسی کِشت میں ایک خاص قسم کے جراثیم کی بڑھوتری کی شرح $r = 0.24$ فی گھنٹہ ہو تو بتاؤ کہ 50 جراثیم کو 1,000,000 بننے میں کتنی مدّت لگے گی؟

7. ایک کیمیاوی تعامل میں 4 منٹ میں اصل ارتکاز گھٹ کر 0.03 سے 0.01 ہو جاتا ہے (a) ارتکاز میں شرحِ تقلیل فی منٹ بتاؤ (b) 10 منٹ میں ارتکاز کیا ہو جائے گا؟

8. اگر ریڈیم دیے ہوئے ضابطہ $y = y_0 e^{-0.04t}$ کے مطابق تحلیل ہوتا ہے جبکہ t صدیوں میں y_0 گرام ریڈیم y گرام میں تقلیل ہوتا ہے تو بتاؤ کہ ایک گرام ریڈیم کو $\frac{1}{2}$ گرام تک تقلیل ہونے میں کتنی مدّت لگے گی؟

13-8 قوّت نما تفاعل کے اطلاق:

گزشتہ دفعہ میں ہم نے قوّت نما تفاعل کا ایک اہم اطلاق کا مطالعہ کیا۔ اس تفاعل کے دوسرے

استعمالوں کی تحقیقات کرنے سے پہلے کسی اساس کو لوگارتم کی عددی قیمت دریافت کرنے یا ایک اساس سے دوسری اساس میں تبدیل کرنے کے طریقے پر بحث کرنا چاہیے۔ درحقیقت کسی عدد کا کسی اساس کو لوگارتم معلوم کرنے میں قوت نما تفاعل کو استعمال کیا جا سکتا ہے۔

مثال 1 : $\log_4 15$ کی قیمت دریافت کرو۔

حل : اگر $y = \log_4 15$ تو اس کی مساوی مساوات ہوگی

$$4^y = 15.$$

ایسی کسی بھی مساوات کو ہر رکن کے عام لوگارتم لینے اور y کی مطلوبہ قیمت نکالنے سے حل کی جا سکتی ہے۔ اسی طرح

$$\log 4^y = \log 15,$$
$$y \log 4 = \log 15.$$

y کے لیے حل کر کے ہمیں حاصل ہوگا

$$y = \frac{\log 15}{\log 4} = \frac{1.1761}{0.6021} = 1.953.$$

اگر کسی اساس کو ایک عدد کا لوگارتم معلوم ہو تو اکثر اسی عدد کا لوگارتم کسی مختلف اساس کے لیے دریافت کرنا پسندیدہ ہوتا ہے۔ مان لو کہ

$$y = \log_a N.$$

اس کو مساوی صورت میں لکھ کر

$$a^y = N.$$

اور ہر عدد کا b کی اساس کو لوگارتم لے کر ہمیں حاصل ہوگا

$$\log_b a^y = \log_b N,$$

یا

$$y \log_b a = \log_b N.$$

یہ یاد رکھ کر کہ $y = \log_a N$ ہمیں حاصل ہوگا

$$\boxed{\log_a N \cdot \log_b a = \log_b N.} \qquad (13\text{–}23)$$

اس صورت کی اہمیت کی وجہ جس میں ایک اساس 10 ہو اور دوسری e ہم یہ بات نوٹ کریں کہ ایسی صورت میں اگر $a = e$ اور $b = 10$ تو مساوات (13–22) تحلیل ہو جائے گی :

$$\log_{10} N = \log_e N \cdot \log_{10} e = 0.4343 \log_e N, \qquad (13\text{-}24)$$

$$\log_e N = \frac{1}{\log_{10} e} \cdot \log_{10} N = 2.303 \log_{10} N. \qquad (13\text{-}25)$$

اور

یہ دونوں ضابطے اُن تحلیلی طریقوں میں وسیع پیمانے پر کام میں لائے جاتے ہیں جن میں ایک عام لوگارتمی نظام سے e اساس والے لوگارتمی نظام میں اور اس کے برعکس تبدیلی مقصود ہو۔

مثال 2 : $\log_e 3.24$ کی قیمت دریافت کرو۔

حل 1 :. مساوات (13-25) سے

$$\begin{aligned}\log_e 3.24 &= 2.303 \log 3.24 \\ &= (2.303)(0.5105) \\ &= 1.175.\end{aligned}$$

حل 2 : یہ مثال مثال 1 کے طریقے پر بھی حل کی جا سکتی ہے۔

اگر ہم یہ فرض کر لیں کہ

$$y = \log_e 3.24,$$

$$e^y = 3.24.$$

ہر رکن کا عام لوگارتم لے کر حاصل ہوگا

$$\log e^y = \log 3.24,$$

یا

$$y \log e = \log 3.24.$$

y کے لیے حل کر کے حاصل ہوگا

$$y = \frac{\log 3.24}{\log e} = \frac{0.5105}{0.4343} = 1.175.$$

مثال 1 اور مثال 2 کے حل میں استعمال شدہ طریقے اُس طریقے کے مشابہ ہیں جو بہت سے قوت نما اور لوگارتمی مساوات کے حل کرنے میں استعمال ہوئے ہیں۔

مثال 3 : x کے لیے حل کرو $4^{x+3} = 7^{x-1}$

حل : اگر ہم دونوں ممبروں کے عام لوگارتم لیں تو

$$\log 4^{x+3} = \log 7^{x-1}$$

مسئلہ 13-5 کے استعمال سے حاصل ہوگا

$$(x + 3) \log 4 = (x - 1) \log 7.$$

x کے لیے اس خطی مساوات کو حل کرنے سے حاصل ہوگا :

$$x \log 4 + 3 \log 4 = x \log 7 - \log 7,$$

$$x (\log 4 - \log 7) = -\log 7 - 3 \log 4,$$

$$x = \frac{\log 7 + 3 \log 4}{\log 7 - \log 4}$$

$$= \frac{2.6514}{0.2430} = 10.92 \quad \text{(تقریباً)}$$

مثال 4 : حل کرو : $\log (x + 3) - \log x = 2.$

حل : مسئلہ 4-13 کے استعمال سے

$$\log (x + 3) - \log x = \log \frac{x + 3}{x} = 2,$$

تاکہ

$$\frac{x + 3}{x} = 100, \quad x + 3 = 100x,$$

$$99x = 3, \quad \text{یا} \quad x = \tfrac{3}{99}.$$

سوالات

مندرجہ ذیل لوگارتم نکالو :

$\log_{27} 15$ .4	$\log_7 128$ .3	$\log_8 27$ .2	$\log_2 14$ .1
$\log_e 3.78$ .8	$\log_e 1.79$ .7	$\log_e 12$ .6	$\log_e 7$ .5

مندرجہ ذیل میں سے ہر ایک میں x کی قیمت دریافت کرو :

$\log_{12} x = 17$ .10	$\log_4 x = 23$ .9
$\log_e x = 1.72$ .12	$\log_e x = 3.28$ .11
$\log_e x = 2.547$ .14	$\log_e x = 0.8473$ .13

*15 اس تعلق کو ثابت کرو : $\log_b a = 1/(\log_a b)$

مندرجہ ذیل قوت نما مساوات کو x کے لیے حل کرو :

$2^x = 32$ .17	$3^x = 27$ .16
$3^x = 32$ .19	$2^x = 27$ .18

$3^{x+1} = 4^{x-7}$ .20 $5(6^x) = 21^{x-2}$ .21

$17^{2x-3} = 25^{x-1}$ .22 $2.78^x = 7.88^{2x-1}$ .23

$e^x + e^{-x} = 2$ .24 [اشارہ: یہ e^x میں دو درجی ہے]

$e^x - e^{-x} = 2$ .25

مندرجہ ذیل لوگارتمی مساوات کو x کے لیے حل کرو:

$\log x - 2\log 4 = \log 32$ .26 $\log (x+2) - \log x = \log 12$ .27

$\log (3x+2) = \log (x-4) + 1$ .28 $\log (x+1) - \log x = 2.4742$ .29

باب 14

دائری تفاعل کا اطلاق

دائری تفاعل کے اطلاق کی عام قسم اس حقیقت پر مبنی ہے کہ اُن سوالات کی ایک بہت بڑی تعداد جن سے آج کل سائنس بحث کرتی ہے اپنی فطرت میں دَوری ہے۔ سوالات جن کے حل ایسے ہوں جو فلکیات اور میکانیات کے علوم میں پائے جاتے ہیں اور نُور، صوت اور بجلی کے مظاہر سے بحث کرتے وقت سامنے آتے ہیں۔ ان سوالات کے تجزیے میں، مغلہ اور باتوں کے، دائری تفاعل کا کثرت سے استعمال، معاً اُن کی چند مخصوص خصوصیات اور گراف پر، خاص طور سے زور دینے کی ضرورت پڑتی ہے۔ اس باب میں ہم ان خصوصیات اور گراف پر تفصیل سے بحث کریں گے۔ مزید یہ کہ ہم اُن خصوصی اطلاق پر بھی بحث کریں گے جو فطری طور پر اس سے پیدا ہوں گے۔

14-1 . خمیدہ $y = a \sin kx$ کے گراف : $y = \sin x$ کا گراف کھینچنے میں (دفعہ 3-6 کی شکل 7-6)، ہم نے اسے براہِ راست پلاٹ کیا ہوگا ایسے کہ x کو اپنی اختیاری قیمتیں دے کر اور ہر x کے لیے y کی مطابق قیمتوں کو تخمینہ کر کے اور اس طرح حاصل شدہ نقاط کے مختصات معلوم کیے ہوں گے۔ اگرچہ یہ طریقہ کسی بھی دائری تفاعل کے گراف کھینچنے کے لیے کام میں لایا جا سکتا ہے لیکن ایک عام عبارت کے لیے یہ کبھی استعمال نہیں کیا جاتا۔ کیوں کہ یہ زیادہ آسان ہے کہ پہلے سے کھنچی ہوئی خطی خمیدہ کی تعمیم کر دی جائے۔ وقتاً فوقتاً امتحان کے مقصد سے کچھ نقاط استعمال کر لیے جاتے ہیں۔

$y = a \sin kx$ سے تعریف کیے گئے گراف a اور k مستقل کی مختلف قیمتوں کے لیے اُن عام "سائن خمیدوں" (sine curves) کے گراف کی حیثیت سے زیرِ غور لائے جا سکتے ہیں:

جن کی ایک مخصوص حالت $y = \sin x$ ہے۔ کیوں کہ تفاعل $y = \sin x$ دوری ہے جس کا دور 2π ہے [یاد کرو مساوات (6-5)]۔ اس کے گراف کا اعظم تعین گر وہ ہوگا جبکہ $x = \pi/2 \pm 2n\pi$ ہوگا۔ اس لیے عام تفاعل $y = a \sin kx$ (یہ مان کر کہ $k > 0$ اور $a > 0$) بھی دوری ہوگا اور جب کبھی kx اپنے آپ کو 2π کی لمبائی سے بدلے گا یا x، $2\pi/k$ لمبائی سے تبدیل ہوگا تو یہ تفاعل اپنے آپ کو دہرائے گا۔ اس لیے اس کا دور $2\pi/k$ ہوگا اور اس کے گراف میں اعظم تعین گر جب ہوگا جبکہ $x = \pi/2k \pm 2n\pi/k$، اعظم تعین گر a یا تفاعل کا اعظم کہلاتا ہے۔ تفاعل کا محیط اور ایک مکمل دور (حلقہ) کی لمبائی $2\pi/k$ اس کا دور کہلاتی ہے۔

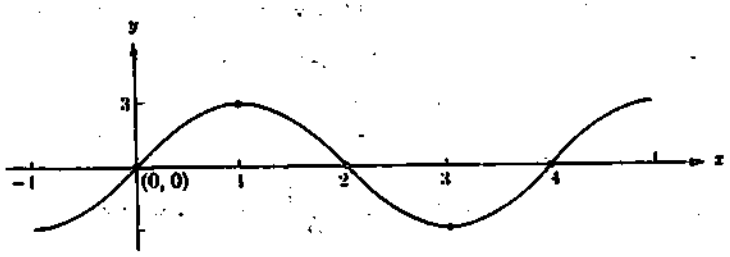
$y = a \sin kx$ قسم کے سائن خمیدہ کے گراف کو کھینچنے کے لیے مبدا کی دائیں طرف مثبت x-محور پر ایک دور کے برابر لمبائی کا نشان لگالیں۔ جیسا کہ شکل 6-7 میں ہے۔ سرے کے دونوں نقاط اور اس دور کا وسطی نقطہ خمیدہ پر واقع ہوں گے۔ گراف کی سب سے بڑی قیمت (اعظم) پہلے دونوں نقاط کے وسطی نقطہ کی x کی قیمت ہوگی اور اس کی عددی سب سے بڑی منفی قیمت (اقل) آخری دونوں نقاط کے وسطی نقطہ پر ہوگی۔

یہ نقاط گراف کو تسلی بخش طور پر تصحیح کے ساتھ کھینچنے کے لیے کافی ہوں گے۔ دونوں محوروں پر تقسیم در تقسیم مختلف لمبائی کی لینا اکثر مناسب رہے گا۔ اُنتی اکائیوں کو π کے ارکان میں ظاہر کرنا زیادہ واضح رہے گا۔

مثال : $y = 3 \sin (\frac{1}{2}\pi x)$ سے متعارف تفاعل کا محیط اور دور بتاؤ اور گراف بھی کھینچو۔

حل : اس کا محیط 3 ہے اور دور $2\pi/(\pi/2) = 4$ ہے۔ اس گراف کے ایک دور کے لیے نشان لگایا ہوا فاصلہ 4 ہے۔ اس فاصلے کے سرے کے نقطے ہوں گے $(0, 0)$ اور $(4, 0)$ اور وسطی نقطے $(2, 0)$ کیوں کہ $a = 3$ کے اس لیے اعظم قیمت اور اقل قیمت کے نقاط لگاتار ہوں گے $(1, 3)$ اور $(3, -3)$۔ اس طرح ایک دور کا نقشہ کھینچ کر مزید دوروں کی کتنی ہی تعداد کو دائیں یا بائیں بڑھا سکتے ہیں۔ اس تفاعل کا گراف شکل 1-14 میں دیا ہوا ہے۔

اس بحث میں یہ مان کر چلے ہیں کہ a اور k مثبت ہیں۔ اگر $k < 0$ تو مثبت



شکل 14–1

اور منفی قیمتوں* کے تفاعل کے آپس کے رشتوں کو kx کو مثبت قیمت میں جبکہ x مثبت ہو تبدیل کرنے کے لیے استعمال کیا جا سکتا ہے۔ اس لیے اس بحث کو مکمل کرنے کے لیے ہمیں صرف $y = -a \sin kx$ کو جس میں a اور k مثبت ہیں، زیرِ غور لانا چاہیے۔ اس تفاعل کا بجنسہٖ وہی گراف ہے جیسا کہ $y = a \sin kx$ کا، سوائے اس کے کہ x کی ہر قیمت کے لیے y کی وہ قیمتیں جو مثبت تھیں اب منفی ہوں گی اور اس کے برعکس۔ دوسرے الفاظ میں $y = -a \sin kx$ کے گراف کو ہم اس طرح بیان کر سکتے ہیں کہ یہ $y = a \sin kx$ کے گراف کا x-محور کے گرد اگرد عکس ہے۔

جو طریقہ $y = a \sin kx$ کو پلاٹ کرنے میں اختیار کیا گیا ہے وہی طریقہ کچھ معمولی ردّ و بدل کے ساتھ $y = a \cos kx$ کو کشید کرنے میں استعمال کیا جا سکتا ہے۔ اس کے خمیدہ کا محیط بھی a ہے اور دَور $2\pi/k$ کوسائن خمیدہ (cosine curve) مطابق سائن خمیدہ (sine curve) سے بہرحال اس بات میں مختلف ہے کہ یہ خمیدہ اپنے دَور کے ایک چوتھائی فاصلہ سے بائیں کو ہٹی ہوئی ہے کیونکہ $\sin (x + \pi/2) = \cos x$ ہوتا ہے۔ شکل 7–6 اور 8–6 کا موازنہ کرو۔

سوالات

مندرجہ ذیل میں سے ہر ایک کا محیط اور دَور نکالو اور اُن کے گراف بھی کھینچو :

1. $y = 5 \sin 2\pi x$	2. $y = 2 \sin \frac{1}{2}x$
3. $y = 3 \sin \pi x/3$	4. $y = 0.5 \cos 4x$
5. $y = 1.5 \cos \frac{2}{3}x$	6. $y = \sin 6x$

* $-\sin x = \sin (-x)$ ، $\cos x = \cos (-x)$ وغیرہ۔

7. $y = 2\sin(-\frac{1}{4}x)$ ؛ اس کا $y = 2\sin(\frac{1}{4}x)$ سے کیسے موازنہ کیا جا سکتا ہے ؟

8. $y = 2\cos(-\frac{1}{4}x)$ ؛ اس کا $y = 2\cos(\frac{1}{4}x)$ سے کیسے موازنہ کیا جا سکتا ہے ؟

9. $y = -0.5\sin 3t$ 10. $y = 2\sin 0.001\pi t$

11. $y = 100\cos 0.0314t$ 12. $y = \sin 0.0025t$

خمیدہ کے گراف : 14-2. $y = a\sin(kx + b)$ دائری تفاعل کے گراف کھینچنے کی بحث کے ذیل میں زیادہ تعمیمی سائن تفاعل جو کہ مساوات $y = a\sin(kx + b)$ سے متعارف کیا گیا ہے، زیر غور آنا چاہیے۔ ہم یہ نوٹ کر چکے ہیں کہ $\cos x = \sin(x + \pi/2)$ / $\sin x$ سے صرف اس بات میں مختلف ہے کہ یہ $\pi/2$ کے فاصلے سے بائیں طرف کو ہٹا ہوا ہے۔ اسی طرح

$y = a\sin(kx + b) = a\sin k(x + b/k)$ ، $y = a\sin kx$ سے اس بات میں مختلف ہے کہ یہ اُفقی سمت میں صرف b/k فاصلے سے ہٹا ہوا ہے۔ اگر ہم مان لیں کہ $k > 0$ تو یہ تبدیلی یا منتقلی دائیں یا بائیں طرف ہوگی اگر $b/k < 0$ یا $b/k > 0$ ہم $|b/k|$ کو ہیئتی منتقلی یا ہٹاؤ کہیں گے اور b کو فیز (phase) مستقل یا فیز فرق۔ تفاعل کے وہی محیط a اور دوران $2\pi/k$ ہیں۔

$y = a\cos(kx + b)$ کے گراف کو $y = a\cos kx$ کی تعمیم فرض کر کے کھینچا جا سکتا ہے یا بہ حیثیت ایک 'منتقل شدہ' سائن خمیدہ کے۔

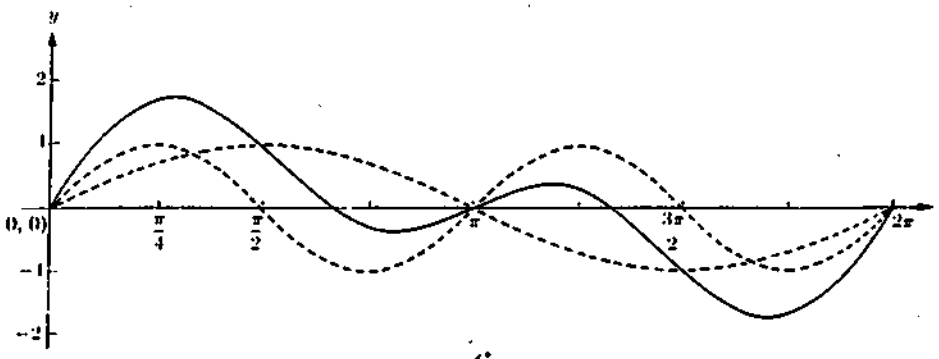
مثال 1 : $y = 4\sin(2x - \pi/3)$ کا گراف کھینچو اور اس کا محیط، دوران اور فیز ہٹاؤ یا منتقلی بناؤ۔

حل : اس تفاعل کا محیط 4 اور دوران π ہے۔ کیوں کہ فیز ہٹاؤ $\pi/6$ ہے (کیوں ؟)، اس کا گراف $(\pi/6, 0)$ نقطہ میں سے گزرے گا اور دائیں سمت جانا جاری رکھتے ہوئے جیسے ہی $(7\pi/6, 0)$ نقطہ سے گزرے گا ایک دَور مکمل کرے گا۔ اس کا گراف شکل 14-2 میں دکھایا گیا ہے۔

مثال 2 : $y = 3\sin x + 4\cos x$ کا گراف کھینچو۔

حل : دفعہ 6-9 کے سوال 5 میں ثابت کیا جا چکا ہے کہ

$$3\sin x + 4\cos x = 5\sin(x + \theta_1),$$



شکل 14-4

کو بے شک اہمیت دینا چاہیے۔ ان میں سے ایک تفاعل کا دَور 2π ہے اور دوسرے کا، اس لیے تفاعل $y = \sin x + \sin 2x$ کا دَور 2π ہوگا۔ مطلوبہ گراف شکل 14-4 میں دیا گیا ہے۔

سوالات

مندرجہ ذیل مساوات سے تعریف کی گئی تفاعل کے گراف کھینچو اور اُن کے محیط، دَور اور ہیئت (فیز) منتقلی بتاؤ:

$y = 4 \sin (x - 1)$	.2	$y = 2 \sin (x - \pi/6)$	.1
$y = 3 \cos (t/2 - 1)$	.4	$y = 0.5 \sin (2x + \pi/8)$	.3
$y = 2 \sin [(t - 1)/3]$	.6	$y = \sin (t + 0.25)$	.5
$y = \sin x + \cos x$	.8	$13y = 5 \sin x + 12 \cos x$	.7
$y = 24 \sin x + 7 \cos x$	.10	$y = 15 \sin x + 8 \cos x$	.9
$y = 0.6 \sin 2x + 0.5 \cos 2x$	.12	$y = 2 \sin x - 5 \cos x$	.11

مندرجہ ذیل تفاعلی مساوات کے گراف تعیّن گر کے جوڑ والے طریقے سے کھینچو اور ہر ایک کا دَور بتاؤ:

$y = \sin x + \cos x$ .13 (اس خمیدہ کو سوال 8 کے ساتھ موازنہ کرو)

$y = 4 \cos x/2 - 3 \sin 2x$	.15	$y = 2 \sin x + 3 \cos 2x$	.14
$y = \sin x + \sin 2x + \sin 3x$	.17	$y = 0.26 \sin x + 0.47 \cos 3x$	.16

ذیل کی تفاعلی مساوات کے گراف کھینچو:

$y = \frac{4}{\pi}\left(\sin x - \frac{1}{3^2} \sin 3x\right)$	.20	$y = 2 (\sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x)$	.18
		$y = \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x$	.19

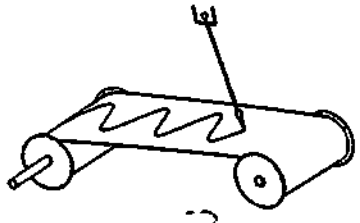
سوال 21 سے 23 تک کی تفاعلی مساوات کے گراف دونوں محوروں پر ایک ہی پیمانہ اخذ کر کے کھینچو:

$y = x - \sin x$	.22	$y = x + \sin x$	.21
		$y = x - 2 \sin x$	.23

24. سوال 21 سے 23 تک میں تفاعل کے صفروں کی تعداد کے متعلق کیا کہا جا سکتا ہے ؟ مساوات (6-64) کی طرف توجہ منعطف کرو!

14-4. **خطّی موسیقی حرکت :** کسی دُوری مظاہر کی بحث کے لیے خطی موسیقی حرکت کا نظریہ بُنیادی ہے۔ اُن اجسام کی مثالیں جو تقریباً خطی موسیقی کے اصولوں کے مطابق حرکت کرتی ہیں یہ ہیں : ایک خطّی لنگر کی لٹکن، متلاطم پانی میں بہتی ہوئی ایک کارک، وائلن کی مرتعش ڈوری پر ایک ذرّہ، دو شاخہ کے شاخہ پر کوئی نقطہ، ایک خطّی صوتی لہر کے گزرنے والے راستہ پر ایک ذرّہ ہُوا، ہلکے زلزلے کے دوران مٹّی کا ایک ذرہ ——— دراصل اگر ایک خطِ مستقیم پر کسی جسم کا مقام d، وقت t پر مساوات $d = a \sin \omega t$ سے معلوم ہو تو یہ جسم خطّی موسیقی حرکت کرتا ہوا قرار دیا جائے گا۔ پس خطّی موسیقی حرکت کی نمایاں خصوصیات کو پہچاننے کے لیے ہمیں صرف اسی دائری تفاعل کی خصوصیات دھیان میں رکھنا چاہئیں۔

خطّی موسیقی حرکت اپنی فطرت میں ارتعاشی ہے۔ جو کہ وقت کے مقرّرہ وقفے کے بعد اپنے آپ کو دُہراتی ہے۔ اس حرکت کا محیط $a \sin \omega t$ یا a کی اعظم قیمت کی مقدار ہے یعنی حرکت کے مرکزی نقطہ سے ہٹاؤ کی مقدار۔ ایک مکمل ارتعاش یا ایک کامل دور میں جو ضروری وقت لگتا ہے دَور کہلاتا ہے $(2\pi/\omega)$۔ خطّی موسیقی حرکت کا تعدّد مکمل اَدوار فی بیانۂ وقت (اکائی وقت) کی تعداد کو کہتے ہیں یعنی $1/(2\pi/\omega)$ یا $\omega/2\pi$ ؛ کسی بھی لمحہ پر ہیئت (فیز) دَور کا وہ کسری حصہ ہے جو کہ اُس وقت گزر گیا جب سے جسم اپنے مرکزی مقام سے مثبت سمت میں گزر چکا ہو۔ دراصل یہ ضروری نہیں ہے کہ جسم کا مقام اُس وقت سے دیا جائے جب $t = 0$ ہو بلکہ کسی بھی وقت t_0 سے لیا جا سکتا ہے۔ اس لیے زیادہ عام مساوات لکھی جائے گی $d = a \sin \omega(t - t_0)$۔ ہم جانتے ہیں

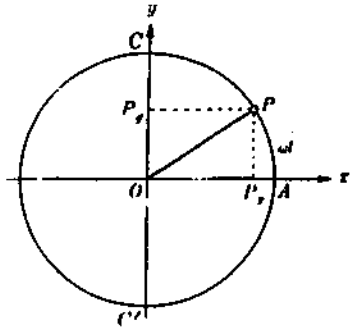


شکل 14-5

کہ یہ زیادہ عام مساوات اُسی تمہیدہ کی نمائندگی کرتی ہے سوائے اس کے کہ یہ t - محور کے ساتھ ساتھ ہٹی ہوئی ہے۔ یہ مساوات بھی خطی موسیقی حرکت کو ظاہر کرتی ہے کیوں کہ اس کو لکھ سکتے ہیں $d = a \sin \omega t'$ جہاں $t' = t - t_0$ کیوں کہ $y = a \sin kt$ اور $y = a \cos kt$ صرف ہیئت (فیز) میں مختلف ہیں $d = a \cos \omega t$ مساوات بھی خطی موسیقی حرکت ظاہر کرنے کے لیے استعمال ہوتی ہے۔

یہ کہنا باعث دلچسپی ہوگا کہ خطی موسیقی حرکت کا گراف براہِ راست ایسی حرکت کے مظاہرے سے حاصل کیا جاسکتا ہے مثلاً ہم ایسے خطی لنگر کے جھولنے کے راستے کو ایک کاغذ کے تختے پر اُتاریں جو ایک مقرّرہ مقام سے مستقل رفتار کے ساتھ حرکت کرتا ہے۔ شکل 14-5 سے یہ واضح ہے کہ کسی لنگر کا مرکزی مقام سے ہٹاؤ وقت کا سائن تفاعل ہے۔

ایک اکائی دائرہ کے محیط کے چاروں طرف یکساں رفتار سے حرکت کرنے والے نقطہ کی تمثیل خطی موسیقی حرکت کی مثالوں میں سے ایک بہت ہی ابتدائی مثال ہے (شکل 14-6) کے اس دائرے پر غور کرو جس کا مرکز O ہے اور نصف قطر 1 ہے۔ اگر نقطہ P کو اس دائرے پر مستقل یا یکساں رفتار سے حرکت کرتا ہوا مان لیا جائے تو P_x یعنی P کا ظل (سایہ) x-محور پر یا P_y یعنی P کا ظل y-محور پر۔ تو سوال یہ پیدا ہوتا ہے کہ P کی حرکت کی قسم کیا ہے؟ مان لو کہ P کی یکساں رفتار دائرے کے گرد اگرد ω اکائی فی سیکنڈ ہے اور P، A سے چلنا شروع کرتا ہے تو P دائرے کے گرد t وقت میں ـــــ جو سیکنڈ میں ظاہر کیا گیا ہو ـــــ ωt فاصلہ طے کرتا ہے۔ پس P_y ایسے چلتا ہے کہ اس کا y مخنص حاصل ہوگا $y = \sin \omega t$ سے اور P کا ظل y-محور پر خطی موسیقی حرکت کرے گا۔ یہ باعث دلچسپی ہوگا کہ



شکل 14-6

جب $t = 0$ ہو تو P_0 مبعد پر ہوتا ہے اور جوں جوں P_0 اوپر کی طرف چلتا ہے اس کی رفتار کم ہوتی جاتی ہے یہاں تک C پر صفر ہو جاتی ہے۔ اب P_0 نیچے کی طرف چلتا ہے۔ اس کی رفتار بڑھتی جاتی ہے یہاں تک کہ جب وہ O سے گزرتا ہے تو اس کی رفتار اعظم ہوتی ہے اور پھر گھٹتی جاتی ہے یہاں تک کہ C' پر صفر ہوتی ہے۔ یہ دوبارہ اوپر کی طرف بڑھتی ہوئی رفتار سے اپنے اُس مقام تک جاتا ہے جہاں سے چلنا شروع کیا تھا تب اسی طرح پوری حرکت دُہرائی جاتی ہے۔ دراصل خطّی موسیقی حرکت میں کسی بھی جسم کی رفتار بتائے ہوئے طریقے سے بڑھتی اور گھٹتی رہتی ہے۔

سوالات

1. شکل 14-6 میں نقطہ P_x کی حرکت کے متعلق کیا کہا جا سکتا ہے؟ کسی وقت t پر اس کا مقام معلوم کرنے کے لیے ایک عبارت (ضابطہ) نکالو۔

2. مندرجہ ذیل مساواتیں خطّی موسیقی حرکت کی نمائندگی کرتی ہیں۔ اُن کے محیط، دور اور تعدّد بتاؤ اور اُن کے گراف کھینچو:

(a) $y = 8 \sin 2x$	(b) $y = 10 \sin (t/3)$
(c) $y = \frac{1}{4} \sin 3t$	(d) $y = 7 \cos 5x$
(e) $y = 4 \sin 2\pi x$	(f) $y = a \sin \omega t$

3. ایک شے ایک خط پر اس طرح حرکت کرتی ہے کہ اس کا ہٹاؤ اُس خط کے کسی مقرّرہ نقطہ سے $d = 2 \sin^2 t$ سے حاصل ہوگا۔ کیا اس حرکت کو خطّی موسیقی حرکت کہہ سکتے ہیں؟ اس کا دَور کیا ہے؟ [اشارہ: کیا $\sin^2 \theta$ کو $\cos 2\theta$ کے ارکان میں ظاہر کر سکتے ہیں؟]

4. بجلی کی رَو کی مقدار ایمپیرس میں ناپی جاتی ہے۔ یہ وہ پیمانہ ہے جو اُن الیکٹرون کی تعداد کے متناسب ہے جو کہ تار کے ایک مقرّرہ نقطہ سے ایک سیکنڈ میں گزرتے ہیں۔ ایک خطّی برق کے لیے بجلی کی یہ مقدار ظاہر کی جا سکتی ہے $I = a_1 \sin \omega t$ سے۔

I کے لیے عبارت بتاؤ اگر محیط 10 ہو اور رَو 60 سائیکل۔ اس عبارت کا گراف کھینچو۔

60 سائیکل رَو (یعنی رو جس کا تعدّد 60 سائیکل فی سیکنڈ ہے) اس وقت ملک میں سب سے زیادہ رائج ہے۔

5. بجلی کا بہاؤ قوت محرّکہ برقی جو وولٹ میں ناپی گئی ہو، پر منحصر ہے۔ ایک مفرد شکل میں لانے

گئے برق رَو کے لیے قوت محرّکہ برقی کے لیے ضابطہ ہوگا

$$E = a_2 \sin \omega t.$$

بتاؤ کہ E کو کے ارکان میں کیسے ظاہر کر سکتے ہیں اگر محیط 8 ہو اور رو 60 سائیکل ہو؟

6. بجلی کی رَو کی طاقت کی مقدار بتّی روشن کرنے کے لیے، حرارت پیدا کرنے کے لیے یا مشین چلانے کے لیے، کسی وقت ، پر اپنی توانائی پر منحصر ہے۔ یہ برقی طاقت عام طور سے کلوواٹ میں ظاہر کی جاتی ہے اور $P = EI$ ضابطہ اسے بتاتا ہے۔ سوال 4 اور 5 میں تذکرہ کیے گئے 60 سائیکل رَو کے لیے ثابت کرو کہ P کو $P = a_1 a_2 \sin^2 \omega t$. کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے۔ اس دَوری تفاعل کا دَور معلوم کرو۔ نوٹ کرو کہ سوال 4 ، 5 اور 6 میں P ، E اور I سب کے سب خطّی موسیقی رویّہ کی مثالیں ہیں۔

7. اگر ایک بانسری دھیمے درمیانی راگ میں بجائی جائے، اس سے جو آواز پیدا ہوگی وہ ایک خطّی موج آواز سے مشابہ ہوگی۔ خطّی موج آواز کی تعریف یہ ہے کہ وہ اہتزاز نگار پر ایک ایسی موج پیدا کرتی ہے جو ایک خطّی موسیقی حرکت سے ظاہر کی جا سکتی ہے۔ یعنی $y = a \sin \omega t$ سے۔ ایسی آواز کے لیے ضابطہ نکالو اور اس کی مساوات کا گراف کھینچو جبکہ اس کا تعدّد 400 سائیکل فی سیکنڈ ہو اور محیط 0.001 انچ۔

8. ایک متحرک صَوتی موج کا دباؤ معلوم ہوگا ذیل کے ضابطے سے

$$p = 10 \sin 200\pi \left(t - \frac{x}{1000}\right)$$ ڈائن/فی سینٹی میٹر

جس میں ، سیکنڈ میں اور x سینٹی میٹر میں دیا گیا ہے۔ دیے گئے مندرجہ ذیل تعیّن گر وقتوں ، پر p کو بہ حیثیت x کے تفاعل کے کشید کرو:

$t = 0, 1/400, 2/400, 3/400$ & $4/400$ سیکنڈ

9. ایک دی ہوئی ڈوری میں متحرک عرضی موج کی مساوات مندرجہ ذیل عبارت سے دی گئی ہے:

$$y = 25 \sin \pi(0.20t - 0.01x),$$

جس میں x سینٹی میٹر میں اور ، سیکنڈ میں دیا گیا ہے۔ اس مساوات کا گراف x کی 10، 25 اور 100 سینٹی میٹر قیمتوں کے لیے کھینچو۔

14-5 . دو عمومی سائن تفاعل کا جوڑ : گراف کھینچنے کے چند تطبیقات کو پورا کرنے کی غرض سے ہم سائن تفاعل کے یکجا کرنے پر غور کریں:

(1) لکھیں دو عمومی ایک ہی دَور والے سائن تفاعل کی نمائندگی ان مساوات سے کی جا سکتی ہے

$$y_1 = a \sin (\omega t + \alpha)$$

اور (14-1)

$$y_2 = b \sin (\omega t + \beta).$$

ان کا محیط a اور b ہیں، ان کی ہیئت (فیز) فرق $\beta - \alpha$ اور ان کا مشترک دور $2\pi/\omega$ ہے۔ ہم یہ ثابت کریں کہ ان ایک ہی دور والے دونوں تفاعل کی حاصل جمع بجائے خود اُسی دور کا سائن تفاعل ہے :

$$\begin{aligned} y = y_1 + y_2 &= a \sin (\omega t + \alpha) + b \sin (\omega t + \beta) \\ &= a (\sin \omega t \cos \alpha + \cos \omega t \sin \alpha) + b (\sin \omega t \cos \beta + \cos \omega t \sin \beta) \\ &= A \sin \omega t + B \cos \omega t, \end{aligned} \tag{14-2}$$

جہاں

$$A = a \cos \alpha + b \cos \beta$$

اور

$$B = a \sin \alpha + b \sin \beta.$$

ہم دھیان دیں کہ

$$A \sin \omega t + B \cos \omega t = r \sin (\omega t + \delta)$$

جس میں

$$r = \sqrt{A^2 + B^2}$$

$$= \sqrt{(a^2 \cos^2 \alpha + 2ab \cos \alpha \cos \beta + b^2 \cos^2 \beta) + (a^2 \sin^2 \alpha + 2ab \sin \alpha \sin \beta + b^2 \sin^2 \beta)}$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta)}$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos (\beta - \alpha)},$$

اور جہاں

$$\sin \delta = \frac{B}{r} \quad \text{اور} \quad \cos \delta = \frac{A}{r}.$$

اس لیے

$$y = a \sin (\omega t + \alpha) + b \sin (\omega t + \beta) = r \sin (\omega t + \delta)$$

جس میں r اور δ کی قیمتیں وہی ہیں جو ابھی دریافت کی گئیں۔

ہم نے ایک اہم مسئلہ ثابت کر دیا۔

مسئلہ 14-1 : ایک ہی دَور والے کتنے دو عمومی سائن خمیدوں کی حاصل جمع بلالحاظ اُن کی ہیئت (فیز) اور محیط کے اُسی دور کی ایک عمومی سائن خمیدہ ہوگی۔

اس نتیجے کو کلیہ کی صورت میں لانے کے لیے ہم اس میں ایک محدود تعداد میں ایک ہی دَور والے عمومی سائن خمیدوں کی حاصل جمع کو شامل کر سکتے ہیں۔ جیسا کہ اس دفعہ کے سوالات ظاہر کریں گے۔ یہ بجلی اور آواز کے میدان میں خصوصی طور پر مفید ہے۔

(2) دو مختلف تعدّد والے عمومی سائن تفاعل کی مساوات، جب وہ $t = 0$ پر ہیئت میں ہوں۔ ذیل کی مساوات سے ظاہر کیا جا سکتا ہے :

$$y_1 = a \sin 2\pi n_1 t \quad \text{اور} \quad y_2 = a \sin 2\pi n_2 t. \tag{14-3}$$

ان دونوں تفاعل کو ترکیب دینے سے نتیجے کے طور پر حاصل ہوا سائن تفاعل ہے $y = y_1 + y_2$ اس لیے

$$y = y_1 + y_2 = a (\sin 2\pi n_1 t + \sin 2\pi n_2 t),$$

اور دفعہ 6-12 کی مساوات (6-54) سے بمعہ $\alpha + \beta = 2\pi n_1 t$ اور $\alpha - \beta = 2\pi n_2 t$ کے

$$y = 2a \sin 2\pi \frac{n_1 + n_2}{2} t \cos 2\pi \frac{n_1 - n_2}{2} t. \tag{14-4}$$

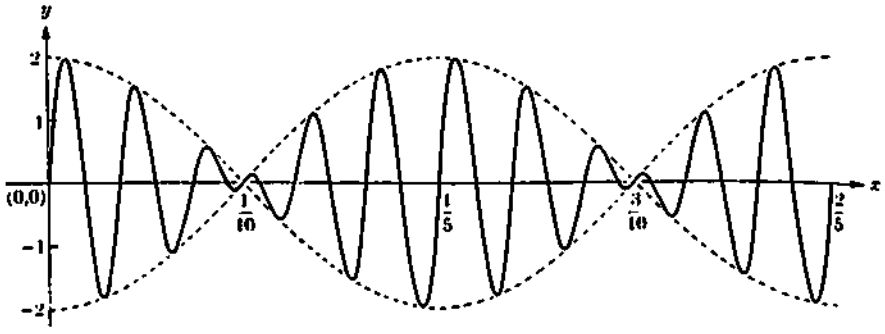
یہ نتیجہ ٹھیک ٹھیک طور پر سائن تفاعل کی نمائندگی نہیں کرتا لیکن یہ چند شرائط کے تحت قریب قریب سائن تفاعل کو ظاہر کرتا ہے۔ اگر $n_1 - n_2$ بمقابلہ n_1 اور n_2 کے چھوٹا ہو تو نتیجے کے طور پر حاصل شدہ مساوات کو بہ حیثیت ایک ایسے "سائن تفاعل جس کا محیط دھیرے دھیرے بدلتا ہو" لے سکتے ہیں۔ مان لو کہ

$$n = \frac{n_1 + n_2}{2}, \qquad \gamma = \frac{n_1 - n_2}{2}$$

پس γ بہ نسبت n کے چھوٹا ہے اور اس کی جگہ رکھنے سے ہمیں حاصل ہوگا

$$y = 2a \cos 2\pi\gamma t \sin 2\pi n t. \tag{14-5}$$

کیوں کہ γ بمقابلہ n کے چھوٹا ہے $\cos 2\pi\gamma t$ بمقابلہ $\sin 2\pi n t$ کے بہت آہستہ آہستہ بدلتا ہے یعنی n تعدّد والے جھول کی تعداد اُس وقت میں جو کہ کوسائن کو ایک دَور جانے میں لگتا ہے بڑی ہے اس لیے نتیجے کے طور پر حاصل شدہ خمیدہ دھیرے دھیرے بدلنے والے محیط کا خمیدہ بن جاتا ہے۔ صوتی امواج کی حالت میں یہی محیط کی دَوری تبدیلی بہ حیثیت "ضربیں" سُنائی دیتی ہیں۔ موج $y = \sin 2\pi n t$



شکل 14-7

کی قیمت 1 یا -1 فی سیکنڈ جتنی بار ہوتی ہے وہ برابر ہے ضربوں کی تعداد فی سیکنڈ کے۔ اصولِ ضرب ریڈیو، ٹیلی ویژن، امواج بے تار برقی، ٹیلی فون اور بلند تعدّد والی بجلی کی رَو کے سلسلے میں استعمال ہوتا ہے۔

: خمیدہ $y = \sin 50\pi t + \sin 60\pi t$ کا گراف کھینچو۔

: مساوات (14-5) کی مدد سے حاصل ہوگا

$$y = \sin 50\pi t + \sin 60\pi t$$
$$= 2\cos 5\pi t \sin 55\pi t.$$

کیوں کہ $\sin 55\pi t$ ہمیشہ 1 اور -1 کے درمیان ہوتا ہے یہ خمیدہ $y = \pm 2\cos 5\pi t$ دونوں خمیدہ کے درمیان ایسے واقع ہوگا کہ اُن کو وہاں مَس کرے گا جہاں $\sin 55\pi t = \pm 1$ اس لیے یہ مَس کرے گا جب $t = 1/110, 3/110, 5/110$ وغیرہ۔ اس کا گراف شکل 14-7 میں دکھایا گیا ہے۔

یہ سمجھنا اہم ہوگا کہ اس بحث کی بُنیاد وہ دو سائن تفاعل ہیں جن کے محیط یکساں ہیں۔ اُس حالت میں جبکہ محیط یکساں نہیں ہیں نہ یہ کہ صرف حاصل کا محیط ہی گھٹتا بڑھتا محیط ہوگا بلکہ تعدّد میں بدلے گا۔ اس طرح اس رویّے کی سائن تفاعل کے رویّے کے ساتھ کوئی مماثلت نہیں ہے۔

سوالات

1. دو ہوائی امواج فضا کے کسی دیے ہوئے نقطے پر اختلافات دباؤ کو مندرجہ ذیل مساوات کے مطابق بتاتی ہیں:

$$p_1 = a\sin 2\pi nt \quad \text{اور} \quad p_2 = a\sin\left(2\pi nt - \frac{2\pi}{3}\right)$$

فضا کے اس نقطے پر حاصل موج کا محیط نکالو۔

2. $y = 4\sin(\theta + \pi/6) + 5\sin(\theta - \pi/3)$ کو $y = r\sin(\theta + \delta)$. کی شکل میں لاؤ۔

3. ایک دَور میں قوت محرکہ برقی E (دفعہ 4-14 کے سوال 5 کی طرف توجہ منعطف کرو) حاصل ہوگا
$E = 80 + 8.2\sin\omega t + 4.8\cos\omega t - 0.8\sin 3\omega t + 1.2\cos 3\omega t$
سے۔ E کو اس شکل میں ظاہر کرو:
$$A_0 + A_1\sin(\omega t + \alpha_1) + A_2\sin(3\omega t + \alpha_2)$$
اور A_0، A_1، A_2 ، α_1 اور α_2 کی قیمت معلوم کرو۔

4. سوال 2 اور 3 کے گراف کھینچ کر دکھاؤ۔ گرافوں کو دفعہ 3-14 کے اُس طریقے سے مکمل کرو جسے کہتے ہیں **تعیّن گروں کی ترکیب یا اصولِ انطباق۔**

5. متحرک امواج بعض اوقات اُن اجسام کی سرحد سے منعکس ہوتی ہیں جن میں وہ حرکت کر رہی ہیں اور اس طرح اُن امواج کو رواج دیتی ہیں جو مخالف سمت میں حرکت کرتی ہیں۔ یہ اصل امواج سے مل کر اصول انطباق کے مطابق منتج (حاصل) موج پیدا کرتی ہے۔ ہَوا کے ایک ایسے کالم پر غور کرو جس میں اصل موج کی مساوات ہے
$$y_1 = a\sin 2\pi n\left(t - \frac{x}{V}\right)$$
اور منعکس موج کی مساوات ہے
$$y_2 = a\sin 2\pi n\left(t + \frac{x}{V}\right).$$
منتج (حاصل) موج ہے $y = y_1 + y_2$ ، دفعہ 6-12 کی مساوات (6-54) اور $\alpha + \beta = 2\pi n(t - x/V)$ اور $\alpha - \beta = 2\pi n(t + x/V)$ کی مدد سے ثابت کرو کہ
$$y = 2a\sin 2\pi nt\cos\frac{2\pi nx}{V}.$$
یہ نام نہاد (مفروضہ) مساوات مقیم موج کی ہے۔ اس کو اس نام سے اس لیے موسوم کیا ہے کہ اس جسم کے کچھ مخصوص مقامات پر جس میں یہ امواج حرکت کرتی ہیں، y کی قیمت ہمیشہ صفر

رہتی ہے۔ x کی یہ قیمتیں وہ ہیں جن کے لیے $\cos 2\pi nx/V$ صفر کے برابر ہے۔ یعنی

$$\frac{2\pi nx}{V} = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{3\pi}{2}, \quad \frac{5\pi}{2}, \text{ وغیرہ}$$

x کی کسی قیمت کے لیے y صفر کے برابر ہوگا؟ یہ نوٹ کرنا دلچسپ ہوگا کہ یہ حاصل موج کسی دیے وقت t پر x میں ایک خطی موسیقی عبارت ہے۔ کسی مقام x پر یہ t میں ایک خطی عبارت کی نمائندگی کرتی ہے۔ تمام آلاتِ موسیقی میں آواز بذریعہ مقیم امواج پیدا کی جاتی ہے۔

اس دفعہ کے (2) میں بیان کیے گئے طریقے کے استعمال سے مندرجہ ذیل کے گراف کھینچو :

6. $y = \sin 200t + \sin 210t$ 7. $y = \sin 80t + \sin 100t$

14-6. موسیقیہ تجزیہ اور ترکیب : سائن (sine) اور کوسائن (cosine) خمیدہ کی متناہی حاصل جمع کو ریاضیاتی طور پر کسی بھی دوری جزو میں مسلسل* خمیدہ کے تقریباً برابر ثابت کیا جاسکتا ہے جہاں حاصل جمع میں ادنا تعدد خود خمیدہ کے دَور کو وقوع میں لاتا ہے جبکہ باقی ماندہ ارکان کے تعدد ادنا کے عدد صحیح اضعاف ہوں گے۔ کسی خمیدہ یا تفاعل کے تجزیہ کرنے کا یہ بے حد سودمند طریقہ جسے موسیقیہ تجزیہ کہتے ہیں کا سب سے پہلے جے۔ بی۔ جے۔ فوریر (J. B. J. Fourier) نے 1807 میں اعلان کیا تھا۔ اور 1822 میں پیرس میں پہلی دفعہ شائع کیا گیا تھا۔ یہ اُمید کی جاسکتی ہے کہ اس طریقے کا انکشاف صوتی اور حرکی امواج کے مطالعے کے ذریعے کیا گیا ہوگا لیکن اگرچہ ان مطالعوں میں یہ نتیجہ بے حد سودمند ہے درحقیقت یہ اصول فوریر کے مطالعہ ایصالِ حرارت کے دوران منکشف ہوا تھا۔

مسئلہ فوریر کو کسی دَوری خمیدہ y کے لیے ریاضیاتی شکل میں اس تقریباً صحیح تساوی سے ظاہر کرسکتے ہیں

$$y \approx a_0 + a_1 \sin\theta + a_2 \sin 2\theta + a_3 \sin 3\theta + \cdots + a_n \sin n\theta$$
$$+ b_1 \cos\theta + b_2 \cos 2\theta + b_3 \cos 3\theta + \cdots + b_n \cos n\theta.$$

اس عبارت میں y اصل خمیدہ کا، x کی کسی خاص قیمت کے لیے، تعین گر ہے اور θ جو x کے ارکان

---

* ایسا خمیدہ جو x-محور کے ایک وقفہ پر واضح کیا گیا ہو وجدانی مضمون میں "خمیدہ کے اجزا" پر مشتمل ہے۔ اس ریاضیاتی معیار پر کوئی فنی تعریف دینا ناممکن ہے۔

میں ظاہر کیا جائے تو $2\pi x/L$ ہے۔ اس طرح x کی قیمتوں کا استعمال جن کا سلسلہ 0 سے L تک ہو جہاں L منحنی کا دَور ہو اس بات کے ہم قدر ہے کہ θ کی سعت 0 سے 2π تک ہو۔ a_0 کے علاوہ، جو صرف مکمّل منحنی کے اصل حوالہ محور سے ہٹاؤ کو بتاتا ہے۔ فرداً فرداً ہر ایک سائن اور کوسائن منحنی مخلوط منحنی میں شامل ہیں۔ ضمنی طور پر ہم یہ تذکرہ کر دیں کہ ایسی مشینیں بھی ہوتی ہیں جنھیں موسیقیہ تجزیہ گر کہتے ہیں جن سے کسی دی ہوئی منحنی کے تمام فوریر ضریب کے لیے عبارت حاصل کر سکتے ہیں یعنی منحنی سے جو بہ حیثیت ایک نقشہ کے ہے یہ ممکن ہے کہ اس مشین کے ذریعے اس منحنی کی مساوات حاصل کر لیں۔

اس تجزیاتی عمل کا عکس بھی جس پر ہم نے بحث کی ہے فائدہ مند ہے۔ یہ عمل موسوم بہ موسیقیہ ترکیب کو اس طرح بیان کیا جا سکتا ہے کہ اس میں مختلف خطی منحنیات کو باہم ترکیب دے کر ان کا حاصل یا مخلوط منحنی حاصل ہو جائے۔ بعض حالات میں یہ حسابات سے بھی مکمّل کیا جا سکتا ہے۔ یہ ہمیشہ گو صرف تقریباً ٹھیک ٹھیک طور پر گرافیکل (بذریعہ گراف) طریقے کے ذریعے فرداً فرداً منحنی ناپے ہوئے تعیّن گر کو جوڑ کر حاصل شدہ تعیّن گر کو دفعہ 3-14 کے موزّہ طریقے سے پلاٹ کر کے مکمّل کیا جا سکتا ہے۔

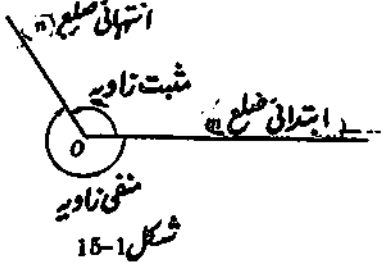
موسیقیہ تجزیہ کے استعمال سے مختلف میدانوں میں بڑی بڑی ترقیاں کی گئی ہیں۔ سُریلی صوتی لہروں کے مطالعے میں مختلف آلات موسیقی کے سُر ریکارڈ کیے گئے ہیں۔ اُن کی لہروں کو اہتزاز نگار پر حاصل کر کے اُن کے ماحصل پر ریاضیاتی طور پر موسیقیہ تجزیہ کے ذریعے بحث کی گئی ہے۔ اس مطالعے کا ایک نتیجہ برقی آرگن کا ارتقا تھا۔ علم زلزلیات میں جو کہ زلزلے کے ماخذ اور مظاہر سے متعلق ہے زلزلے کی ارتعاشی حرکت کی فطرت اور نتیجے کے طور پر حاصل لہری شکل کی وجہ سے موسیقیہ تجزیہ کو کام میں لیا جاتا ہے۔ جب ارتعاش بڑے پیمانے پر نہیں ہوتے ہیں تو حرکت لازمی طور پر خطی موسیقی حرکت ہوتی ہے زیادہ عمومی کیفیت میں مخلوط لہر ہوتی ہے۔ لہریں ایک ایسے آلے سے ریکارڈ کی جاتی ہیں جس کا نام زلزلہ نگار ہے اور اس اندراج (ریکارڈ) سے ہر ارتعاش کا محیط، حرکت کی سمت، دورانیت کی مقدار کا تخمینہ لگایا جا سکتا ہے۔ موسیقیہ تجزیہ اور ترکیب کو مدوجزر کی پیشین گوئی کے لیے استعمال کیا جاتا ہے۔ ممالک متحدہ کے محکمۂ ساحل اور ارض پیمائی (U. S. Coast and Geodetic Survey) کا ایک اہم کام مدوجزر کے سالانہ کیلنڈر کی تیاری اور اس کو شائع کرنا ہے۔ یہ "مدوجزر کا جدول" جو ایک یا دو سال پیشگی جاتا ہے دُنیا کے تقریباً سبھی اہم بندرگاہوں پر انتہائی جذر اور انتہائی حد کی پیشین گوئی کرتا ہے۔ پیشین گوئی کی ہوئی وقوعہ کا وقت قریب ترین منٹ تک صحیح ہوتا ہے اور اونچائی فٹ کے دسویں حصّے تک صحیح ہوتی ہے۔ یہ پیشین گوئیاں دائری تفاعل کو چاند اور سورج کی دَوری حرکات کے سلسلے میں استعمال کر کے میکانکی طور پر کی جاتی ہیں۔

باب 15

دائری تفاعلوں کا زاویوں پر اطلاق

دائری تفاعلوں کے دو قسم کے اطلاق ہی اہم ہیں۔ گزشتہ باب میں ہم نے عمومی قسم کے اطلاق پر بحث کی تھی۔ ایک زائد خصوصی قسم اُن تفاعلوں کی ہے جن میں حقیقی عدد θ ایک زاویہ کا ناپ ہو۔ اس باب میں ہم اس اطلاق کو زیرِ غور لائیں گے اور اس کے ساتھ مثلثوں کے حل اور مثلث کے اضلاع و زاویوں کے درمیان رشتہ قائم کریں گے۔ یہ ہم ایک زاویہ کے تصوّر سے شروع کریں گے۔

15-1 . زاویہ : خطی جیومیٹری میں زاویہ کی عام طور سے تعریف اس طرح کی جاتی ہے کہ وہ ہیئت (وضع تشکیل) جو ایسے دو نیم خطوط (شعاعوں) پر مشتمل ہو جو ایک مرکز سے اشعاعی ہوں ——— بہرحال مثلثات میں اس تعریف میں ہم یہ اور جوڑ دیتے ہیں کہ وہ زاویہ جو دو نیم خطوط سے واضح کیا گیا ہو کا ناپ اُس گردش کی مقدار کے برابر ہوتا ہے جو اُن میں سے ایک شعاع کو اپنے مقام سے دوسرے خط تک جانے کے لیے مطلوب ہو۔ شکل 15-1 پر غور کرو جس میں دو خطوط m اور n ایک دوسرے کو O پر قطع کرتے ہیں اور اُس سطح پر واقع ہیں جو ہمارے خطِ نظر کو عمودی ہو۔ اگر ہم زاویہ کی راس O لے کر m کو بہ حیثیت ابتدائی ضلع کے متصوّر کریں اور n کو بہ لحاظ انتہائی ضلع تو ابتدائی ضلع m کی گردش



شکل 15-1

کے لیے دو ممکن سمتیں ہیں۔ زاویہ مثبت کہلائے گا اگر گردش گھڑی کی سُوئیوں کی گردش کے خلاف سمت ہو اور منفی اگر گھڑی کی سُوئیوں کی سمت۔ ایک ٹیڑھا تیر گردش کی سمت بتاتا ہے۔

اب ہم ایک شعاع m پر غور کریں جو مستطیل نما نظامِ منصفات کے مبدا سے جاری ہو کر مثبت x-محور سے منطبق ہوتی ہے (شکل 15-2)۔ جب یہ شعاع گردش کرتی ہے تو 'm' پر کوئی بھی نقطہ P، OP نصف قطر والے دائرے کا کُل محیط یا اس کا ایک حصّہ کا عکس اتارے گا۔ درحقیقت محیط کا عکس کئی دفعہ بھی اُتر سکتا ہے۔ گردش کے بعد، OP کسی مقام OP' پر ہوگا جہاں کہ دائری قوس $\overset{\frown}{PP'}$ جسے s سے ظاہر کرتے ہیں زاویہ POP' کے ناپ کے لیے استعمال کرتے ہیں۔ ایسا زاویہ جیسا کہ POP' ہے معیاری مقام میں کہلائے گا اور اُس ربع میں ہوگا جس میں اس کا انتہائی ضلع $\overline{OP'}$ واقع ہوگا۔

زاویہ کی مقدار ناپنے کے لیے سب سے قابلِ تسلیم ناپ کی اکائی اُن چکّروں کی تعداد ہوگی جو کسی زاویہ کے لیے ابتدائی ضلع سے انتہائی ضلع تک گردش کرنے میں لگائے جائیں گے کیوں کہ کسی زاویہ کے چکّروں کی تعداد اُس نسبت سے دریافت ہوتی ہے جو دائرہ کے محیط اور s لمبائی والے قطع کیے گئے دائری قوس کے درمیان ہوتی ہے۔ اس لیے مندرجہ ذیل تعریف کرتے ہیں۔

تعریف 15-1 : ایک زاویہ کی قدر گردشوں میں اس تعلق سے معلوم ہوتی ہے :

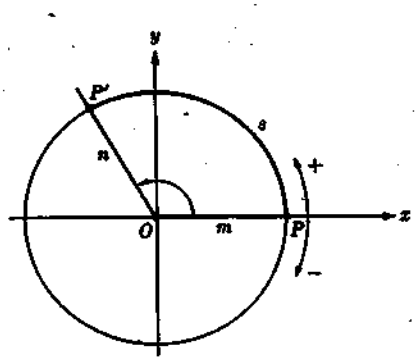
$$\boxed{\text{زاویہ}^{*}\text{ گردشوں میں} = \frac{s}{2\pi r}.} \qquad (15\text{-}1)$$

مثلاً اگر $\overset{\frown}{P}$ محیط کا نصف قوس کا عکس اُتارتا ہے تو مطابق زاویہ ایک گردش کا نصف ناپا جاتا ہے۔ اسی طریقے سے اگر قوس محیط کا دوگنا ہوتا ہے تو زاویہ کا ناپ دو گردش ہوگا۔

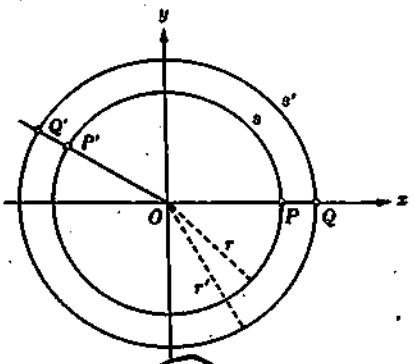
شکل 15-3 کے O مرکز والے دو ہم مرکز دائروں پر غور کریں جس میں $\overset{\frown}{PP'}$، s لمبائی کا قوس اُس دائرہ پر ہے جس کا نصف قطر r ہے اور $\overset{\frown}{QQ'}$ جو s' لمبائی کا قوس ہے اُس دائرہ پر ہے جس کا نصف r' ہے۔ یہ وجدانی طور پر واضح ہوگا کہ ہر ایک قوسی لمبائی اپنے مطابق محیط کا یکساں حصّہ ہے۔ اس لیے

$$\frac{s'}{2\pi r'} = \frac{s}{2\pi r}.$$

* کیوں کہ ہم اکثر زاویہ کے بجائے زاویہ کی قدر پر غور کرتے ہیں ہم عموماً "زاویہ کے ناپ" کی جگہ لفظ "زاویہ" ہی استعمال کریں گے۔



شکل 15-2



شکل 15-3

اس کو اس مسئلہ کی مدد سے ثابت کیا جا سکتا ہے کہ متماثل مثلث کے اضلاع متناسب ہوتے ہیں۔ اگر ہم دفعہ 4-6 والی قوسی لمبائی کی تعریف یاد کریں تو $s/r = s'/r'$ اور ہمارا نتیجہ نکل آئے گا۔ اس طرح کسی بھی زاویہ کی قدر اُس کی ابتدائی یا انتہائی اضلاع کی لمبائی سے متبوع ہے۔

اگرچہ زاویوں کو ناپنے کا قدرتی طریقہ گردشوں کے استعمال سے ہے، دوسرے اور زیادہ آسان طریقے بھی ہیں عملی کام میں مثلاً ارض پیمائی (surveying) اور جہاز رانی کے عملی کام میں بالعموم سب سے زیادہ استعمال ہونے والا نظام ستینی نظام (sexagesimal system) ہے جس میں ڈگری بنیادی اکائی ہے۔ اس نظام میں ایک گردش $= 360°$ (ڈگری)، $1° = 60'$ (منٹ) اور $1' = 60''$ (سیکنڈ) ہے۔

تعریف 15-2 : کسی زاویہ کا ڈگری میں ناپ اس تعلق سے حاصل ہوگا

$$\text{ڈگری میں زاویہ} = (\text{گردش کی تعداد}) \quad (360°). \qquad (15\text{-}2)$$

---

* ناپنے کے لیے ڈگری کے استعمال کے ماخذ پر او۔ نیوجیبوئر (O. Neugebauer) نے "اسٹڈیز آف دی ہسٹری آف سائنس" (Studies of the History of Science) میں بحث کی ہے۔ فیلڈیلفیا: پینی سلوانیا یونیورسٹی پریس 1941 ۔ دوصد سالہ کانفرنس، "قدیم علم فلکیات" (Ancient Astronomy) پرباب، صفحہ 16 ۔

مثلاً ایک گردش کا نصف $180°$ ہے یا دو گردش والا زاویہ $720°$ ہے۔

علم الاحصا اور دوسری زیادہ ترقی یافتہ ریاضیات میں جو نظام مستعمل ہے وہ نیم قطر یہ (ریڈین) نظام ہے۔ اگر ہم یاد کریں کہ ایک اکائی دائرہ کا محیط 2π ہوتا ہے تو مندرجہ ذیل تعریف کی وجہ ہماری سمجھ میں آجائے گی۔

تعریف 15-3 : ایک گردش والا زاویہ اُس زاویہ کے برابر ہے جس کا ناپ 2π ریڈین ہوگا۔ ہم فوراً ہی دیکھتے ہیں کہ

$$\text{ریڈین میں زاویہ} = (\text{گردشوں کی تعداد})\ (2\pi). \qquad (15\text{-}3)$$

مثلاً نصف گردش π ریڈین کے برابر ہے یا دو گردشوں کا زاویہ 4π ریڈین ہوگا۔ ریڈین ناپ کی تعریف کی وجہ قطعی واضح ہونا چاہیے۔ ریڈین میں کسی زاویہ کا ناپ بعینہٖ وہ حقیقی عدد θ ہے جس کے لیے تمام دائری تفاعل واضح کیے جا چکے ہیں۔ اسی وجہ سے ہم ایک حقیقی عدد θ کی قیمت دائری تفاعل میں نکالتے وقت ضمیمہ میں دیے گئے جدول I سے ریڈین سے نامزد کا کام کو استعمال کر سکتے تھے۔ اس لیے اب ہمیں یہ سمجھ لینا چاہیے کہ جب کبھی کسی زاویہ کے ناپ میں اُس کی اکائی نہ دی گئی ہو تو اُس کا ناپ ریڈین میں سمجھنا چاہیے۔

ان تعریفوں سے فوری طور پر دو نتیجے برآمد ہوتے ہیں۔ مساوات (15-2) اور (15-3) کو تعداد گردش کے لیے حل کر کے اور برابر رکھ کر ڈگری میں ظاہر کیے ہوئے زاویہ اور ریڈین میں دیے ہوئے زاویہ کے درمیان تعلق دریافت ہوگا

$$\frac{\text{زاویہ ڈگری میں}}{360°} = \frac{\text{زاویہ ریڈین میں}}{2\pi} \qquad (15\text{-}4)$$

مثال 1 : $45°$ کا زاویہ برابر ہوگا

$$\frac{45°}{360°}\,2\pi = \frac{\pi}{4}$$ ریڈین

مثال 2 : $5\pi/6$ ریڈین کا زاویہ

$$\frac{5\pi/6}{2\pi}\,360° = 150°.$$

مثال 3 : ایک ریڈین کے زاویہ کو ڈگریوں میں ظاہر کرنے کے لیے وہی طریقہ استعمال ہوگا

$$1 \text{ ریڈین} = \frac{1}{2\pi} 360^\circ = \frac{360^\circ}{2\pi} = 57^\circ 18' \text{ (تقریباً)} \qquad (15\text{-}5)$$

اسی طریقے سے 1 ڈگری والے زاویے کے لیے

$$1^\circ = 2\pi\left(\frac{1^\circ}{360^\circ}\right) = 0.01745 \text{ ریڈین (تقریباً)} \qquad (15\text{-}6)$$

مثال 4 : $194^\circ 23'$ کے ایک زاویہ کو ریڈین ناپ میں تبدیل کرو۔

حل : ضمیمہ کے جدول I میں زاویہ ڈگری اور ریڈین دونوں میں دیے گئے ہیں۔ ہم اس جدول کو ایک نظام سے دوسرے میں تبدیلی کے لیے استعمال کر سکتے ہیں۔ کیوں کہ

$$194^\circ 23' = 180^\circ + 14^\circ 23',$$

$14^\circ 23'$ پر عمل کریں۔

$$14^\circ 20' = 0.2502 \text{ ریڈین}$$

اور

$$14^\circ 30' = 0.2531 \text{ ریڈین}$$

کیوں کہ $23'$ ، $30'$ اور $20'$ کے فرق کا 0.3 ہے۔ مطلوبہ زاویہ کا ریڈین بھی ناپ 0.2502 سے 0.2531 اور 0.2502 کے فرق سے 0.3 زیادہ ہوگا۔ یا خطی اِدراج سے

$$14^\circ 23' = 0.2511 \text{ ریڈین}$$

اس لیے

$$194^\circ 23' = (\pi + 0.2511) \text{ ریڈین}$$

$$= 3.3927 \text{ ریڈین (تقریباً)}$$

دوسرا نتیجہ زاویوں کے ناپنے میں ریڈین نظام کا ایک اور فائدہ ظاہر کرتا ہے۔

ہم ایک دائری قوس کی لمبائی ریڈین میں ناپے گئے مرکزی زاویہ اور اُس کے نصف قطر کے ارکان میں ظاہر کر سکتے ہیں۔ مساوات (15-3) میں مساوات (15-1) سے اُس کی جگہ بدل کر رکھ کر حاصل ہوگا

$$\text{ریڈین میں زاویہ} = \frac{s}{2\pi r}(2\pi) = \frac{s}{r}.$$

اس لیے ایک r نصف قطر والے دائرے میں ایک دائری قوس s کی لمبائی جس کو مرکزی زاویہ (جو ریڈین میں ناپا گیا ہے) نے کاٹا ہو ہمیں مندرجہ ذیل سے حاصل ہوگی

$$\boxed{s = r\theta.} \qquad (15\text{-}7)$$

نوٹ کریں کہ اگر ہم لمبائی ایسے اکائی دائرے پر جس کا نصف قطر 1 ہو ناپیں تو $\theta = s$ ہونا چاہیے۔

مثال 5 : ایک دائرے کا نصف قطر 40 انچ ہے

(a) $36°$ والے مرکزی زاویہ کے قوس کی لمبائی کیا ہوگی؟

(b) وہ مرکزی زاویہ کتنا بڑا ہوگا جو 15 انچ کا قوس بناتا ہے؟

حل : (a) کیوں کہ $36°$ کے مطابق ریڈین کی تعداد $\pi/5$ ہوگی

$$s = 40\left(\frac{\pi}{5}\right) = 8\pi \text{ انچ}$$

اگر π کا تقرب استعمال کریں تو اب کسی بھی چاہی گئی درستی کے درجے تک لکھا جا سکتا ہے۔

(b) $s = r\theta$ کے استعمال سے ہمیں حاصل ہوگا $15 = 40\theta$ یا ریڈین $\theta = \frac{3}{8}$

اگر جواب ڈگری میں رکھنا ہو تو ہم $\frac{3}{8}$ ریڈین کو صرف ڈگری میں تبدیل کر دیں جس سے $21°30'$ حاصل ہوگا۔

سوالات

1. ایک مستطیل نما مختصاتی نظام میں مندرجہ ذیل زاویوں کا معیاری مقام بتاؤ اور ابتدائی اور انتہائی اضلاع دکھاؤ۔ زاویہ کے ناپے جانے کی سمت ایک ٹیڑھے تیر سے دکھاؤ :

(a) $\frac{1}{4}$ دوری گردش (چکر) (b) $(-\frac{3}{4})$ چکر (c) 3 چکر (d) $\frac{5}{8}$ چکر

(e) $(-\frac{1}{8})$ چکر (f) $(-\frac{5}{4})$ چکر (g) $\frac{5}{8}$ چکر (h) $(-\frac{5}{8})$ چکر

2. ذیل کے ڈگری میں دیے گئے زاویوں کے لیے سوال 1 کا عمل دہراؤ :

(a) $45°$ (b) $135°$ (c) $-225°$ (d) $-300°$
(e) $240°$ (f) $450°$ (g) $720°$ (h) $-120°$

3. مندرجہ ذیل زاویوں کے لیے جو ریڈین میں ظاہر کیے گئے ہیں سوال 1 کا عمل دہراؤ :

(a) $\pi/6$ (b) $2\pi/3$ (c) $\pi/4$ (d) $4\pi/9$
(e) $-3\pi/2$ (f) $-5\pi/6$ (g) $5\pi/12$ (h) -5π

4. سوال 1 اور 2 کے زاویوں کو ریڈین ناپ میں ظاہر کرو۔ جواب π کے ارکان میں نکالو۔

5. سوال 2 اور 3 کے زاویوں کو چکر کے ناپ میں ظاہر کرو۔

6. سوال 1 اور 3 میں دیے گئے زاویوں کو ڈگری میں نکالو۔

7. ذیل کے زاویوں کو ریڈین میں تبدیل کرو۔ اگر ضرورت ہو تو جدول 1 کا استعمال کرو اور جواب اعشاریہ کے چار مقامات تک نکالو :

(a) 27° (b) 156°20′ (c) 47°
(d) 189°32′ (e) 253°10′ (f) −378°49′

8. مندرجہ ذیل زاویوں کو ڈگری اور منٹ میں تبدیل کرو۔ اگر ضرورت ہو تو جدول I کی مدد لو اور جواب قریب ترین منٹ تک نکالو :

(a) π/8 (b) −2π/13 (c) 0.2443 (d) −1.3730
(e) 1.8600 (f) $\frac{8}{9}$ (g) −1.2900 (h) 5.7200

9. مندرجہ ذیل میں سے ہر ایک کو ایسے واحد زاویہ میں ڈگری اور منٹ میں ظاہر کرو جو 0° اور 59′ کے درمیان ہوں :

(a) 15°27′ + 32°14′ (b) 18°41′ + 15°12′
(c) 13°32′ + 37°28′ (d) 142°5′ + 8°55′
(e) 29°43′ + 51°38′ (f) 61°19′ + 23°58′
(g) 180° − 15°13′ (h) 90° − 47°38′
(i) 360° − 147°23′ (j) 270° − 63°48′
(k) $\frac{1}{2}$(18°47′ + 56°29′) (l) $\frac{1}{4}$(56°28′ − 47°36′)

10. اگر 20 فٹ لمبا قوس ایک دائرے کے مرکز پر 2 ریڈین کا زاویہ بناتا ہے تو اُس کا نصف قطر نکالو۔

11. اگر 2 فٹ نصف قطر کا پہیّا 3 فٹ لڑھکتا ہے تو یہ کتنے ریڈین گھوما؟ کتنی ڈگری گھوما؟

12. ایک 14 انچ نصف قطر والے دائرے میں سے 82° کا مرکزی زاویہ کتنا لمبا قوس قطع کریگا؟

13. ایک گھڑی کے منٹ اور گھنٹے کی سُوئیوں کے درمیان ذیل کے اوقات پر کتنی ڈگری کا زاویہ ہوگا؟

4:00 بجے؟ 1:00 بجے؟ 9:15 پر؟ 5:47 پر؟

14. یہ مان کر کہ زمین کا نصف قطر 3960 میل ہے۔ زمین کی سطح پر کولمبس اور ہیو سے خطِ استوا تک کا فاصلہ نکالو۔ کولمبس کا عرض بلد 40° ہے۔

15. ایک 20 انچ قطر والے پہیّے کے محیط پر واقع ایک نقطہ 3000 فٹ فی منٹ طے کرتا ہے تو ایک سیکنڈ میں پہیّا کتنے نیم قطر یہ گھومے گا؟

16. چھوٹے زاویوں کے لیے قطع کیے گئے قوس اور اُس کے وتر کی لمبائی تقریباً برابر ہوتی ہے۔ یہ مان کر کہ زمین سورج کے گرد 93,000,000 میل کے نصف قطر والے دائرے میں گھومتی ہے۔ سورج کا قطر معلوم کرو اگر یہ زمین پر 32′ کا زاویہ بناتا ہے۔

15-2 . زاویوں کے دائری تفاعل : ہم نوٹ کر لیں کہ کسی زاویے کا ریڈین ناپ وہ حقیقی عدد θ ہے جس کے لیے بنیادی طور پر دائری تفاعلوں کی تعریف کی گئی تھی۔ اس تلازم یا تطابق سے ہم θ کے کسی بھی دائری تفاعل کی تعریف کر سکتے ہیں جس میں θ اس زاویے کا ریڈین میں ناپ ہو جیسا کہ دائری تفاعل حقیقی عدد θ کا۔

تعریف 15-4 : اگر $\theta \in R$ تو کسی بھی زاویے کا دائری تفاعل جس کا ریڈین ناپ θ ہو اُس θ کے دائری تفاعل کے برابر ہوگا۔

تمثیلات : (a) اگر A ایک ایسا زاویہ ہے جس کا ناپ $45°$ یا $\pi/4$ ریڈین ہے تو

$$\begin{aligned}\sin A &= \sin 45° \\ &= \sin (\pi/4 \text{ ریڈین}) \\ &= \sin \pi/4 = 1/\sqrt{2}.\end{aligned}$$

(b) اگر B ایک ایسا زاویہ ہے جس کا ریڈین ناپ 1 ہے تب

$$\begin{aligned}\tan B &= \tan (1 \text{ ریڈین}) \\ &= \tan 57°18' \quad (\text{دیکھو دفعہ 1-15 کی مثال 3}) \\ &= \tan 1.\end{aligned}$$

اگر $\sin \pi/4$ یا $\tan 1$ لکھے جائیں تو متن سے یہ واضح ہونا چاہیے کہ آیا ریڈین ناپ میں کسی زاویے کا تفاعل مقصود ہے یا کسی حقیقی عدد کا۔ دوسری کتابوں کی طرح ہم اپنے علامتی اظہار کو زیادہ پیچیدہ نہ بنانے کی غرض سے $\sin \pi/4^{(r)}$ کی جگہ صرف $\sin \pi/4$ لکھیں گے جس سے اُس زاویے کے سائن (sine) کا اظہار بھی مقصود ہوگا جس کے زاویے کا ریڈین ناپ $\pi/4$ ہے وغیرہ۔

تعریف 15-4 کی بنا پر ہم کسی بھی زاویے کے دائری تفاعل معلوم کر سکتے ہیں خواہ وہ ریڈین میں ظاہر کیا گیا ہو یا ڈگری میں۔ کچھ حالات میں مخصوص زاویوں کے تفاعل جیسا کہ دفعہ 4-6 میں ہے ٹھیک ٹھیک قیمت دیتے ہیں لیکن عام طور پر دفعہ 13-6 کی بحث کے مطابق جدول I کا استعمال ضروری ہوگا۔ درحقیقت خطی ادراج بھی واقعی کبھی ضروری ہو سکتا ہے۔

مثال 1 : $\sin 330°$ کی ٹھیک قیمت معلوم کرو۔

حل : کیوں کہ $330°$ کا زاویہ $= 1$ اُس زاویے کے جس کا ناپ ریڈین پیمانہ میں $11\pi/6$ اس لیے ہم کہہ سکتے ہیں کہ $\sin 330° = \sin 11\pi/6 = -\frac{1}{2}$

مثال 2 : $\cos 23°10'$ کی قیمت دریافت کرو۔

حل : اگر ہم جدول I کے کالم اوّل میں جس میں "ڈگری" لکھا ہے دیکھیں تو ہمیں ملے گا $23°10'$ دفعہ 13-0 میں بیان کیے گئے طریقے کی طرح ہم کوسائن (cosine) کالم کے تحت $23°10'$ کی قطار میں دیکھیں تو ہمیں ملے گا 0.9194 اس لیے $\cos 23°10' = 0.9194$ کے۔

سوالات

مندرجہ ذیل میں سے ہر ایک کی درست (ٹھیک) عددی قیمت نکالو :

1. $\sin 120° \cos 150° + \cos 120° \sin 150°$
2. $\csc 150° - \cos 240° + \tan 120°$
3. $\sin 330° \cos 120° \tan 135°$
4. $\sin 150° \cos 120° \tan 225°$

$0°$ اور $360°$ کے درمیان ڈگری میں ظاہر کیے گئے وہ تمام زاویے نکالو جو مندرجہ ذیل مساوات میں سے ہر ایک کو مطمئن کر سکیں :

5. $\sin \theta = \frac{1}{2}$
6. $\cos \theta = -\frac{1}{2}$
7. $\tan \theta = 1/\sqrt{3}$
8. $\sin \theta = -\sqrt{3}/2$
9. $\tan \theta = -1$
10. $\cos \theta = -\sqrt{2}/2$
11. $\sin \theta = \sqrt{2}/2$
12. $\sec \theta = 2$
13. $\cot \theta = -\sqrt{3}$
14. $\csc \theta = 2/\sqrt{3}$

15. ہر ایک کی تخمینی قیمت نکالو اور معلوم کرو کون سی بڑی ہے :

(a) $\sin 2$ اور $\sin 2°$ (b) $\cos 4$ اور $\cos 4°$ (دیکھو تمثیل b)

(c) $\tan 1$ اور $\tan 1°$

16. $\sin 624°$ کو ایک مثبت زاویہ حادّہ جو $45°$ سے کم ہو کے تفاعل میں ظاہر کرو۔

[اشارہ : کیوں کہ $624° = 6.90° + 84°$ ، مساوات (6-34) کے استعمال سے ہمیں حاصل ہوگا $\sin 624° = -\sin 84°$ ، مساوات (6-22) سے $-\sin 84° = -\cos 6°$ ڈگری اور ریڈین پیمانہ کے تعلّقات کو مدّ نظر رکھتے ہوئے دفعہ 6-10 پر نظر ثانی کرنا ایک دانش مندانہ فعل ہوگا۔]

17. مندرجہ ذیل میں سے ہر ایک کو $45°$ سے کم والے مثبت زاویہ حادّہ کے تفاعل کی حیثیت سے ظاہر کرو :

(a) sin 196° (b) cos 147°
(c) sin 319° (d) cos 254°
(e) tan 294° (f) cos 728°
(g) sin (−625°) (h) cos (−435°)

18. مندرجہ ذیل میں سے ہر ایک کو 45° سے کم والے مثبت زاویہ حادّہ کے تفاعل کی حیثیت سے ظاہر کرو :

(a) tan 1004° (b) sin 248°25′
(c) cos 106°18′ (d) tan 163°17′
(e) cos 204°46′ (f) tan 136°34′
(g) sin 156°39′ (h) cos 229°

19. جدول I کے استعمال سے مندرجہ ذیل میں سے ہر ایک کی قیمت نکالو :

(a) sin 14°20′ (b) tan 52°40′
(c) cos 28°50′ (d) sin 03°30′
(e) tan 21°10′ (g) cos 72°20′
(g) sin 115°30′ (h) cos 161°10′

20. مثلثات کو حل کرنے میں جبکہ زاویے ڈگری میں دیے ہوئے ہوں ہم اکثر جدول I کی مدد سے دو قیمتوں کے درمیان ادراج کرتے ہیں۔ واضح کرو کہ $\sin(x + r)$ کو کیوں جدول کی مدد سے ذیل کے ضابطے سے تخمینی طور پر برابر کیا جائے :

$$\sin(x + r) = \sin x + \frac{r}{10}[\sin(x + 10) - \sin x]$$

اگر x اور $x + 10$ جدول میں دیے گئے ایسے متصل زاویے ہوں جن کو منٹوں میں ناپا گیا ہو اور r ایسا حقیقی عدد ہو جو 0 اور 10 کے درمیان واقع ہو [مساوات (9–11) سے موازنہ کرو] . دوسرے تفاعل بھی ایسے ہی ضابطوں سے نکالے جائیں گے۔

21. $\sin 24°16′$ کی قیمت دریافت کرو [اشارہ : کیوں کہ زاویہ $24°16′$ واقع ہے $24°10′$ اور $24°20′$ کے درمیان

$$\begin{aligned}\sin 24°16′ &= \sin 24°10′ + \tfrac{6}{10}(\sin 24°20′ - \sin 24°10′)\\ &= 0.4094 + \tfrac{6}{10}(0.4120 - 0.4094)\\ &= 0.4094 + 0.0016\\ &= 0.4110.]\end{aligned}$$

22. جدول I اور ادراج کی مدد سے مندرجہ ذیل میں سے ہر ایک کی تقریبی قیمت دریافت کرو :

(a) sin 72°43′ (b) cos 28°46′
(c) tan 51°29′ (d) cos 63°23′

(e) $\tan 39°18'$ (f) $\sin 128°36'$
(g) $\cos 153°17'$ (h) $\sin 8°9'$

23. جدول I کے استعمال سے زاویہ θ کی $0°$ اور $90°$ کے درمیان واقع قیمت نکالو :

(a) $\sin\theta = 0.4253$, (b) $\tan\theta = 1.1237$,
(c) $\cos\theta = 0.8857$ (d) $\sin\theta = 0.8450$,
(e) $\tan\theta = 0.2156$, (f) $\cos\theta = 0.2447$,
(g) $\sin\theta = 0.3475$, (h) $\cos\theta = 0.7844$.

24. جدول کو ایک ایسے زاویے کے معلوم کرنے کے لیے بھی ادراج کیا جا سکتا ہے جو قریب ترین منٹ تک تخمینہ کیا گیا ہو جبکہ اس زاویے کے کسی تفاعل کی قیمت جدول کے کوئی دو اندراجات کے متصل اندراجات ملیں گے جن کے درمیان دی ہوئی قیمت واقع ہوگی۔ اگر $\sin\theta$ دیا ہوا ہے تو ہمیں جدول کے sine کے کالم میں دو ایسے متصل اندراجات ملیں گے جن کے درمیان دی ہوئی واقع ہوگی۔ پس اگر $\theta = x + r$ مان لیں جس میں r کوئی ایسا حقیقی عدد ہو جو 0 اور 10 کے درمیان واقع ہو اور x اور $x + 10$ جدول میں دو متصل اندراجات ہوں تو r کی قیمت ہم ذیل کے تقرب سے نکالیں گے :

$$\frac{r}{10} = \frac{\sin(x + r) - \sin x}{\sin(x + 10) - \sin x}.$$

واضح کرو کہ یہ ضابطہ کیسے حاصل ہوگا۔

25. اگر $\sin\theta = 0.6231$ ہو تو زاویہ θ کی قیمت $0°$ اور $90°$ کے درمیان نکالو۔

[اشارہ : ہمیں sine کے کالم میں $\sin 38°30' = 0.6225$ اور $\sin 38°40' = 0.6248$ کے درمیان 0.6231 کا مقام دریافت ہوا تو اس طرح

$$\frac{r}{10} = \frac{0.6231 - 0.6225}{0.6248 - 0.6225}$$

یا

$$r = 10\left(\frac{0.0006}{0.0023}\right) = 3.$$

تاکہ $\theta = 38°33'$ قریب ترین منٹ تک تخمینہ کرنے پر]

26. ادراج اور جدول I کی مدد سے $0°$ اور $90°$ کے درمیان θ کی قریب ترین منٹ تک تخمینی قیمت نکالو اگر :

(a) $\tan\theta = 0.8172$, (b) $\sin\theta = 0.5331$,
(c) $\cos\theta = 0.2717$, (d) $\cos\theta = 0.9392$,
(e) $\sin\theta = 0.7531$, (f) $\tan\theta = 0.8083$,
(g) $\cos\theta = 0.5380$, (h) $\sin\theta = 0.9648$.

27. مثلثات میں اکثر بہت بڑی تعداد میں ضرب اور جوڑ کا تخمینہ کرنا ہوتا ہے۔ ایسے کام کو مختصر کرنے کے لیے جدول III میں وائری تفاعلوں کے لوگارتم کو جدولی شکل دی گئی ہے۔ اگرچہ اندراجات لوگارتمی ہیں (جن میں ممیز شامل ہیں) لیکن ان کی شکل ایسی ہی ہے جیسی کہ جدول I کی اور اور اس کے استعمال کا طریقہ بھی بالکل ایسا ہی ہے۔

$\log\sin 36°17'$ کی قیمت دریافت کرو۔

[اشارہ : کیوں کہ زاویہ $36°17'$ واقع ہے۔ $36°10'$ اور $36°20'$ کے درمیان

$$\begin{aligned}\log\sin 36°17' &= \log\sin 36°10' + \tfrac{7}{10}(\log\sin 37°20' - \log\sin 37°10')\\ &= (9.7710 - 10) + \tfrac{7}{10}[(9.7727 - 10) - (9.7710 - 10)]\\ &= (9.7710 - 10) + \tfrac{7}{10}(0.0017)\\ &= (9.7710 - 10) + 0.0012\\ &= 0.7722 - 10.]\end{aligned}$$

28. جدول III اور اگر ضرورت ہو تو بذریعہ اِدراج مندرجہ ذیل میں سے ہر ایک کی قیمت نکالو :

(a) $\log\sin 13°20'$ (b) $\log\cos 45°30'$
(c) $\log\sin 67°32'$ (d) $\log\cos 38°21'$
(e) $\log\tan 72°47'$ (f) $\log\sin 115°18'$
(g) $\log\cos 68°56'$ (h) $\log\sin 51°49'$

29. اگر $\log\tan\theta = 0.1947$ تو $0°$ اور $90°$ کے درمیان زاویہ θ نکالو۔

[اشارہ : 0.1947 کا مقام لوگارتم مُس (tangent) کالم میں مندرجہ ذیل کے درمیان ہے $\log\tan 57°20' = 0.1930$ اور $\log\tan 57°30' = 0.1958$

اس لیے

$$\frac{r}{10} = \frac{0.1947 - 0.1930}{0.1958 - 0.1930},$$

یا

$$r = 10(\tfrac{17}{28}) = 6,$$

تاکہ $\theta = 57°26'$ جو کہ قریب ترین منٹ تک تقریبی ہے]

30. مندرجہ ذیل میں θ کی قیمت $0°$ اور $90°$ کے درمیان جدول III کی مدد سے اور اگر

ضرورت ہو تو ادراج سے قریب ترین منٹ تک دریافت کرو :

(a) $\log \sin \theta = 9.2870 - 10$ (b) $\log \cos \theta = 9.8365 - 10$
(c) $\log \tan \theta = 9.7353 - 10$ (d) $\log \cos \theta = 9.7316 - 10$
(e) $\log \sin \theta = 9.2278 - 10$ (f) $\log \tan \theta = 0.4937$
(g) $\log \cos \theta = 9.9797 - 10$ (b) $\log \sin \theta = 9.8761 - 10$

لوگارتم کے استعمال سے مندرجہ ذیل کی قیمت ملحوظ ہندسوں کی صحیح تعداد تک نکالو :

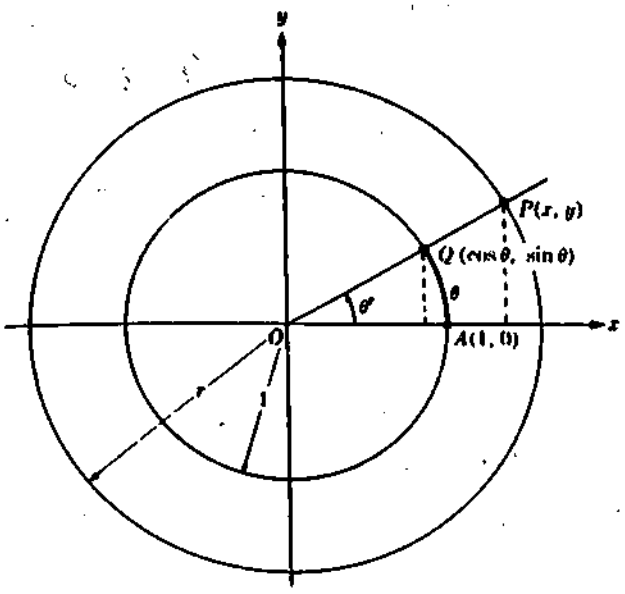
31. $\dfrac{32.86 \sin 27°42'}{\sin 54°17'}$

[اشارہ : فرض کرو کہ مطلوبہ قیمت $= x$ ، تو

$$x = \frac{32.86 \sin 27°42'}{\sin 54°17'}.$$

ہمیں حاصل ہوگا

$$\log x = \log 32.86 + \log \sin 27°42' - \log \sin 54°17'.$$



شکل 15-4

اپنے کام کو ترتیب سے لکھتے ہوئے، حاصل ہوگا

$$\begin{aligned} \log 32.86 &= 1.5167 \\ (+)\ \log \sin 27°42' &= 9.6673 - 10 \\ \log (\text{شمار کنندہ}) &= 11.1840 - 10 \\ (-)\ \log \sin 54°17' &= 9.9095 - 10 \\ \log x &= 1.2745 \\ x &= 18.81.] \end{aligned}$$

.32 $48.7 \tan 58°30'$ .33 $\dfrac{68.2 \sin 37°20'}{\sin 49°50'}$

.34 $897.2 \cos 63°48'$ .35 $(189)(256) \cos 27°11'$

قدرتی طور پر یہ سوال پیدا ہوتا ہے کہ جیومیٹری میں زاویوں کے تفاعل کس چیز کا اظہار کرتے ہیں اور اُن کو کس طرح استعمال کیا جا سکتا ہے؟

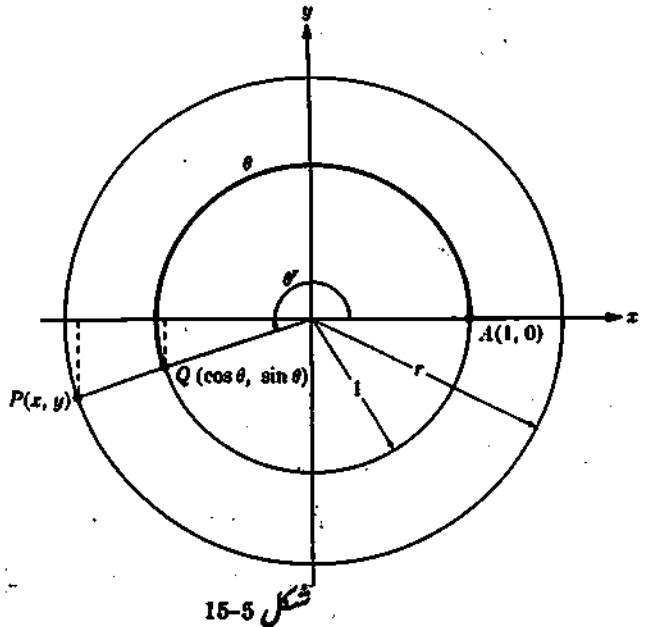
ایک ایسے زاویہ θ پر غور کرو جو کہ معیاری مقام پر ہے اور جس کو ایک r لمبائی کی گھومتی ہوئی کرن کے ایک حصّہ نے بنایا ہے (شکل 15-4)۔ مان لو کہ نقطہ P کے مختصات (x, y) ہیں جبکہ P مبدا سے r فاصلے پر زاویے کے میعادی ضلع پر ایک نقطہ ہے۔ اگر Q، OP اور اکائی دائرے کے نقطہ تقاطع کی نمائندگی کرتا ہے تو OQ کی لمبائی 1 ہے اور قوس $\overset{\frown}{AQ}$ کی لمبائی $|\theta|$ ہے تاکہ Q کے مختصات ہوں گے $(\cos\theta, \sin\theta)$۔ اگر Q اور P سے x-محور پر عمود کھینچے جائیں تو مشابہ قائم الزاویہ مثلثات بنیں گے تاکہ

$$\frac{x}{\cos\theta} = \frac{r}{1} \quad \text{اور} \quad \frac{y}{\sin\theta} = \frac{r}{1} \qquad (15\text{-}8)$$

تاکہ $x = r\cos\theta$ اور $y = r\sin\theta$

اگر P اور اسی طرح Q بجائے اوّل ربع کے کسی اور ربع میں ہوں جیسا کہ شکل 15-5 میں تو P کا ایک مختص یا دونوں ہی منفی ہوں گے۔ اُس حالت میں Q کے مطابق مختصات کی علامت بھی وہی ہوگی۔ اس لیے مساوات 15-8 کا تعلق اب بھی صادق ہوگا۔ اس طرح ہم نے ذیل کے ایک اہم مسئلہ کو ثابت کر دیا ہے۔

مسئلہ 15-1 : اگر ایک نقطہ $P(x, y)$ زاویہ θ کے میعادی ضلع پر مبدا سے r فاصلہ



شکل 15-5

پر میعادی مقام پر لیا جائے تو P کے مختصات r اور θ کے ارکان میں ذیل کی عبارات سے ظاہر کیے جا سکتے ہیں :

$$x = r\cos\theta \quad \& \quad y = r\sin\theta. \tag{15-9}$$

یہ بات باعث دلچسپی ہوگی کہ اگر $r = 1$ کے ہو تو $P(x, y)$ اکائی دائرے پر واقع ہوگا اور Q سے منطبق ہو جائے گا تاکہ جیسا کہ ہم جانتے ہیں $x = \cos\theta$ اور $y = \sin\theta$ کے ہوگا۔

مسئلہ 15-1 کے نتیجے کے طور پر ہم مندرجہ ذیل مسئلہ کو ثابت کرتے ہیں جن کے نتائج کو اکثر دائری تفاعلوں کی تعریف کی حیثیت سے لیا جاتا ہے جب اُن کی ایک زاویہ کی ارکان میں تعریف کی جائے۔

• ایسی مساواتوں کو جن میں θ پر چند شرائط لگائی جائیں عام طور سے x اور y کی عبارات میں قطبی مختصات کے نام سے موسوم کیا جاتا ہے۔

مسئلہ 15-2 : اگر ایک نقطہ $P(x, y)$ زاویہ θ کے میعادی ضلع پر مبدا سے r فاصلے پر میعادی مقام پر لیا جائے تو θ کے دائری تفاعل ذیل کی عبارت سے تعریف کیے جائیں گے :

$$\begin{array}{llll} \sin\theta = \frac{y}{r}, & & \cos\theta = \frac{x}{r}, & \\ \tan\theta = \frac{y}{x} & (x \neq 0), & \cot\theta = \frac{x}{y} & (y \neq 0), \\ \sec\theta = \frac{r}{x} & (x \neq 0), & \csc\theta = \frac{r}{y} & (y \neq 0). \end{array} \quad (15\text{-}10)$$

ثبوت : کیوں کہ $r \neq 0$ تو ہم پہلی دو مساواتیں براہ راست مساوات (15-9) سے حاصل کر سکتے ہیں۔ کیوں کہ مساوات (6-4) سے $\tan\theta = \sin\theta/\cos\theta$ تو ہمیں حاصل ہوگا

$\tan\theta = (y/r)(x/r) = y/x$ مساوات (6-11) سے مساوات (6-13) تک کی مقلوب متناسبہ کے ایسے ہی استعمال سے دوسری مساواتیں بھی ثابت کی جا سکتی ہیں۔

مثال 3 : مان لو کہ زاویہ θ اپنے معیاری مقام پر ہے کہ اُس کا میعادی ضلع نقطہ $(-3, 4)$ سے گزرتا ہے تو $\sin\theta$ ، $\cos\theta$ اور $\tan\theta$ کی قیمت دریافت کرو۔

حل : کیوں کہ $x = -3$ اور $y = 4$ ، $r = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$ اس طرح $\sin\theta = \frac{4}{5}$ ، $\cos\theta = -\frac{3}{5}$ اور $\tan\theta = -\frac{4}{3}$ (دفعہ 6-2 کی مثال 1 سے موازنہ کرو)۔

سوالات

مندرجہ ذیل میں سے ہر ایک میں زاویے کا میعادی ضلع اپنے معیاری مقام پر دیے ہوئے نقطے سے گزرتا ہے۔ خاکہ کھینچو اور ہر زاویے کے دائری تفاعل نکالو :

1. $(3, 4)$	2. $(-5, 12)$	3. $(-4, 3)$
4. $(24, -7)$	5. $(-8, -15)$	6. $(10, -8)$
7. $(0, -2)$	8. $(-1, 7)$	9. $(6, 0)$

10. کسی بھی زاویہ θ کے لیے جس کا میعادی ضلع معیاری مقام پر r نصف قطر والے دائرے کو نقطہ P پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ P کے مختصات $(r\cos\theta, r\sin\theta)$ ہوں گے۔ یہ ایک اہم ترین نظریہ ہے۔

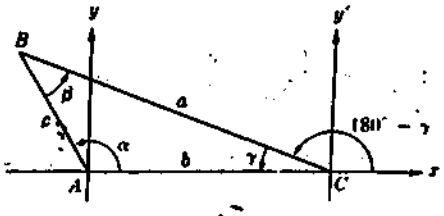
15-3 . مثلثات کے حل پر عام بحث : گزشتہ چند سالوں میں مثلثات کو حل کرنے کا پورا نقطۂ نظر ہی بدل گیا ہے۔ بہت سے عددی طریقے، متعدد ضابطے اور اس کا معہ سوالات کے تفصیلی مطالعہ علم مثلثات کا ایک اہم جزو سمجھا جاتا تھا تاہم حال ہی میں مثلثات کا تحلیلی حصہ معہ اس کے اعلار یاضیات اور سائنس میں اطلاق کے زیادہ اہم ہو گیا ہے۔ نئی ترقیات نے صحیح ترین گرافی طریقے ایجاد کیے ہیں اور تیز رفتار حسابی مشین کے استعمال کو بھی ممکن بنا دیا ہے۔ ہمیں اپنی توجہ بنیادی مسائل پر مرکوز کرنا چاہیے اور لمبے و تفصیلی عملیات پر زور نہیں دینا چاہیے۔

اگر کسی مثلث کے چند اضلاع مخصوص اور زاویے معلوم ہوں تو مثلث کے باقی ماندہ اضلاع اور زاویوں کو معلوم کر کے اس کو حل کیا جا سکتا ہے۔ مثلث کو حل کرنے میں استعمال ہونے والے بہت سے ضابطوں میں سے دو کا اشتقاق کریں گے اور انھیں ضابطوں کی چند مخصوص صورتوں پر غور کریں گے۔ دوسرے ضابطے اور مثلث کے اضلاع اور زاویوں کے آپس کے تعلقات دوسری مثالوں اور سوالوں میں ظاہر ہوں گے۔

ان رشتوں کا استخراج کرتے وقت یہ یاد رکھنا اہم ہے کہ کوئی بھی مثلث حل کیا جا سکتا ہے اگر (1) دو زاویے اور ایک ضلع دیا ہو (2) دو اضلاع اور ان کا درمیانی زاویہ دیا ہو (3) تین اضلاع دیے ہوں جس میں سب سے لمبا ضلع باقی دو اضلاع کے جوڑ سے کم ہے۔ مزید (4) اگر دو اضلاع اور اُن میں سے ایک کے خلاف والا زاویہ دیا ہو تو زیادہ سے زیادہ دو مثلث ہوں گے۔ ہم ان چار قسم کے مسئلوں کو حل کرنا چاہتے ہیں۔ ہم کسی بھی مثلث ABC کی تینوں راسوں پر بنے زاویوں کو لگاتار α، β، γ سے تعبیر کریں گے اور اُن کی مخالف مطابق اضلاع a، b اور c سے۔

15-4 . کلیہ سائن (Sines) : آیئے ہم دو عام کلیوں میں سے پہلے موسوم بہ کلیہ سائن کا استخراج کریں۔ یہ کلیہ مثلث کے اضلاع اور اس کے زاویوں کے Sines پر مشتمل ہے اور اس کو تحلیلی طریقوں سے ثابت کیا جائے گا۔ اگر ہم مستطیلی نظام مختصات ایسے اخذ کریں کہ مثلث ABC کا زاویہ α معیاری مقام پر ہو (دیکھو شکل 15-6) B کے مختصات ہیں $(c \cos \alpha, c \sin \alpha)$ [یاد کرو دفعہ 15-2 کا سوال 10 یا مسئلہ 15-1] ۔ بہر حال اگر نظام مختصات کا مبدا C پر ہو تاکہ $(180° - \gamma)$ معیاری مقام پر ہو تو B کے مختصات ہوں گے

$$[a \cos (180° - \gamma), a \sin (180° - \gamma)].$$



شکل 15-6

کیوں کہ دونوں صورتوں میں سے کسی میں بھی B کے y-منتصبات برابر ہیں (x-محور سے یکساں فاصلے پر) تو ہمیں حاصل ہوگا

$$c \sin \alpha = a \sin (180° - \gamma)$$
$$= a \sin \gamma.$$

اس مساوات کے ہر ممبر کو $\sin \alpha \sin \gamma$ سے تقسیم کرنے پر ہمیں حاصل ہوگا

$$\frac{c}{\sin \gamma} = \frac{a}{\sin \alpha}.$$

x-محور کو دوسرے طریقے سے اخذ کرکے $b/\sin \beta = a/\sin \alpha$ چنانچہ ہم نے مندرجہ ذیل مسئلہ ثابت کر دیا۔

مسئلہ 15-3 : کسی بھی مثلث میں جس کے زاویے α ، β ، γ ہوں اور مطابق اضلاع a ، b ، c ہوں مندرجہ ذیل رشتے صادق ہیں

$$\boxed{\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}.} \qquad (15\text{-}11)$$

یہ تعلق دفعہ 15-3 کے (1) اور (4) میں تذکرہ کیے گئے مسئلوں کو حل کرنے میں مدد دیتا ہے۔ تاہم اس سے قبل کہ ہم اُن تمام مسئلوں پر بحث کریں جو کہ مساوات (15-11) سے حل کی گئی ہوں۔ ہم ایک اہم ترین خصوصی صورت پر غور کرتے ہیں۔ زیادہ عام مسئلے دفعہ 15-7 میں زیر بحث آئیں گے۔

15-5 قائم الزاویہ مثلثات کا حل : اگر γ کوئی قائم الزاویہ برابر $90°$ کے ہو تو مساوات (15-11) $\sin \alpha = a/c$ اور $\sin \beta = b/c$ میں تحویل ہو جائے گی لیکن $\gamma = 90°$ اور $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ سے $\beta = 90° - \alpha$ تاکہ $\cos \alpha = b/c$ کیوں کہ $\tan \alpha = \sin \alpha/\cos \alpha$ اس لیے $\tan \alpha = a/b$ ۔ ان مخصوص شرائط سے ایک اہم ضمنی نتیجہ واضح ہو جانا چاہیے۔ اس کو ان دائری تفاعلوں کی اصل تعریفوں کا براہِ راست نتیجہ سمجھنا چاہیے۔

ضمنی نتیجہ 15-3 : کسی بھی قائم الزاویہ مثلث میں جس میں $\gamma = 90°$

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{\alpha \text{ کے خلاف ضلع}}{\text{وتر}}, \tag{15-12}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{\alpha \text{ کے متصل ضلع}}{\text{وتر}}, \tag{15-13}$$

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\alpha \text{ کے مخالف ضلع}}{\alpha \text{ کے متصل ضلع}}. \tag{15-14}$$

مثلثوں کو حل کرنے میں ملحوظ اشکال پر مندرجہ ذیل تصریحات مددگار ثابت ہوں گی

(1) نتائج دیے ہوئے اضلاع اور زاویوں سے زیادہ صحیح نہیں ہوسکتے۔ صحت (درستی) کے لیے ہم مندرجہ ذیل جدول مرتب کرنے کے لیے رضامند ہیں :

اضلاع کے لیے ملحوظ اشکال	زاویہ قریب ترین تک
2	ڈگری
3	دس منٹ
4	منٹ
5	منٹ کے دسویں حصّے میں

(2) اگر نتائج صرف دو یا تین ملحوظ ہندسوں تک مطلوب ہیں تو تخمینہ کرنے کے لیے پھل پیمانہ (سلائڈ رول) استعمال کرنا چاہیے۔ کام کی جانچ کے لیے بھی سلائڈ رول استعمال کیا جاسکتا ہے۔ جب تک کہ جوابات اتنے صحیح نہ چاہئیں جتنے کہ سلائڈ رول سے حاصل ہوسکتے ہیں۔

(3) اگر نتائج کئی ملحوظ ہندسوں تک صحیح درکار ہوں تو جدول استعمال کرنا چاہیے۔ اگر حسابی مشینیں موجود ہوں تو عام طور سے طبیعی تفاعل اور حسابی طریقے استعمال کیے جاتے ہیں لیکن چونکہ طلبا کی اکثریت کو مشینیں دستیاب نہیں ہوتی ہیں اس لیے قدرتی طور پر لوگارتمی حل استعمال کیا جاتا ہے۔ یہی طریقہ زیادہ تر سوالات میں استعمال ہوتا ہے۔

(4) سوالات حل کرنے کے لیے یہ مناسب ہے کہ مثلث کھینچا جائے۔ دیے ہوئے حصّوں کے نام لکھے جائیں اور حل کرنے سے پہلے کام کا ایک باقاعدہ مجمل نقشہ تیار کیا جائے۔

مثال 1 : ایک قائم الزاویہ مثلث ABC میں $b = 47.25$ ، $\alpha = 41°19'$ باقی

حصہ اور رقبہ نکالو۔

حل : پہلے مثلث کھینچیں اور دیے ہوئے حصّوں کو عددی طور پر لیبل کریں جیسا کہ شکل 15-7 میں

تو $\beta = 90° - \alpha = 48°41'$ ؛ a معلوم کرنے کے لیے ہم ضابطہ $\tan\alpha = a/b$ استعمال کریں اور c معلوم کرنے کے لیے $\cos\alpha = b/c$

$$c = \frac{47.25}{\cos 41°19'}$$

$$\log 47.25 = 11.6744 - 10$$
$$(-)\ \log\cos 41°19' = 9.8757 - 10$$
$$\log c = 1.7987$$
$$c = 62.90$$

$$a = 47.25 \tan 41°19'$$

$$\log 47.25 = 1.6744$$
$$(+)\ \log\tan 41°19' = 9.9440 - 10$$
$$\log a = 11.6184 - 10$$
$$a = 41.54$$

مثلث کا رقبہ $K = \frac{1}{2}ab$

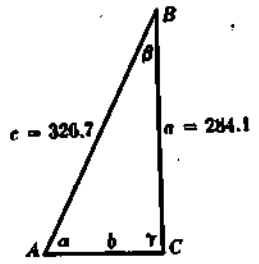
$$\log 41.54 = 1.6184$$
$$(+)\ \log 47.25 = 1.6744$$
$$\log ab = 3.2928$$
$$(-)\ \log\ 2 = 0.3010$$
$$\log K = 2.9918$$

اس لیے $K = 981.2$

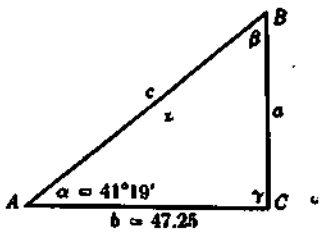
جیسا کہ جدول III میں اس کے جوابات چار ملحوظ ہندسوں تک صحیح ہیں۔

مثال 2 : ایک ایسے قائم الزاویہ مثلث کو حل کرو جس میں $a = 284.1$ اور $c = 320.7$

حل : ایک مثلث کھینچ کر دیے ہوئے حصّوں کے عددی طور پر نام (لیبل) لکھو جیسا کہ شکل 15-8



شکل 15-8



شکل 15-7

ہیں ہے۔ کیوں کہ a اور c دیے ہوئے ہیں۔ ہم α معلوم کرنے کے لیے یہ ضابطہ استعمال کریں گے۔

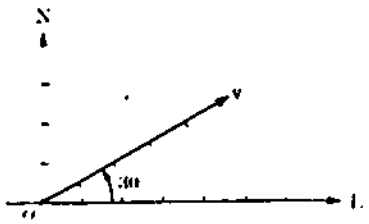
$\sin\alpha = a/c$ اور b معلوم کرنے کے لیے $\cos\alpha = b/c$

$\sin\alpha = \frac{284.1}{326.7}$	$b = 326.7 \cos 60°24'$
$\log 284.1 = 12.4534 - 10$	$\log 326.7 = 2.5141$
$(-)\ \log 320.7 = 2.5141$	$(+)\ \log \cos 60°24' = 9.6937 - 10$
$\log \sin\alpha = 9.9393 - 10$	$\log b = 12.2078 - 10$
$\alpha = 60°24'$	$b = 161.4$
$\beta = 29°36'$	

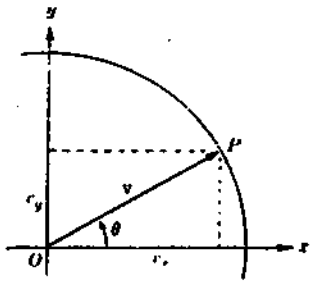
جدول میں $\log \sin\alpha$ کا مقام معلوم کرنے پر ہم $\log \cos\alpha$ معلوم کر سکتے ہیں۔ کام کو پہلے بااُصول طریقے پر ترتیب دینے کا ایک یہ فائدہ بھی ہے۔

سمتیات : سائنس اور انجینیرنگ میں طبیعی مقادیر مثلاً رفتار، سُرعت یا قوّت کو مکمل طور پر نکالنے کے لیے نہ صرف ان کی مقدار کی ضرورت ہوتی ہے بلکہ سمت بھی درکار ہوتی ہے۔ اُن کی نمائندگی خطّ کے ایسے قطعات سے کرتے ہیں جس کے ایک سرے پر سمت بتانے کے لیے تیر کا نشان بنا ہوتا ہے۔ قطع کی لمبائی کسی پیمانے کے لحاظ سے مقدار کو ظاہر کرتی ہے۔ ایسے قطعات خطوط **سمتیات** کہلاتے ہیں۔ مثلاً ایک اکائی برابر چالیس پونڈ کے پیمانے سے شکل 9-15 کا سمتیہ ایک 200 پونڈ کی ایسی قوت کی نمائندگی کرتا ہے جو x-محور کی مثبت سمت سے $30°$ کا زاویہ بناتا ہے۔ ایک موٹا لکھا حرف $\mathbf{v}$ سمتیہ کی نمائندگی کرے گا جبکہ ہلکا (معمولی) لکھا v لمبائی ظاہر کرے گا۔

کیوں کہ $\mathbf{v}$ جس کا ابتدائی نقطہ 0 پر ہے اُس کی لمبائی v ہے اور x محور کی مثبت سمت سے θ کا زاویہ بناتا ہے (شکل 10-15)۔ اس کے انتہائی نقطہ P کے مختصات



شکل 9-15



شکل 15-10

$(v \cos\theta, v \sin\theta)$ ہوں گے۔ یہ مختصات جن کو v_x اور v_y سے ظاہر کرتے ہیں $\mathbf{v}$ کے x اور y اجزا کہلاتے ہیں اور ان رشتوں کو مطمئن کرتے ہیں :

$$\begin{aligned} v_x &= v\cos\theta, & v^2 &= v_x^2 + v_y^2, \\ v_y &= v\sin\theta, & \tan\theta &= \frac{v_y}{v_x}. \end{aligned} \tag{15-15}$$

مثال 3 : ایسے سمتیہ جس میں $v = 247$ اور $\theta = 37°40'$ تو v_x اور v_y معلوم کرو۔

حل :

$$v_x = 247\cos 37°40' = (247)(0.7916) = 196,$$
$$v_y = 247\sin 37°40' = (247)(0.6111) = 151.$$

$\mathbf{v}_x$ اور $\mathbf{v}_y$ کو بہ لحاظ سمتیہ لے کر ہم $\mathbf{v}$ کو ایک ایسا واحد سمتیہ مان لیں جو ان دونوں کے مساوی القیمت ہے۔ عام طور پر کوئی بھی سمتیہ $\mathbf{v}$ دو سمتیہ $\mathbf{v}_1$ اور $\mathbf{v}_2$ کا حاصل ہوتا ہے یا ان کا جوڑ ہوتا ہے اگر یہ بہ حیثیت ایک واحد قوت کے وہی حاصل پیدا کرے جیسا کہ دو قوتیں ساتھ ساتھ کام کر کے پیدا کریں۔ اگر $\mathbf{v}_1$ اور $\mathbf{v}_2$ ایسے دو غیر متوازی سمتیہ ہوں جو ایک ہی نقطہ سے خروج کرتے ہوں تو اُن کا حاصل $\mathbf{v}$ وہ سمتیہ ہوگا جو اُسی نقطہ سے خروج کرے گا اور جس کی لمبائی اور سمت اُس متوازی الاضلاع کے وتر کی ہوگی جس کا تعین $\mathbf{v}_1$ اور $\mathbf{v}_2$ سے ہوگا۔ اس نظریے کو پہلے ہی پہل سوال 22 میں استعمال کیا گیا ہے۔

سوالات

سوالات کو حل کرنے میں اگر ممکن ہو سکے تو اُن میں سے بعض کے حل میں حسابی مشین استعمال کرنی چاہیے۔

دوسروں کے لیے لوگارتم استعمال کیے جائیں۔ تمام حلوں کی جانچ کی جائے۔

1. ذیل کے ہر مثلث کے نامعلوم اضلاع اور زاویے نکالو۔ ہر ایک میں $\gamma = 90°$

(a) $\alpha = 37°20'$, $a = 243$
(b) $\alpha = 62°40'$, $b = 796$
(c) $a = 3.28$, $b = 5.74$
(d) $b = 68.4$, $c = 90.2$
(e) $\beta = 51°10'$, $c = 0.832$
(f) $\alpha = 37°40'$, $a = 54.8$
(g) $a = 37.9$, $b = 57.3$
(h) $\beta = 41°25'$, $c = 3265$
(i) $a = 5429$, $c = 6294$
(j) $a = 3.273$, $b = 7.647$.
(k) $\beta = 62°57'$, $a = 0.8263$
(l) $\beta = 47°23'$, $b = 72.55$
(m) $b = 3572$, $c = 4846$
(n) $\alpha = 24°47'$, $b = 318.4$

2. ایک دائرے میں جس کا نصف قطر 96.4 انچ ہے، وہ مرکزی زاویہ کیا ہوگا جو 40.3 انچ کا وتر بناتا ہے؟

3. ایک مستطیل قطعہ زمین 102 فٹ لمبا اور 206 فٹ چوڑا ہے۔ اس کے وتر کی لمبائی اور وہ زاویے نکالو جو سب سے لمبے ضلع کے ساتھ بناتا ہے۔

4. ایک تار کا لٹھا زمین سے بذریعہ تار کسا ہوا ہے جو لٹھے پر 18.6 فٹ کی اونچائی کیے گئے ہیں، اُس تار کی لمبائی معلوم کرو جو انتصابی خط سے $26°20'$ کا زاویہ بناتا ہے؟

5. اُس متوازی الاضلاع کا رقبہ نکالو جس کے اضلاع 33.7 اور 15.2 انچ ہیں اور اُن کا درمیانی زاویہ ہے $67°40'$

6. ایک مساوی الساقین مثلث کا برابر والا ضلع 6.73 انچ ہے اور قاعدہ کا ایک زاویہ $27°10'$ ہے۔ قاعدہ اور اونچائی معلوم کرو۔

7. ایک 36 فٹ کی سیڑھی 28 فٹ اونچی دیوار پر پہنچنے کے لیے استعمال ہوتی ہے۔ اگر سیڑھی دیوار کے سرے سے 2 فٹ آگے نکلی ہو تو اُفق سے زاویہ جھکاؤ نکالو۔

8. ایک نصف کروی پیالہ جس کا اندرونی نصف قطر 8 انچ کا ہے۔ ہموار (مسطح) ہے اور پانی سے دو انچ گہرائی تک بھرا ہوا ہے۔ اس کو کس زاویے پر جھکایا جائے کہ پانی اس سے گرنے لگے؟

9. ایک 24.78 انچ لمبائی کا تار کا ٹکڑا ایسے موڑا گیا ہے کہ ایک مساوی الساقین بنائے جس کا ایک زاویہ $97°26'$ ہو۔ بنائے ہوئے مثلث کے ہر ضلع کی لمبائی نکالو۔

10. زمین کے ایک کے ایک ایسے نقطے پر جو کسی جھنڈے کے لٹھے کے پایے سے 152.3 فٹ فاصلے

پر ہے لٹھے کے سرے کا زاویۂ ارتفاع 31°46′ ہے۔ تو جھنڈے والے لٹھے کی اونچائی کیا ہوگی؟

[اشارہ : اگر دیکھی گئی شے اُفقی سطح کے اوپر ہو تو وہ زاویہ جو اُفق سے وہ خط بناتا ہے جو آنکھ کو شے سے ملاتا ہے زاویۂ ارتفاع کہلاتا ہے۔ اگر دیکھی گئی شے اُفقی سطح کے نیچے ہو تو زاویہ زاویہ پستی کہلاتا ہے۔]

11. ایک روشنی کے مینارہ سے جو پانی کی سطح سے 75.3 فٹ اوپر ہو کشتی کا زاویۂ پستی 23°40′ ہے۔ تو بتاؤ کہ کشتی پانی کی سطح کے اُس نقطہ سے جو کہ براہِ راست نقطۂ مشاہدہ کے نیچے ہے کتنے فاصلے پر ہے؟

12. اُس غبارے کی اونچائی معلوم کرو جو کہ کسی قصبے کے براہِ راست اوپر ہو اور قصبہ B کا زاویۂ پستی جو A سے 6.23 میل ہے، 15°20′ ہو۔

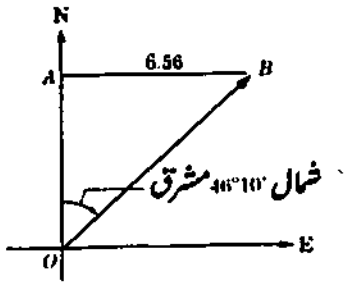
13. ایک 80 فٹ اونچے دیدبان مینار سے، مینار کی چوٹی سے 6.5 فٹ نیچے مقام سے ایک شخص مشاہدہ کرتا ہے کہ کسی درخت کا زاویۂ ارتفاع 12°40′ ہے اور اس کے پیندے کا زاویۂ پستی 72°20′ ہے۔ اگر مینار اور درخت کے پیندے ایک ہی سطح پر ہوں تو درخت کی اونچائی کیا ہوگی؟

14. ایک ایسے مقام سے جو پانی کی سطح سے 20.75 فٹ اونچائی پر ہے ایک عمارت کا زاویۂ ارتفاع جو پانی کے کنارے پر ہے 38°16′ ہے۔ جبکہ اس کی پانی میں بنی تصویر کا زاویۂ پستی 56°28′ ہے۔ عمارت کی اونچائی اور مشاہدہ کے مقام سے اس کا اُفقی فاصلہ معلوم کرو۔

15. 1780 فٹ اونچے پہاڑ سے ایک دریا کے قریب ترین کنارہ کے ایک مقام کا زاویہ پستی 48°40′ ہے اور دریا پار اِس مقام کے براہِ راست مخالف مقام کا زاویۂ ارتفاع 22°20′ ہے۔ تو ان دونوں مقامات کے درمیان دریا کی چوڑائی کیا ہوگی؟

16. ایک مقام پر پہاڑ کی ایک چوٹی کا زاویۂ ارتفاع 40°20′ ہے۔ اسی اُفقی سطح پر ایک ایسے مقام پر جو 9560 فٹ دوری پر ہے اُس کا زاویۂ ارتفاع 29°50′ ہے تو افقی سطح سے پہاڑ کی چوٹی کا فاصلہ معلوم کرو۔

*17. روشنی کا ایک مینار B، A مینار سے براہِ راست مشرق میں 6.56 میل ہے۔



شکل 15-11

O پر ایک جہاز مشاہدہ کرتا ہے کہ A اُس سے شمال میں ہے اور OB کا زاویۂ سمتی (N 46°10′ E) شمال 46°10′ مشرق ہے۔ A سے جہاز کتنے فاصلے پر ہے؟ اور B سے بھی؟ [اشارہ: کسی خط کا زاویۂ سمتی اُفقی سطح پر وہ زاویۂ حادّہ ہے جو اس خط اور شمال جنوب خط کے درمیان ہو۔ خط کا زاویۂ سمتی دینے میں صرف N یا S قیمت سے پہلے لکھا جاتا ہے اور E یا W قیمت کے بعد۔ پس شکل 15-11 میں OB کا زاویہ سمتی پڑھا جائے گا "شمال 46°10′ مشرق" یا (ش 46°10′ م)]

18. ایک ہوائی جہاز ایک ریڈیو اسٹیشن A سے مشرق کی طرف 115 میل دوری پر ہے۔ ایک دوسرا ریڈیو اسٹیشن A سے شمال کی طرف 136 میل فاصلے پر ہے۔ تو ہوائی جہاز سے دوسرے ریڈیو اسٹیشن کا فاصلہ اور زاویۂ سمتی کیا ہوگا؟

19. ہوا کی وجہ سے ایک کشتی جنوب 47°29′ مغرب (ج 47°29′ م) سمت میں 4728 فٹ فاصلہ دریا میں طے کرتی ہے۔ یہ جنوب کی طرف کتنی گئی ہے؟ مغرب کی طرف کتنے فاصلے تک گئی ہے؟

20. مندرجہ ذیل ہر سمتیہ کے لیے v_x اور v_y معلوم کرو جبکہ v اور θ درج ذیل ہیں

(a) $v = 75,\ \theta = 60°$;
(b) $v = 48,\ \theta = 136°$;
(c) $v = 4.72,\ \theta = 217°10'$;
(d) $v = 58.47,\ \theta = 47°18'$.

21. ذیل کے ہر سمتیہ کے لیے لمبائی اور سمت نکالو اگر

(a) $v_x = 3,\ v_y = 4$;
(b) $v_x = 23,\ v_y = 45$;
(c) $v_x = -16.2,\ v_y = 28.7$;
(d) $v_x = 382.4,\ v_y = -768.3$.

22. اگر 658.4 پونڈ کی ایک قوت مشرق کی طرف عمل کر رہی ہو اور دوسری 316.2 پونڈ کی شمال کی طرف تو اُن کے حاصل کا ناپ اور سمت کیا ہوگی؟

23. ایک غبارہ 12 فٹ فی سیکنڈ کی شرح سے اوپر اُٹھ رہا ہے اور ساتھ ہی ساتھ ہَوا کی وجہ سے اُفقی سمت میں 18 فٹ فی سیکنڈ اُڑا جا رہا ہے۔ وہ زاویہ نکالو جو اس کا راستہ عمود سے بناتا ہے اور اُس کی حقیقی رفتار نکالو۔

24. ایک دریا سیدھا مشرق کی طرف 1.28 میل فی گھنٹہ کی رفتار سے بہہ رہا ہے۔ اگر خاموش پانی میں ایک تیراک 1.75 میل/گھنٹہ کی رفتار سے تیر سکتا ہے اور وہ سیدھا شمال کی طرف دریا کے پار تیرنا شروع کر دے تو بتاؤ کہ حقیقتاً وہ کس سمت میں جا رہا ہے؟ اگر دریا ایک میل چوڑا ہے تو مخالف کنارے پر کس مقام پر جا کر لگے گا؟

25. سوال 24 کے تیراک کو کس سمت تیرنا چاہیے کہ وہ دریا پار ٹھیک مخالف مقام پر جا لگے؟

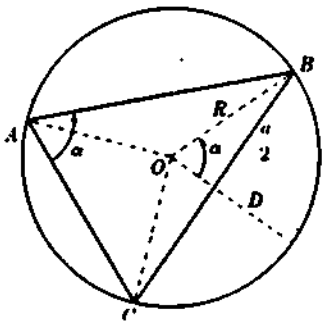
26. ایک ہوائی جہاز ساکن ہَوا میں 145 میل فی گھنٹہ کی رفتار سے سفر کر سکتا ہے۔ ہَوا اگر 23 میل فی گھنٹہ کی رفتار سے شمال 27° مشرق کی سمت چل رہی ہے تو (a) اگر ہوائی جہاز کا رُخ شمال 63° مغرب کی سمت ہو تو اُس کی رفتار اور سمت بہ لحاظ زمین نکالو۔ (b) ہوائی جہاز شمال 63° مغرب کی سمت جانے کے لیے کس رُخ پر اُڑان کرے اور ہوا میں اس کی واقعی رفتار کیا ہوگی؟

27. مندرجہ ذیل قوتوں کے جوڑے کا حاصل معلوم کرو جس میں f ہر قوت کا ناپ اور θ وہ زاویہ ہے جو ہر قوت مثبت x-محور سے بناتا ہے۔

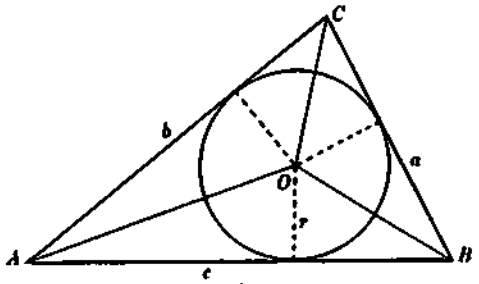
(a) $f_1 = 15,\ \theta_1 = 65°,\ f_2 = 37,\ \theta_2 = 142°$
(b) $f_1 = 6280,\ \theta_1 = 37°10',\ f_2 = 2840,\ \theta_2 = -16°40'$
(c) $f_1 = 6800,\ \theta_1 = 210°,\ f_2 = 7200,\ \theta_2 = 315°,\ f_3 = 5600,\ \theta_3 = 90°$

[اشارہ: اگرچہ ہم حاصل متوازی اضلاع کے وتر کی حیثیت سے نکال سکتے ہیں لیکن ایسے سوالوں میں اجزا کے ساتھ کام کرنا زیادہ آسان ہوگا۔ x-اجزا کے جوڑ کو بہ حیثیت ایک قوت کے معلوم کرو اور y-اجزا کے جوڑ کو بہ حیثیت دوسری قوت کے اور تب ان دونوں کا حاصل معلوم کرو۔]

28. شکل 12–15 میں O مرکز سے مثلث کو ایک بیرونی دائرہ کھینچا گیا ہے اور $\overline{OD}$ عمود



شکل 15-12



شکل 15-13

ڈالا گیا ہے BC پر زاویہ BOD کا α کے ساتھ کیا تعلق ہے؟ قائم الزاویہ مثلث BDO سے ثابت کرو کہ $\sin\alpha = a/2R$ ۔ ضروری ضمنی ساخت کی مدد سے کلیہ سائن (Law of Sines) ثابت کرو۔

29. ایک قائم الزاویہ مثلث ABC میں $\alpha = 30°$ اور $AB = 2$؛ AC کو D ایسے مقام پر اخذ کیا گیا ہے کہ $DC = BC$ اور D سے AB پر ایک عمود ڈالا گیا جو AB کو K پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ زاویہ DBK برابر $15°$، اور مختلف خطوط کی لمبائی معلوم کر کے ثابت کرو کہ

$$\sin 15° = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

30. شکل 15-13 کی مدد سے جس میں مثلث ABC کا اندرونی دائرے کا نصف قطر r ہے ثابت کرو کہ رقبہ $K = rs$ جہاں کہ $s = (a + b + c)/2$

15-6 . کلیہ کوسائن (Law of Cosines) :

اب ہم ایک دوسرا اہم ضابطہ ثابت کریں گے جسے کلیہ کوسائن کہتے ہیں۔

مسئلہ 15-4 : کسی مثلث میں جس کے زاویے α ، β ، γ ہیں اور مطابق مخالف اضلاع a ، b ، c ہوں تو

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha. \qquad (15\text{-}10)$$

ثبوت : حوالہ شکل 15-6 سے مثلث ABC میں زاویہ α معیاری مقام پر ہے جس میں

راس $C(b, 0)$ پر ہے۔ اگر ہم یاد کریں کہ B کے مختصات $(c \cos \alpha, c \sin \alpha)$ ہیں تو مساوات (4-9) سے $B(c \cos \alpha, c \sin \alpha)$ اور $C(b, 0)$ کے درمیان فاصلہ ہوگا :

$$\sqrt{(c \cos \alpha - b)^2 + (c \sin \alpha - 0)^2}.$$

لیکن یہ لمبائی تو a کی لمبائی ہے تاکہ

$$a = \sqrt{c^2 \cos^2 \alpha - 2bc \cos \alpha + b^2 + c^2 \sin^2 \alpha},$$

یا

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$$

اسی طرح ہمیں حاصل ہوگا

$$\boxed{\begin{aligned} b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta, \quad (15\text{–}17) \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma. \quad (15\text{–}18) \end{aligned}}$$

یہ تین تعلق مل کر کلیۂ کوسائن کی ترتیب کرتے ہیں۔ یہ ضابطے تمام مثلثات کے لیے صادق ہیں اور دفعہ 5-3 کے سوال قسم (2) اور (3) کے حل کرنے کے کام آتے ہیں۔ اگر مساوات (15–18) میں $\gamma = 90°$ تو $c^2 = a^2 + b^2$ اس وجہ سے کلیۂ کوسائن بعض اوقات مسئلہ فیثاغورث کی تعمیم کہلاتا ہے۔

15-7 . غیر قائمہ مثلثات پر اطلاق :

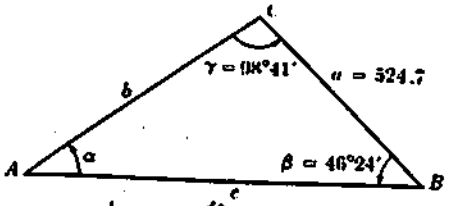
کلیۂ سائن اور کوسائن کے استعمال کی وضاحت کرنے کے لیے ہم مندرجہ ذیل مثالوں پر غور کریں۔

مثال 1 : شکل 15-14 کے مثلث ABC کو حل کرو اگر $a = 524.7$ ، $\beta = 46°24'$ اور $\gamma = 98°41'$

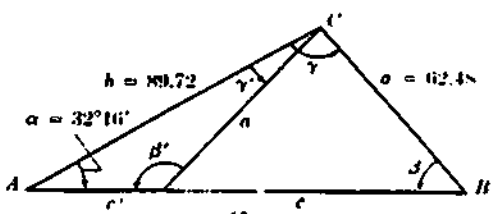
حل : اوّل $\alpha = 180° - (46°24' + 98°41') = 34°55'$ ؛ b اور c کو معلوم کرنے کے لیے۔ جبکہ ہمیں α دیا ہوا ہے ہم کلیۂ سائن کا استعمال کر سکتے ہیں۔

$$b = \frac{a}{\sin \alpha} \sin \beta \qquad c = \frac{a}{\sin \alpha} \sin \gamma$$

$\log 524.7 =$	$12.7190 - 10$	$\log \frac{a}{\sin \alpha} =$	2.9622
$(-) \log \sin 34°55' =$	$9.7577 - 10$	$(+) \log \sin 98°41' =$	$9.9950 - 10$
$\log \frac{a}{\sin \alpha} =$	2.9622	$\log c =$	$12.9572 - 10$
$(+) \log \sin 46°24' =$	$9.8590 - 10$	$c =$	906.2
$\log b =$	$12.8221 - 10$		
$b =$	663.9		



شکل 15-14



شکل 15-15

یہ مثال دفعہ 15-3 میں قسم (1) کی وضاحت کرتی ہے۔

مثال 2 : $a = 62.48$ ، $b = 89.72$ اور $\alpha = 32°16'$ کے لیے تمام مثلث نکالو۔

حل : مشتبہ قسم کا سوال (4) کی وضاحت یہاں کی گئی ہے۔ کیوں کہ $\sin(180° - \beta) = \sin\beta$ اس لیے یہ ممکن ہے کہ دو حل ہوں۔ اگر ہم کلیہ سائن استعمال کریں اور β کے لیے حل کریں تو ہمیں دو قیمتیں حاصل ہوں گی جس میں سے ہر ایک کے لیے γ اور c کی دو مطابق قیمتیں ہوں گی۔ پس جیسا کہ شکل 15-15 میں تجویز کیا گیا ہے، ہمیں دو واضح حل حاصل ہوں گے :

$$\sin\beta = b\,\frac{\sin\alpha}{a}$$

$$\log\sin 32°16' = 9.7274 - 10$$
$$(-)\ \log 62.48 = \underline{1.7958}$$
$$\log\frac{\sin\alpha}{a} = 7.9316 - 10$$

$$(+)\ \log 89.72 = \underline{1.9529}$$
$$\log\sin\beta = 9.8845 - 10$$

$$\beta_1 = 50°2' \qquad \text{یا} \qquad \beta_2 = 129°58'$$

پس

$$\gamma_1 = 180° - (\alpha + \beta_1) = 97°42',$$
$$\gamma_2 = 180° - (\alpha + \beta_2) = 17°46'.$$

اب

$$c_1 = \frac{a}{\sin\alpha}\sin\gamma_1 \qquad c_2 = \frac{a}{\sin\alpha}\sin\gamma_2$$

$$\log\frac{a}{\sin\alpha} = 2.0684 \qquad \log\frac{a}{\sin\alpha} = 2.0684$$

$$(+)\ \log\sin 97°42' = \underline{9.9961 - 10} \qquad (+)\ \log\sin 17°46' = \underline{9.4845 - 10}$$

$$\log c_1 = 12.0645 - 10 \qquad \log c_2 = 11.5529 - 10$$

$$c_1 = 116.0, \qquad c_2 = 35.72.$$

مثال 3 : ایسے مثلث کا تیسرا ضلع نکالو جس میں $b = 47$ ، $c = 58$ اور $\alpha = 63°$

حل : اس سوال کے لیے جو دفعہ 15-3 کی قسم (2) ہے کلیہ کوسائن استعمال کرتے ہیں۔ یہاں یہ بات یاد رکھنا اہم ہے کہ اس کلیہ سے چار ہندسوں والی جدول کی مدد سے ہم تیسرے ضلع کو صرف دو ملحوظ ہندسوں تک میں نکال سکتے ہیں کیوں کہ اس میں جذر نکالنا بھی شامل ہے :

$$\begin{aligned} a^2 &= (47)^2 + (58)^2 - 2 \cdot 47 \cdot 58 \cos 63° \\ &= 2209 + 3364 - 2475.2 \\ &= 3097.8 \end{aligned}$$

پس

$$a = 56 \quad \text{(تقریباً)}$$

دوسرے زاویہ کلیات سائن کے استعمال سے معلوم کیے جا سکتے ہیں۔

مثال 3 سے یہ واضح ہے کہ کلیہ کوسائن اس قسم کے سوالوں کے لیے موزوں نہیں ہے جس میں دو سے زیادہ ملحوظ ہندسے نکالنا ضروری ہوں۔ ایسے حالات میں ایک دوسرا کلیہ موسوم بہ **کلیہ مماس اوّل** استعمال کیا جا سکتا ہے۔ اس تعلق سے $a/\sin\alpha = b/\sin\beta$ یہ ثابت کرنا مشکل نہیں ہے کہ

$$\frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\sin\alpha + \sin\beta} = \frac{a - b}{a + b}.$$

اگر ہم اسے اور دفعہ 6-9 کے سوال 25 کی مدد لیں تو ہمیں حاصل ہوگا

$$\boxed{\frac{\tan\frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\tan\frac{1}{2}(\alpha + \beta)} = \frac{a - b}{a + b}.} \qquad (15\text{-}19)$$

یہ مساوات اور اسی قسم کے پانچ اور ضابطے جنھیں حروف کے تبادل مقام کرنے اور باری باری سے لینے میں کلیہ مماس اوّل کو مرتب کرتا ہے (دیکھو سوال 7)۔

مثال 4 : ایسے مثلث کو حل کرو جس میں $a = 16.47$ ، $b = 25.49$ اور $c = 33.77$

حل : یہ قسم (3) کی مثال ہے۔ اس میں پھر کلیہ کوسائن کا استعمال درکار ہوگا۔ ہمیں معلوم ہے :

$$a^2 = 271.26, \quad 2ab = 839.64,$$
$$b^2 = 649.74, \quad 2ac = 1112.4,$$
$$c^2 = 1140.4, \quad 2bc = 1721.6,$$

تاکہ

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = 0.8823, \quad \text{یا} \quad \alpha = 28°5',$$

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = 0.6850, \quad \text{یا} \quad \beta = 46°46',$$

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = -0.2613, \quad \text{یا} \quad \beta = 105°9'$$

حل کی آسانی سے جانچ کی جاسکتی ہے کیوں کہ $\alpha + \beta + \gamma = 180°$

مثال 4 کو پانچ ہندسوں والی لوگارتمی جدول کی مدد سے حل کرسکتے تھے لیکن کلیہ کوسائن کی ترتیب کی وجہ سے عمل لمبا ہوجاتا تاہم دو یم کلیہ مماس بڑے اعداد نیز لوگارتمی حساب کے حالات کے مطابق ہے۔ مثال 4 میں $\cos\alpha$ کی عبارت کے دونوں ممبروں میں 1 جوڑکر اور 2 سے تقسیم کرکے دائیں ہاتھ کی عبارت کے اجزا کرنے سے ہمیں حاصل ہوگا

$$\frac{1 + \cos\alpha}{2} = \frac{(b + c + a)(b + c - a)}{4bc}$$

مزید

$$\frac{1 - \cos\alpha}{2} = \frac{(a + b - c)(a - b + c)}{4bc}.$$

اب ان عبارات میں $(a + b + c)/2 = s$ رکھ کر اور مساوات (6–49) اور (6–51) کی طرف اپنی توجہ منعطف کریں تو حاصل ہوگا

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s - b)(s - c)}{bc}}$$

اور

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s(s - a)}{bc}}.$$

اگر ان کو ایک دوسرے سے تقسیم کردیں تو حاصل ہوگا

$$\boxed{\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{s - a},} \qquad (15–20)$$

جہاں کہ

$$r^* = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

مساوات (15–20) اور مماثل ضابطے

$$\tan\frac{\beta}{2} = \frac{r}{s-b}$$

اور

$$\tan\frac{\gamma}{2} = \frac{r}{s-c}$$

دوم کلیہ مماس کہلاتے ہیں اور کسی بھی مثلث کے زاویے اس مثلث کے تینوں اضلاع کے ارکان میں دیتے ہیں [دیکھو سوال (10)]۔

سوالات

1. مندرجہ ذیل مثلث ABC حل کرو جن میں دیا گیا ہے

(a) $\alpha = 62°40'$, $\beta = 79°20'$, $a = 147$;
(b) $\beta = 81°43'$, $\gamma = 57°51'$, $c = 47.35$;
(c) $\alpha = 47°57'$, $\gamma = 118°11'$, $b = 87270$;
(d) $\beta = 14°36'$, $\gamma = 53°8'$, $b = 8.367$.

2. وہ تمام مثلث معلوم کرو اور کھینچو جس میں $a = 62.48$ ، $b = 43.17$ اور $\alpha = 32°16'$ مثال 2 سے موازنہ کرو [اشارہ: اس میں دو حل ہونا ناممکن ہے کیوں کہ $\beta_2 + \alpha > 180°$]۔

3. کیا ایسا کوئی مثلث ہو سکتا ہے جس میں $a = 62.48$ ، $b = 143.4$ اور $\alpha = 32°16'$ ؟ مثال 2 سے موازنہ کرو اور ایک شکل کھینچو [اشارہ: کیا $\sin\beta$ ایک سے بڑا ہو سکتا ہے؟]۔

4. اس قسم کے سوالات میں جہاں دو اضلاع اور ایک زاویہ، زاویہ قائمہ سے چھوٹا اور ان اضلاع

---

* دفعہ 5–15 کے سوال 30 اور اسی دفعہ کے سوال 12 کے نتائج سے r کسی بھی مثلث کے داخلی دائرے کا نصف قطر نکلا ہے۔

میں سے ایک کے مقابل دیا ہوا تو سوال 2 اور 3 ، اور مثال 2 کا موازنہ کر کے ہم مختلف امکانات نوٹ کریں گے۔ یہ مان کر کہ a ، b اور α دیے ہوئے ہیں مندرجہ ذیل کو شکل 15-16 کی مدد سے واضح کرو :

$\alpha > 90°$:

اگر $a \leq b$ تو کوئی حل نہ ہوگا

اگر $b < a$ تو کوئی حل نہ ہوگا

$\alpha < 90°$

اگر $a < b \sin \alpha$ تو کوئی حل نہ ہوگا

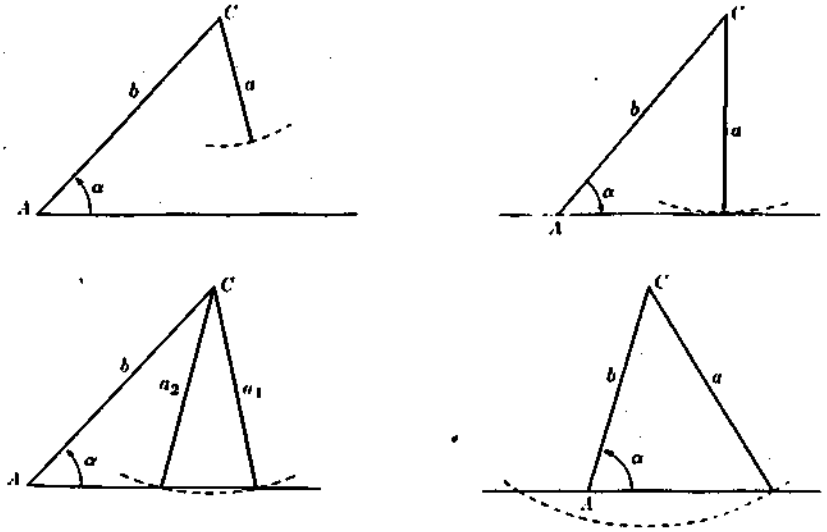
اگر $a = b \sin \alpha$ تو ایک مخصوص مثلث قائمہ ہوگا

اگر $b \sin \alpha < a < b$ تو دو حل ہوں گے

اگر $a \geq b$ تو ایک حل ہوگا

مندرجہ ذیل میں سے ہر ایک میں یا تو یہ ثابت کرو کہ کوئی حل نہیں یا سب حل نکالو

(a) $b = 59.4$, $c = 72.3$, $\beta = 38°40'$
(b) $a = 49.3$, $c = 8.72$, $\alpha = 45°10'$
(c) $a = 14.72$, $b = 25.64$, $\beta = 147°47'$
(d) $b = 4.927$, $c = 5.764$, $\gamma = 57°18'$



شکل 15-10

6. مندرجہ ذیل میں سے ہر ایک مثلث کو دیے ہوئے زاویے کے مقابل ضلع کے لیے حل کرو :

(a) $a = 4, \quad b = 7, \quad \gamma = 30°$
(b) $a = 7.6, \quad c = 9.2, \quad \beta = 47°$
(c) $b = 8.3, \quad c = 4.4, \quad \alpha = 138°$

*7. ذیل کے مثلثات کو حل کرو جن میں

(a) $b = 18.62, \quad c = 35.61, \quad \alpha = 52°18'.$

اشارہ : اوّل کلیہ مماس کو استعمال کرو جس میں

$\frac{1}{2}(\gamma + \beta) = 63°51', \quad c + b = 54.23, \quad c - b = 16.99$ اور

$\frac{1}{2}(\gamma - \beta)$ کو معلوم کرو تو $\frac{1}{2}(\gamma + \beta) + \frac{1}{2}(\gamma - \beta) = \gamma$ وغیرہ۔]

(b) $a = 463, \quad b = 628, \quad \gamma = 57°40'.$

8. مندرجہ ذیل مثلثات کو حل کرو جبکہ

(a) $a = 356.8, \quad c = 551.4, \quad \beta = 87°48'$;
(b) $b = 321.0, \quad c = 672, \quad \alpha = 124°16'.$

9. مندرجہ ذیل مثلثات کو کلیہ کوسائن کی مدد سے معلوم کرو :

(a) $a = 4, \quad b = 5, \quad c = 6$;
(b) $a = 32, \quad b = 56, \quad c = 63.$

*10. مندرجہ ذیل مثلثات کو آسان ترین طریقے سے حل کرو :

(a) $a = 18.76, \quad b = 25.31, \quad c = 29.65.$

اشارہ : اگر لوگارتم اور دویم کلیہ مماس استعمال کریں تو عمل کو اس طرح ترتیب دیں :

$2s = 73.72$
$s = 36.86$
$s - a = 18.10$
$s - b =$
$s - c =$

$\log (s - a) =$
$\log (s - b) =$
$(+) \log (s - c) =$
$\log$ شمار کنندہ $= 3.1782$
$(-) \log s =$
$\log r^2 =$
$\log r = 0.8058$

$\log r =$ $\log r =$ $\log r =$

$\log (s - a) =$ ____ $(-) \log (s - b) =$ ____ $(-) \log (s - c) =$

$$\log \tan \frac{\alpha}{2} = \qquad \log \tan \frac{\beta}{2} = \qquad \log \tan \frac{\gamma}{2} =$$

$$\frac{\alpha}{2} = \qquad \frac{\beta}{2} = \qquad \frac{\gamma}{2} =$$

(b) $a = 523, \quad b = 576, \quad c = 615;$
(c) $a = 0.8147, \quad b = 0.6834, \quad c = 0.3449;$
(d) $a = 4.32, \quad b = 5.78, \quad c = 13.44.$

11. ثابت کرو کہ شکل 15-6 میں دیے گئے مثلث کا رقبہ مندرجہ ذیل ضابطے سے نکالا جائے گا :

$$K = \tfrac{1}{2}bc \sin \alpha.$$

حروف کو باری باری لکھنے سے حاصل ہوگا

$$K = \tfrac{1}{2}ac \sin \beta = \tfrac{1}{2}ab \sin \gamma.$$

12. مثال 4 کے تحت بحث میں آئی ہوئی $\sin \theta/2$ اور $\cos \theta/2$ کی قیمت اور مساوات $\frac{1}{2} \sin \alpha = \sin \alpha/2 \cos \alpha/2$ کے ضابطے 6-43 کی مدد سے ثابت کرو کہ

$$K = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

اسی ضابطہ اور دفعہ 15-5 کے سوال 30 کے نتیجہ $K = rs$ جہاں r داخلی دائرے کا نصف قطر ہے، ہم مندرجہ ذیل قیمت کو ثابت کرتے ہیں

$$r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}},$$

13. سوال 11 اور کلیہ سائن کو استعمال کر کے ثابت کرو کہ

$$K = \frac{a^2 \sin \beta \sin \gamma}{2 \sin \alpha} = \frac{b^2 \sin \gamma \sin \alpha}{2 \sin \beta} = \frac{c^2 \sin \alpha \sin \beta}{2 \sin \gamma}.$$

14. گزشتہ سوالات میں سے اُستاد کے نامزد کیے گئے سوالات میں مثلثات کا رقبہ نکالو۔

15. ایسے متوازی الاضلاع کے ضلعوں کی لمبائی دریافت کرو جس کا وتر جو 72.83 انچ لمبا ہے اضلاع سے علی الترتیب $27°52'$ اور $16°41'$ کے زاویے بناتا ہے۔

16. اگر 74.3 فٹ اونچا ایک درخت جو کہ پہاڑی کے ڈھلوان پر ایستادہ ہے درخت کے پایے سے 147 فٹ دوری پر $19°30'$ کا زاویہ بناتا ہے تو دریافت کرو کہ پہاڑی کی ڈھلوان

اُفق کے ساتھ کیا زاویہ بنائے گا؟ [فاصلہ سیدھا پہاڑی کے ڈھلوان کے ساتھ ساتھ ناپا گیا ہے]

17. دو ہوائی راستے ایک دوسرے کو 49° کے زاویے پر منقطع کرتے ہیں۔ کسی لمحے ہوائی جہاز A چوراہے (تقاطع) سے 32 میل پر ہے اور B اسی تقاطع سے 76 میل تو بتاؤ کہ اس لمحے ان دونوں کے درمیان فاصلہ کیا ہے؟ (دو حل)

18. متوازی الاضلاع کے دونوں اضلاع 68 اور 83 انچ ہیں اور ایک وتر "42 ہے۔ تو متوازی الاضلاع کے زاویے نکالو۔

19. ایک نقطہ سے جو اُس افقی سطح میں ہے جس میں کہ ایک عمارت کا فرش بھی ہے ایک ایسے جھنڈے کے پول کی چوٹی اور پایے کا زاویۂ ارتفاع جو اُس عمارت کی چھت پر لگا ہے علی الترتیب 64°40′ اور 59°50′ ہیں۔ اگر عمارت 112 فٹ اونچی ہے تو جھنڈے کے پول کی اونچائی کیا ہوگی؟

20. ایک ریل گاڑی جب کسی پٹڑی پر شمال کی جانب سفر کر رہی ہے تو اُس کے انجینیر نے دُھوئیں کا ایک کالم شمال 20°20′ مشرق میں دیکھا۔ 475 فٹ سفر کرنے کے بعد اُس نے وہی دُھواں جنوب 71°40′ مشرق سمت میں مشاہدہ کیا۔ تو دُھواں پہلے نقطۂ مشاہدہ سے کتنے فاصلے پر تھا؟ دوسرے سے؟ دُھواں ریل کی پٹڑی سے کتنی دُور تھا؟

21. ایک جنگی جہاز دریا کے خطِ ساحل کے ساتھ ساتھ شمال 18°40′ مشرق کی سمت 36.5 میل فی گھنٹے کی مستقل رفتار سے اُڑ رہا ہے۔ ایک ہوائی جہازوں کا دستہ جو جنگی جہاز سے مشرق کی طرف 186 میل فی گھنٹے کی رفتار سے اُڑ رہا ہے۔ وہ کس سمت اُڑیں تاکہ وہ جنگی جہاز کے قریب جلد از جلد پہنچ سکیں؟

*22. اگر R دو قوتوں f_1 اور f_2 کا حاصل ہو اور R ، f_1 اور f_2 انفرادی طور پر اپنی اپنی قدر کی نمائندگی کریں تو ضابطہ $R^2 = f_1^2 + f_2^2 + 2f_1f_2\cos\theta$ کی وضاحت کرو۔ جبکہ θ دونوں قوتوں کے درمیان زاویہ ہے [یاد کرو دفعہ 15-5 کا سوال 22] ۔ ذیل کی دو قوتوں کے حاصل قوت کی سمت اور قدر نکالو:

75 پونڈ جو شمال کی طرف عمل کر رہی ہو اور 93 پونڈ شمال 63° مغرب

کی سمت۔

23. ایک ہوائی جہاز پُرسکون ہوا میں 153 میل فی گھنٹہ کی رفتار سے اُڑتا ہے۔ اگر ہوا 27 میل فی گھنٹہ کی رفتار سے جنوب 21° مغرب کی سمت چل رہی ہو اور جہاز جنوب 53° مشرق کی سمت جا رہا ہو تو ہوائی جہاز کی رفتار اور سمت کی قدر بہ لحاظ زمین معلوم کرو۔

24. 61.3 پونڈ اور 34 9 پونڈ قوتوں کا حاصل قوت 73.7 پونڈ کی قوت ہے۔ دونوں قوتوں میں سے ہر ایک کے ساتھ حاصل قوت کیا زاویہ بناتا ہے؟

باب 16

اعدادِ مُلتف

دفعہ 5-11 میں حقیقی اعداد کے نظام کی توسیع اور تعمیم کے امکانات کا تذکرہ کیا گیا تھا۔ اس کی ایک توسیع حقیقی اعداد کے تمام مرتّب جوڑوں کا الجبرا ہے۔ ہم اس بہت ہی مفید تعمیم پر مختصر بحث کریں گے اور پھر اس کی ایک بہت ہی عام تشریح پر کچھ تفصیل کے ساتھ غور کریں گے۔

16-1 . مرتّب جوڑوں کا الجبرا : تمام حقیقی اعداد کے مرتّب جوڑوں کے سٹ (x, y) کو بہ حیثیت عناصر لے کر ہم ایک تعمیمی الجبرا کی ساخت کر سکتے ہیں۔

ہم ثابت کریں کہ سٹ $P = \{(x, y) | x, y \in R\}$ ایک میدان ہے جس میں جوڑ اور ضرب دونوں کے عمل کی مساوات (16-1) اور • (16-4) سے تعریف کی گئی ہے۔ تاہم اس سے قبل ہمیں اس کی تعریف کرنا چاہیے کہ دو عناصر کے برابر ہونے سے کیا مراد ہے (دفعہ 3-1، سوال 12 کو یاد کرو) ؟

تعریف 16-1 : دو مرتّب جوڑے (x_1, y_1) اور (x_2, y_2) برابر کہلائیں گے اگر اور صرف اگر $x_1 = x_2$ اور $y_1 = y_2$

اس لیے $(x + 2y, 2x - y) = (4, 3)$ اگر اور صرف اگر $x + 2y = 4$ اور $2x - y = 3$ یا خاص طور سے $x = 2$ اور $y = 1$

اب ہم مرتّب جوڑوں کے لیے عمل جوڑ اور ضرب کی تعریف کرنے کے لیے تیار ہیں اور ان تعریفوں

• باب دو کے موضوعات میدان کی طرف توجّہ منعطف کریں۔

کے ساتھ یہ ثابت کرسکتے ہیں کہ P ایک میدان ہوگا۔*

تعریف 16-2 : دو مرتّب جوڑوں (x_1, y_1) اور (x_2, y_2) کی حاصل جمع مرتّب جوڑا $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ ہوگا اور یہ لکھا جائے گا

$$\boxed{(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2).} \qquad (16\text{-}1)$$

مثال کے طور پر $(2, 1) + (3, 2) = (2 + 3, 1 + 2) = (5; 3)$

یہ تعریف کے طریقۂ بیان سے واضح ہے کہ P عمل جوڑ کے تحت بند ہے۔ مزید یہ کہ یہ عمل تقلیبی اور تلازمی ہے کیوں کہ حقیقی اعداد میں خود ہی یہ خصوصیات ہوتی ہیں (دیکھو سوال 1 اور 2)۔

کیوں کہ مساوات (16-1) سے تمام (x, y) کے لیے $(x, y) + (0, 0) = (x, y)$ اور $(0, 0)$ ایک مرتّب جوڑا ہے۔ جوڑ کے لیے اکائی عنصر موجود ہے اور وہ $(0, 0)$ کے برابر ہے۔ مزید تمام (x, y) کے لیے $(x, y) + (-x, -y) = (0, 0)$ اس لیے عمل جوڑ کے لیے ایک معکوس عنصر موجود ہے۔ جیسا کہ حقیقی اعداد میں مساوات $a + x = b$ کے حل سے x کی قیمت $b - a$ لکھی جاتی ہے اور تفریق کہلاتی ہے [دفعہ 2-4 کی مساوات 2-1 اور سوال 7 کی طرف متوجّہ ہوں] ۔ ذیل کی مساوات میں (x, y) کا حل

$$(x_1, y_1) + (x, y) = (x_2, y_2) \qquad (16\text{-}2)\ \dagger$$

دو مرتّب جوڑوں (x_2, y_2) اور (x_1, y_1) کا تفریق کہلاتا ہے۔ کیوں کہ مساوات (16-2) سے مُراد ہے

$$x_1 + x = x_2, \qquad y_1 + y = y_2,$$

$$x = x_2 - x_1, \qquad y = y_2 - y_1,$$

تفریق (x, y) کو بہ حیثیت مرتّب جوڑے $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ کے لکھتے ہیں یا

---

* مرتب جوڑوں کے لیے برابری، جوڑ اور ضرب کی صرف یہی تعریفات ہی ممکن نہیں ہیں بلکہ ان کو خصوصی طور پر اعدادِ ملتف نظام کی ابتدا کے لیے اخذ کیا گیا ہے۔

† مساوات (16-2) اور (16-5) (x, y) کے لیے یکتا حل دیتی ہیں۔

$$(x_2, y_2) - (x_1, y_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1). \qquad (16\text{-}3)$$

حاصل ضرب کی تعریف اتنی واضح نہیں ہے جتنی کہ حاصل جمع کی۔

تعریف 16-3 : دو مرتب جوڑوں (x_1, y_1) **اور** (x_2, y_2) **کا حاصل ضرب مرتب جوڑا ہوتا ہے** $(x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$ **اور لکھا جاتا ہے :**

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1). \qquad (16\text{-}4)$$

مثلاً $(2, 1) \cdot (3, 2) = (2 \cdot 3 - 1 \cdot 2, 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1) = (4, 7)$

دوبارہ تعریف سے واضح ہے کہ P حاصل ضرب کے عمل کے تحت بند ہے۔ مزید یہ کہ عمل ضرب تقلیبی اور تلازمی ہے (سوالات 5 اور 6 دیکھو)۔

کیوں کہ مساوات (16-4) سے تمام (x, y) کے لیے $(x, y) \cdot (1, 0) = (x, y)$ اور $(1, 0)$ ایک مرتب جوڑا ہے تو ضرب کے لیے اکائی کے عنصر کا وجود ہے اور $(1, 0)$ کے برابر ہے۔ مزید کیوں کہ

$$\left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2}\right)$$

موجود ہے جبکہ $(x, y) \neq (0, 0)$ اور

$$(x, y) \cdot \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2}\right) = (1, 0)$$

کیوں کہ تمام $(x, y) \neq (0, 0)$ تو ضرب کے لیے معکوس عنصر موجود ہے۔ یہ بھی ثابت کیا جا سکتا ہے کہ P کے عناصر کے لیے کلیہ تقسیمی صادق ہے (دیکھو سوال 9)۔

حقیقی اعداد میں تقسیم کی تعریف ضرب کی اصطلاح میں کی جاتی ہے اور دو مرتب جوڑوں کے حاصل تقسیم کی تعریف میں بھی اسی طرز کا اتباع ہے (دفعہ 2-4 کی تعریف 2-2 اور سوال 11 کی طرف متوجہ ہوں)۔ کیوں کہ حقیقی اعداد $x = a/b$ کی تعریف $bx = a$ مساوات سے کی جا سکتی ہے۔ ہم دو مرتب جوڑوں (x_1, y_1) اور (x_2, y_2) کے حاصل تقسیم کی تعریف بہ حیثیت مرتب جوڑے (x, y) کے کر سکتے ہیں جو کہ اس مساوات کا حل ہے :

$$(x_2, y_2) \cdot (x, y) = (x_1, y_1), \qquad (x_2, y_2) \neq (0, 0). \tag{16-5}$$

مساوات (16-4) کے استعمال سے ہمیں حاصل ہوگا

$$(xx_2 - yy_2, xy_2 + x_2y) = (x_1, y_1),$$

اور اس لیے $$x_2x - y_2y = x_1, \qquad y_2x + x_2y = y_1.$$

x اور y کے لیے حل کرکے ہمیں حاصل ہوگا

$$x = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \qquad y = \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

اس طرح دو مرتب جوڑوں کے حاصل تقسیم کو لکھا جا سکتا ہے :

$$\boxed{\frac{(x_1, y_1)}{(x_2, y_2)} = \left(\frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}\right)} \tag{16-6}$$

مثلاً $$\frac{(4, 8)}{(3, 1)} = (2, 2).$$

سوالات

1. ثابت کرو کہ مساوات 16-1 میں مرتب جوڑوں کے لیے جو جوڑ کی تعریف کی گئی ہے تقلیبی ہے یعنی $$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_2, y_2) + (x_1, y_1).$$

2. ثابت کرو کہ یہ جوڑ تلازمی ہے یعنی

$$[(x_1, y_1) + (x_2, y_2)] + (x_3, y_3) = (x_1, y_1) + [(x_2, y_2) + (x_3, y_3)].$$

3. ثابت کرو کہ تمام $(x, y) \in P$ کے لیے $(x, y) + (0, 0) = (x, y)$ یہ کون سے موضوعہ میدان کو ظاہر کرتا ہے؟

4. ثابت کرو کہ تمام $(x, y) \in P$ کے لیے $(x, y) + (-x, -y) = (0, 0)$ یہ میدان کے کون سے موضوعہ کی نمائندگی کرتا ہے؟

5. ثابت کرو کہ مساوات (16-4) میں مرتب جوڑوں کے ضرب کی جو تعریف کی گئی ہے وہ تقلیبی ہے یعنی $$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_2, y_2) \cdot (x_1, y_1).$$

6. ثابت کرو کہ مندرجہ ذیل حاصل ضرب تلازمی ہے یعنی

$$[(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2)] \cdot (x_3, y_3) = (x_1, y_1) \cdot [(x_2, y_2) \cdot (x_3, y_3)].$$

7. ثابت کرو کہ تمام $(x, y) \in P$ کے لیے $(x, y) \cdot (1, 0) = (x, y)$ ؛ یہ میدان کے کون سے موضوعہ کی نمائندگی کرتا ہے؟

8. ثابت کرو کہ $(x, y) \cdot \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2}\right) = (1, 0)$

تمام $(x, y) \in P$ کے لیے۔ یہ میدان کے کون سے موضوعہ کا اظہار کرتا ہے؟

9. ثابت کرو کہ P کے عناصر کے لیے موضوعۂ تقسیمی مطمئن ہو جاتا ہے۔

10. سوال 1 تا 9 کے نتائج کے طور پر اور P کے جوڑا اور ضرب کے تحت بند ہونے سے P کے متعلق کیا کہا جا سکتا ہے؟

11. ثابت کرو کہ $(x, y) \cdot (0, 0) = (0, 0)$

12. ثابت کرو کہ $(x, y) = (y, x)$ اگر اور صرف اگر $x = y$

13. ثابت کرو کہ $(0, 1)^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0)$

مندرجہ ذیل میں سے ہر ایک کو ایک واحد مرتب جوڑے کی حیثیت سے ظاہر کرو :

14. $(0, 1)^4$ 15. $(0, 1)^3$ 16. $(0, 1)^5$

سوال 17 تا 25 میں (x, y) کی قیمت نکالو :

17. $(x, y) = (2, 3) + (4, 5)$
18. $(x, y) = (-2, 1) + (3, -7)$
19. $(x, y) = (3, -1) - (4, -2)$
20. $(3, 1) = (x, y) + (5, -1)$
21. $(x, y) = (3, 1) \cdot (2, 3)$
22. $(x, y) = (-1, 2) \cdot (3, -5)$
23. $(x, y) = (2, -1)/(-1, 3)$
24. $(x, y) = (23, 11)/(5, -1)$
25. $(x, y) = (-\frac{1}{2}, \sqrt{3}/2)^2$

16-2. مُلتف اعداد : دفعہ 1-16 میں زیر بحث آئے ہوئے مرتب جوڑوں کے الجبرائی تشریحات میں سے ایک سب سے عام ملتف اعداد کا الجبرا ہے۔

عبارت $x + yi$ جس میں x اور y حقیقی اعداد ہیں اور i کی یہ خصوصیت ہے کہ $i^2 = -1$ مُلتف عدد کہلاتا ہے۔ اگر $y = 0$ ہو تو ملتف عدد لامحالہ حقیقی ہوگا لیکن اگر $y \neq 0$ تو ملتف عدد غیر حقیقی (فرضی) کہلاتا ہے۔ y صفر کے برابر نہ ہو اور $x = 0$

تو $x + yi$ ایک خالص فرضی (خالص غیر حقیقی) ہے۔ x اور y کو حقیقی اعداد کے عام کلیّوں کی تعمیل کرنے کی وجہ سے اور نئے عنصر i کو کلیہ

$$\boxed{i^2 = -1,}$$

کی تعمیل کرنے کی وجہ سے ملتف عدد $x + yi$ کو مرتب جوڑے (x, y) کے مخفف کی حیثیت سے سمجھا جا سکتا ہے۔ یہ ثابت کرنے کے لیے کہ یہ بیان صحیح ہے مطالعہ کرنے والے کو جانچ کر لینا چاہیے کہ ملتف اعداد $x + yi$ اُنھیں کلیّوں کو مطمئن کرتے ہیں جیسا کہ مرتب جوڑے (x, y)؛ خصوصی طور پر دو ملتف اعداد کے حاصل جمع پر غور کرنے میں ہمیں حاصل ہوگا:

$$(x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i. \qquad (16\text{–}7)$$

دو ملتف اعداد کا حاصل ضرب ہوگا

$$\begin{aligned}(x_1 + y_1 i) \cdot (x_2 + y_2 i) &= x_1 x_2 + x_1 y_2 i + x_2 y_1 i + y_1 y_2 i^2 \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i. \qquad (16\text{–}8)\end{aligned}$$

مساوات (16–4) میں دو مرتب جوڑوں کے حاصل ضرب کی تعریف کی وجہ ہم اس مساوات میں دیکھتے ہیں۔ دو ملتف اعداد کا حاصل تقسیم ذیل سے حاصل ہوگا

$$\begin{aligned}\frac{x_1 + y_1 i}{x_2 + y_2 i} &= \frac{(x_1 + y_1 i)(x_2 - y_2 i)}{(x_2 + y_2 i)(x_2 - y_2 i)} \\ &= \frac{x_1 x_2 - x_1 y_2 i + x_2 y_1 i - y_1 y_2 i^2}{x_2^2 - x_2 y_2 i + x_2 y_2 i - y_2^2 i^2} \\ &= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}\, i. \qquad (16\text{–}9)\end{aligned}$$

اس طرح مرتب جوڑے (x, y) کو ملتف عدد $x + yi$ کے نمائندے کی حیثیت سے مانا جا سکتا ہے اور مرتب جوڑوں P کو بہ حیثیت تمام ملتف اعداد کے سٹ کے لیا جا سکتا ہے۔ یہ تمام ملتف اعداد کا سٹ عام طور پر C سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

دو ملتف اعداد جو اپنے غیر حقیقی (فرضی) حصّوں میں صرف ایک علامت میں اختلاف رکھتے ہیں ایک دوسرے کے زوجی کہلاتے ہیں۔ پس $3 + 2i$ اور $3 - 2i$ یا $5i$ اور

$-5i$ زوجی مختلف اعداد ہیں یا زیادہ عمومی طور پر $x + yi$ اور $x - yi$ اسی قسم کے اعداد ہیں (سوالات 9 اور 10 کو نوٹ کرو)۔

اعداد $x + yi$ پر جس میں $y \neq 0$ لفظ "فرضی" ("غیر حقیقی") کا اطلاق بہت ہی نامبارک ہے۔ اگرچہ ابتداءً ان اعداد کو دو درجی مساوات کے حل میں رواج دیا گیا تھا لیکن یہ طبیعیات اور انجینیرنگ میں بے حد مفید ثابت ہوئے ہیں خصوصاً کچھ مخصوص برقی مظاہرات کی صراحت میں۔ ان میدانوں میں استعمال کرنے سے "فرضی" اعداد کی اہمیت اتنی ہی حقیقی ہے جتنی کہ "حقیقی" اعداد کی۔

باب 7 کے چند دو درجی مساوات اور باب 9 کی دوسری مساوات کے بھی حل فرضی اعداد ہیں۔ ان کو اُس وقت صرف منفی اعداد کے جذر کی حیثیت سے ہی دکھایا گیا تھا اور کسی دوسرے قسم کی وضاحت نہیں کی گئی تھی۔ گرافی طور پر ہم نے نوٹ کیا کہ مشتملہ تفاعل میں حقیقی صفر صرف وہیں تھے جہاں مطابق منحنیات نے اُفقی محور کو قطع یا مَس کیا تھا۔ اب ہم ایسے حلوں کو فرضی علامت i کے ارکان میں لکھ سکتے ہیں۔

مثال : مساوات $x^2 - 4x + 6 = 0$ کو حل کرو۔

حل : مساوات (10-7) کی دو درجی مساوات کی مدد سے $c = 6$ اور $b = -4$، $a = 1$ ہمیں حاصل ہوگا :

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(6)}}{2(1)}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{16 - 24}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-8}}{2}$$

$$= \frac{4 \pm 2\sqrt{-2}}{2} = 2 \pm \sqrt{2}\, i.$$

یہ نوٹ کرنا اہم ہے کہ حالانکہ C ایک میدان ہے لیکن یہ باب 4 میں دیے مرتب موضوعات کو مطمئن نہیں کرتا۔ اس لیے یہ ایک مرتب میدان نہیں ہے (دیکھو سوال 18)۔

سوالات

سوالات 1 سے 4 تک میں عبارتوں کو بہ حیثیت ایک واحد مختلف عدد لکھو :

1. (a) $(2 + 5i) + (4 - i)$ (b) $(2 + 5i) - (4 - i)$
2. (a) $(2 + 5i)(4 - i)$ (b) $(2 + 5i)(4 + i)$

3. (a) $\frac{2+5i}{4-i}$ (b) $\frac{2+5i}{4+i}$

4. (a) $i^3 = i \cdot i^2$ (b) $i^4 = i^2 \cdot i^2$, (c) i^5, (d) $1/i$

5. ثابت کرو کہ کسی بھی مثبت عدد صحیح n کے لیے

(a) $i^{4n} = 1$, (b) $i^{4n+1} = i$, (c) $i^{4n+2} = -1$,
(d) $i^{4n+3} = -i$, (e) $i^{n+4} = i^n$.

سوالات 6 سے 10 تک میں حقیقی اعداد کی عام خصوصیات اور یہ حقیقت کہ $i^2 = -1$ ہے، استعمال کرو:

6. دفعہ 1-10 کے سوالات 17، 21 اور 23 کو بیان کرو اور اُن میں مرتّب جوڑوں کو بہ حیثیت مُلتف اعداد کے تشریح اور حل کرو۔

7. اگر مُلتف عدد $x + yi = 0$ تو الجبرائی طریقے سے ثابت کرو کہ $x = 0$ اور $y = 0$ [اشارہ: کیونکہ $x = -yi$ اور $x^2 = -y^2$ تو x اور y کے متعلق کیا کہا جا سکتا ہے؟]

8. اگر $x_1 + y_1 i$ اور $x_2 + y_2 i$ دو ایسے مُلتف اعداد ہیں کہ $x_1 + y_1 i = x_2 + y_2 i$ تو جبر و مقابلہ کی مدد سے ثابت کرو کہ $x_1 = x_2$ اور $y_1 = y_2$

[اشارہ: سب کو ایک طرف بدل کر ایسے کہ $x_1 - x_2 + (y_1 - y_2)i = 0$ اب مسئلہ 7 کو استعمال کرو۔]

9. ثابت کرو کہ دو مُلتف اعداد مزدَوج کی حاصل جمع یا حاصل ضرب دونوں ہی حقیقی ہوں گے۔

10. ثابت کرو کہ اگر دو غیر حقیقی اعداد کا جوڑ یا ضرب حقیقی ہے تو اعداد مُلتف مزدَوج اعداد ہوں گے۔

مندرجہ ذیل مساواتوں کو حل کرو جن میں بعض یا سب حل فرضی ہوں گے:

11. $\frac{2x}{3} - 5i = 0$ 12. $\frac{2x-4i}{x+i} = 1$

13. $(2+5i)x + 2i = 0$ 14. $\frac{ix}{2} = 3 - 4i$

15. $x^2 - (3-i)x - 3i = 0$ [اشارہ: اجزاءِ ضربی نکالو]

16. $x^2 + ix - x - i = 0$ 17. $ix^2 + 7x - 12i = 0$.

18. ثابت کرو کہ مختلف اعداد C کا سٹ باب 4 میں دیے ہوئے چار موضوعات مرتب کو مطمئن نہیں کرتا۔
[اشارہ: مختلف اعداد i اور 0 پر غور کرو۔ اگر موضوعہ O1 کو مطمئن کرتا ہے تو یا تو صفر کے برابر ہو، صفر سے بڑا ہو یا صفر سے چھوٹا ہو: (1) $i \neq 0$ کیوں کہ $i^2 = -1$ اور $-1 \neq 0$ (2) اگر $i > 0$ تو موضوعہ O4 سے ہم دونوں طرفین کو i سے ضرب دیں تاکہ $i^2 > 0$ یا $-1 > 0$ لیکن یہ ناممکن ہے (3) اگر $i < 0$ تو نتیجہ کیا ہوگا؟]

16-3. **مساوات کے مختلف جذر (قیمتیں)** : سابقہ دفعہ کی ایک مثال میں ایک مساوات کی قیمتیں دو مزدوج فرضی اعداد $2 + \sqrt{2}i$ اور $2 - \sqrt{2}i$ تھے۔ کسی بھی حقیقی ضریب والے کثیر رکنی میں ایسی قیمتیں ہمیشہ جوڑوں میں آتی ہیں۔ اس نتیجے کو بہ حیثیت ایک بنیادی مسئلہ کے بیان کریں گے۔

مسئلہ 16-1 : اگر مختلف عدد $a + bi$ جس میں $b \neq 0$ ذیل کی ایک کثیر رکنی مساوات کی ایک جذر (قیمت) ہو

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0, \quad (16\text{-}10)$$

جس میں $a_0 \neq 0$، n ایک مثبت عدد صحیح ہے اور a_i سب حقیقی مستقل ہوں تو اس کا مزدوج $a - bi$ بھی اس کا ایک جذر ہوگا۔

ثبوت : کیوں کہ $a + bi$، $f(x) = 0$ کی ایک قیمت ہے تو $a + bi$، $f(x)$ کا ایک جزو ہوگا۔ مان لو کہ ہم $f(x)$ کو حاصل ضرب

$[x - (a + bi)][x - (a - bi)] \equiv x^2 - 2ax + a^2 + b^2$ سے اس وقت تک تقسیم دیں جب تک کہ باقی $x^2 - 2ax + a^2 + b^2$ سے درجے میں کم ہو۔ اس لیے باقی زیادہ سے زیادہ ایک درجے کا ہوگا۔ علامتی طور پر اس کو اس طرح لکھ جا سکتا ہے:

$$\frac{f(x)}{x^2 - 2ax + a^2 + b^2} \equiv q(x) + \frac{Rx + S}{x^2 - 2ax + a^2 + b^2}, \quad (16\text{-}11)$$

$$f(x) \equiv [x^2 - 2ax + a^2 + b^2]q(x) + Rx + S,$$

جس میں R اور S حقیقی مستقل ہیں۔ کیوں کہ یہ مساوات تمام x کے لیے صادق ہے۔ یہ صادق ہے $x = a + bi$ کے لیے بھی۔ اس طرح

$$f(a + bi) = 0 \cdot q(a + bi) + R(a + bi) + S = 0.$$

نتیجے میں۔ سوال 7 میں بیان کی گئی خصوصیت کی بنا پر

$$Ra + S = 0 \quad \text{اور} \quad Rbi = 0$$

کیوں کہ $b \neq 0$ ، $R = 0$ اور اس لیے $S = 0$ جو ثابت کرتا ہے کہ مساوات (11–16) کی تقسیم قطعی ہے۔ اس لیے $a - bi$ ایک جزو ہوگا $f(x)$ کا یعنی $a - bi$ جذر ہوگا $f(x) = 0$ کا۔

اس مسئلہ کے نتیجے کے طور پر ہم مساوات (10–16) کے جذر کی بہت سی خصوصیات کو نوٹ کرتے ہیں: (1) ایسی مساوات کے غیر حقیقی (فرضی) جذر جوڑوں میں آتے ہیں۔ (2) ایسی مساوات کے غیر حقیقی جذر جفت تعداد میں آتے ہیں (3) اگر ایسی مساوات کا درجہ طاق ہوگا تو اس مساوات کا کم از کم ایک جذر حقیقی ہوگا۔

سوالات

دی ہوئی قیمتوں (جذر) کی مدد سے ایسی سہ درجی مساوات دریافت کرو جس کے ضریب اعداد صحیح ہوں:

1. $3, 2 - i$
2. 2
3. $\frac{1}{2}, -5 + i$
4. $\frac{3}{2}, i - 4$
5. $-\frac{1}{2}, 3 + \sqrt{2}\,i$
6. $\frac{2}{3}, (-3 + \sqrt{5}\,i)/2$

مندرجہ ذیل مساوات کو حل کرو جس کی ایک قیمت قوسین میں دی ہوئی ہے [اشارہ: تقسیم استعمال کرو]:

7. $x^3 - 4x^2 + 9x - 36 = 0, \ (3i)$
8. $2x^3 + 9x^2 + 14x + 5 = 0, \ (-2 + i)$
9. $x^3 - 8x^2 + 23x - 22 = 0, \ (3 - \sqrt{2}\,i)$
10. $2x^3 - 8x^2 + 11x - 5 = 0, \ \frac{1}{2}(3 + i)$

16–4. ملتف اعداد کی گرافی نمائندگی: مرتب جوڑے (x, y) کی تشریح بہ حیثیت ملتف اعداد $x + yi$ ملتف اعداد کی معمولی گرافی نمائندگی میں مدد دیتا ہے۔ کیوں کہ (x, y) کو مستطیلی مخصص نظام میں بہ حیثیت ایک نقطہ کے پلاٹ کیا جا سکتا ہے۔ ہر ملتف عدد $x + yi$ کو سطح کے اندر کسی بھی نقطہ سے رابطہ قائم کیا جا سکتا

ہے اور سطح کے ہر نقطہ کو کسی بھی مُلتف عدد سے مربوط کیا جا سکتا ہے۔ یہ مستوی "ملتف مستوی" کہلاتا ہے اور وہ شکل جس پر یہ مُلتف اعداد پلاٹ کیے جاتے ہیں ارگنڈ خاکہ* کہلاتا ہے۔ حقیقی اعداد x محور پر واقع ہوتے ہیں۔ خالص غیر حقیقی (فرضی) اعداد y - محور پر اور ایسا عدد جیسا کہ $2i - 5$ نقطہ $(-2, 5)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

اس مستوی میں کوئی بھی نقطہ $P(x, y)$ علاوہ $(0, 0)$ کے اُس دائرے پر واقع ہوتا ہے جس کا مرکز $(0, 0)$ ہے اور نصف قطر r جہاں $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ، فرض کرو کہ زاویہ θ معیاری مقام پر ایسے ہے کہ OP بہ حیثیت اُس کے انتہائی ضلع کے ہو۔ دیکھو شکل 16-1 تاکہ

$$\boxed{x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta.} \tag{16-12}$$

اس لیے مُلتف اعداد $x + yi$ کو مثلثاتی شکل میں اس طرح لکھیں گے

$$\boxed{x + yi = r(\cos\theta + i\sin\theta).} \tag{16-13}$$

کیوں کہ $\sin\theta$ اور $\cos\theta$ دونوں ہی دَوری ہیں جن کا دَور $2\pi = 360°$ ہے ، $r > 0$ اور کسی بھی عدد صحیح k کے لیے

$$r[\cos(\theta + k\,360°) + i\sin(\theta + k\,360°)]$$

بھی $x + yi$ کے لیے ایک مثلثاتی شکل ہے۔ ہم یہ نوٹ کریں کہ r صفر سے بڑا ہونا چاہیے۔ مندرجۂ ذیل قیمت

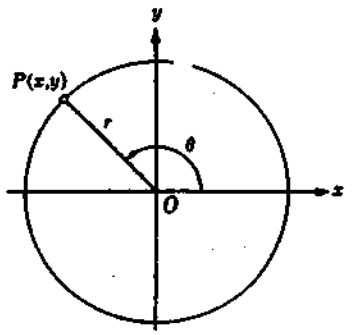
$$\boxed{r = \sqrt{x^2 + y^2}} \tag{16-14}$$

$x + yi$ کی **مطلق قیمت** یا **مقیاس** کہلاتی ہے۔ زاویہ θ $x + yi$ کا **محیط** یا **سعت** کہلاتا ہے۔

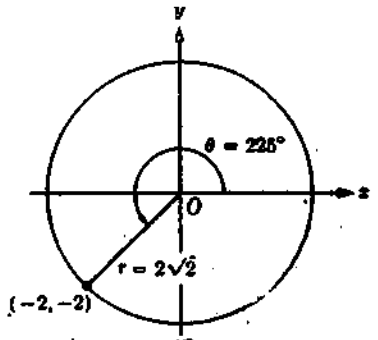
---

* مُلتف اعداد کو گرافی طریقے پر ظاہر کرنے کا نظام ویزل (ناروجین)، ارگنڈ (فرانسیسی) اور گاز (جرمن) نے علاحدہ علاحدہ تقریباً 1800 میں دریافت کیا تھا۔

✧ $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ کا اس شکل میں بعض اوقات مخفف $r\,\mathrm{cis}\,\theta$ لکھا جاتا ہے۔



شکل 16-1



شکل 16-2

مثال 1 : مُلتف عدد $-2 - 2i$ کو مثلثاتی شکل میں لکھو۔

حل : نقطہ $(-2, -2)$ جو $-2 - 2i$ کے مطابق ہے کے تعیّن مقام سے (دیکھو شکل 16-2) ہمیں حاصل ہوگا

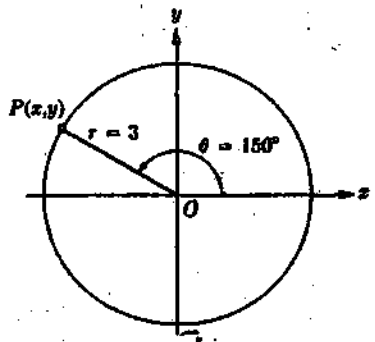
$$r = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$$

اور $\tan\theta = 1$ جبکہ θ تیسرے ربع میں مختتم ہے۔ اس لیے

$\theta = 225°$, اور $\quad -2 - 2i = 2\sqrt{2}\,(\cos 225° + i \sin 225°)$.

مثال 2 : مُلتف عدد $3\,(\cos 150° + i \sin 150°)$ کو $x + yi$ کی شکل میں ظاہر کرو۔

حل : $150°$ زاویہ کے اختتامی ضلع پر، جو معیاری مقام پر ہے، ماخذ سے 3 اکائی دوری پر نقطہ P کا تعیّن مقام کرو۔ جیسا کہ شکل 16-3 میں۔ کیوں کہ $P(x, y)$ ملتف عدد کی نمائندگی کرتا



شکل 16-3

ہے۔ ہمیں حاصل ہوگا

$$x = 3\cos 150° = \frac{-3\sqrt{3}}{2} \quad \text{اور} \quad y = 3\sin 150° = \frac{3}{2}.$$

اس لیے

$$3(\cos 150° + i \sin 150°) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i.$$

مختلف اعداد کی مثلثاتی شکل کا ایک فائدہ ان کا حاصل ضرب حاصل کرنے میں مفید ہوتا ہے۔ $r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ اور $r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ کو دو مختلف اعداد مان کر ہم مندرجہ ذیل مسئلہ حاصل کر سکتے ہیں۔

مسئلہ 16-2 : دو مختلف اعداد کے حاصل ضرب کا مقیاس ہر ایک کے مقیاس کے حاصل ضرب کے برابر ہوگا اور محیط اُن کے محیط کے حاصل جمع کے برابر۔

ثبوت :

$$\begin{aligned} &r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= r_1r_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 + i\cos\theta_1\sin\theta_2 + i\sin\theta_1\cos\theta_2 \\ &\qquad + i^2\sin\theta_1\sin\theta_2) \\ &= r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) \\ &\qquad + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)] \\ &= r_1r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]. \end{aligned} \tag{16-15}$$

سوالات

1. گرافی طریقے پر اُس نقطے کے مقام کا تعین کرو جو مندرجہ ذیل مختلف اعداد میں سے ہر ایک کی نمائندگی کرتا ہے۔ ہر ایک کے لیے اُس کی سمت کی مثبت کترین یا صفر قیمت کو استعمال کر کے ہر ایک کی مثلثاتی شکل لکھو:

(a) 2 (b) -2 (c) $3i$
(d) $-i$ (e) $2 - 2i$ (f) $-2 + 2i$
(g) $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ (h) $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

2. مندرجہ ذیل میں ہر ایک کو $x + yi$ کی شکل میں لکھو:

(a) $3(\cos 0° + i\sin 0°)$ (b) $2(\cos 90° + i\sin 90°)$
(c) $\cos 130° + i\sin 180°$ (d) $2(\cos 225° + i\sin 225°)$

(e) $2(\cos 270° + i \sin 270°)$ (f) $8(\cos 135° + i \sin 135°)$
(g) $4(\cos 300° + i \sin 300°)$ (h) $6(\cos 150° + i \sin 150°)$

3. دیے ہوئے حاصل ضرب نکال کر آخری نتیجے کو $x + yi$ کی شکل میں لکھو۔ اپنے جواب کی جانچ دیے ہوئے اعداد میں سے ہر ایک کو $x + yi$ کی شکل میں لکھ کر اور پھر حاصل ضرب کو الجبرائی طریقے پر حاصل کر کے کرو :

(a) $3(\cos 60° + i \sin 60°) \cdot 2(\cos 30° + i \sin 30°)$
(b) $4(\cos 120° + i \sin 120°) \cdot 2(\cos 90° + i \sin 90°)$
(c) $3(\cos 135° + i \sin 135°) \cdot 4[\cos(-45°) + i \sin(-45°)]$
(d) $[2(\cos 120° + i \sin 120°)]^3$

*4. ثابت کرو کہ دو ملتف اعداد $r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ اور $r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ کے حاصل تقسیم ذیل کے طریقے پر لکھ سکتے ہیں :

$$\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)]. \qquad (16\text{–}16)$$

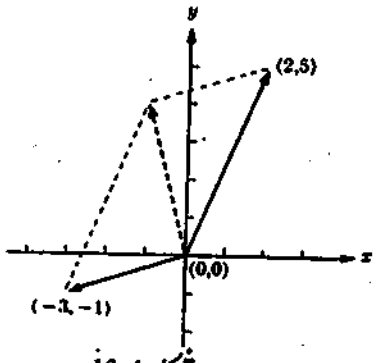
5. مندرجہ ذیل تقسیم کے لیے مساوات (16–16) استعمال کرو۔ سوال 3 کے طریقے سے جانچ کرو:
(a) $4(\cos 60° + i \sin 60°) \div 2(\cos 30° + i \sin 30°)$
(b) $6(\cos 0° + i \sin 0°) \div 3(\cos 240° + i \sin 240°)$

6. ثابت کرو کہ $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ کا مقلوب $\frac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta)$ ہے۔

7. ثابت کرو کہ $[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^2 = r^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta)$

8. مساوات (16–12) پر غور کرنے کے لیے ہم ایسے ہی ایک ضابطہ کی طرف توجہ دلاتے ہیں۔ مساوات (15–15) یہ واقعی ایک ہی ہیں اگر اس باب میں بحث کیے گئے مرتب جوڑوں کے x اور y کو ہم اُس سمتیہ کے x اور y کے اجزا کے نمائندہ مان لیں جو مبدا سے نقطے تک کھینچا گیا ہو۔ مرتب جوڑوں کے الجبرا کی تشریح مستوی میں سمتیہ کے مطالعے کی حیثیت سے کی جائے۔ مندرجہ ذیل اعدادی جوڑوں کو معہ اُن کے حاصل جمع کے پلاٹ کر کے دو سمتیہ کے حاصل جمع کے کلیہ ذوالاربعۃ الاضلاع کو صادق ثابت کرو [دفعہ 5–15 کے آخری پیراگراف کو دیکھو]۔

$(2, 5) + (-3, -1) =$ (a) [اشارہ : دیکھو شکل 4–16]
$(-1, 2) + (4, -5) =$ (b)
$(3, -2) + (-2, 3) =$ (c)
$(-3, -2) + (6, 4) =$ (d)



شکل 16-4

اگرچہ C ایک میدان مرتب نہیں ہے۔ لیکن کسی بھی ملتف عدد کا مقیاس یا مطلق قیمت تحقیقی ہے اور درحقیقت مثبت، جس کے نتیجے کے طور پر بعض دلچسپ غیر مساواتیں حاصل ہوتی ہیں۔ یہ ثابت کرنے کے لیے ہمیں ملتف اعداد اور ان کے زوج کے آپس کے تعلق کو بھی جانچنا چاہیے۔ اس مطالعہ میں مندرجہ ذیل سوالات استعمال ہوتے ہیں اور اُن نتائج پر پہنچاتے ہیں جو سوال 17 اور 18 میں بیان کیے گئے ہیں۔ ان سوالات میں کسی بھی ملتف عدد $x + iy$ کو z سے اور اس کے زوج $x - iy$ کو $\bar{z}$ سے ظاہر کریں گے۔ یاد رکھو کہ $|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$ (مساوات 16-14)

9. ثابت کرو کہ کسی بھی ملتف عدد $z = x + iy$ کی مطلق قیمت کی تعریف اور حقیقی اعداد کی مطلق قیمت کی سابقہ تعریف یکساں ہے۔

10. ثابت کرو کہ $|z| = |\bar{z}|$

11. ثابت کرو کہ کسی بھی ملتف عدد کے زوج کا زوج خود ہی عدد ہے یعنی $\bar{\bar{z}} = z$

12. ثابت کرو کہ $z \cdot \bar{z} = |z|^2$

13. ثابت کرو کہ دو ملتف اعداد کے زوج کی حاصل جمع اُن کے جوڑ کے زوج کے برابر ہوگی یعنی

$$\bar{z}_1 + \bar{z}_2 = \overline{z_1 + z_2}$$

14. ثابت کرو کہ دو ملتف اعداد کے زوج کا حاصل ضرب اُن اعداد کے حاصل ضرب کے زوج کے برابر ہوگا یعنی

$$\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = \overline{z_1 \cdot z_2}$$

15. کسی بھی ملتف عدد $z = x + iy$ کے لیے ثابت کرو کہ $|z| \leq x$ اور $|z| \leq y$

16. کسی بھی مختلف عدد $z = x + iy$ کے لیے ثابت کرو کہ $z + \bar{z} = 2x$

17. ثابت کرو کہ کسی بھی دو مختلف اعداد کے لیے حاصل ضرب کی مطلق قیمت اُن کی مطلق قیمتوں کے حاصل ضرب کے برابر ہوگی یعنی $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ [اشارہ : سوال 12 کے استعمال سے ہمیں حاصل ہوگا :

$$|z_1 \cdot z_2|^2 = (z_1 \cdot z_2)(\overline{z_1 \cdot z_2})$$

لیکن سوال 14 سے $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ تاکہ

$$|z_1 \cdot z_2|^2 = z_1 \cdot \bar{z}_1 \cdot z_2 \cdot \bar{z}_2 = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2$$]

18. یہ ثابت کرنا ممکن ہے کہ کون سے دو مختلف اعداد کے لیے اُن کے حاصل جمع کی مطلق قیمت اُن کی علاحدہ علاحدہ مطلق قیمتوں کے حاصل جمع کے برابر یا کم ہوتی ہے یعنی $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

مندرجہ ذیل ثبوت کے ہر قدم کی وجہ بتاؤ :

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) \\ &= z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_1 + z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_2. \end{aligned}$$

اب $z_1\bar{z}_2$ اور $z_2\bar{z}_1$ زوج ہیں تو

$$\begin{aligned} z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 &= 2 \quad (z_1\bar{z}_2 \text{ کے حقیقی حصّہ کا}) \\ &\leq 2|z_1 \cdot \bar{z}_2| \\ &= 2|z_1| \cdot |\bar{z}_2| \\ &= 2|z_1| \cdot |z_2|. \end{aligned}$$

اس لیے ہمیں حاصل ہوگا

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &\leq z_1\bar{z}_1 + 2|z_1| \cdot |z_2| + z_2\bar{z}_2 \\ &= |z_1|^2 + 2|z_1| \cdot |z_2| + |z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2, \end{aligned}$$

تاکہ $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

16. مختلف اعداد کی قوتیں اور جذر (قیمتیں) :

دفعہ 4–16 میں ہم نے دو مختلف اعداد کے حاصل ضرب کی ایک ترکیب مثلثاتی شکل میں حاصل کی۔ مساوات (15–16) کی مدد سے ہمیں فوراً حاصل ہوگا

$$[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^2 = r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta),$$

اور تب

$$[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^3 = r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta).$$

درحقیقت ہم ریاضیاتی استقرا سے ایک تعمیمی مسئلہ موسوم بہ کلیہ دی موورے ثابت کر سکتے ہیں جس کو

ابراہیم دی موویر (Abraham De Moivre) نے دریافت کیا تھا (1667 سے 1754 تک)۔

مسئلہ 16-3 : اگر n کوئی مثبت عدد صحیح ہے تو

$$[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta). \qquad (16\text{-}17)$$

یہ مسئلہ قوت نما کی ناطق، غیر ناطق حتیٰ کہ مختلف قیمتوں کے لیے صادق ہے لیکن ہم اس کا استعمال صرف اعدادِ صحیح قیمتوں کے لیے کریں گے۔

ثبوت : حصّہ (a) جانچ : یہ اس دفعہ کے ابتدا میں ہی کیا جا چکا ہے۔

حصّہ (b) یہ مان کر

$$[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^k = r^k(\cos k\theta + i\sin k\theta), \qquad (16\text{-}18)$$

ہمیں یہ ثابت کرنا چاہیے کہ

$$[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^{k+1} = r^{k+1}[\cos(k+1)\theta + i\sin(k+1)\theta]. \qquad (16\text{-}19)$$

مساوات (16-18) کے ہر رکن کو $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ سے ضرب دینے سے ہمیں حاصل ہوگا

$$[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^{k+1} = r^k(\cos k\theta + i\sin k\theta)r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

اور مساوات (16-15) سے

$$\begin{aligned}[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^{k+1} &= r^{k+1}[\cos(k\theta + \theta) + i\sin(k\theta + \theta)] \\ &= r^{k+1}[\cos(k+1)\theta + i\sin(k+1)\theta],\end{aligned}$$

جو کہ ٹھیک مساوات (16-19) کی طرح ہے۔

حصّہ (c) براہِ راست اس کا لازمی نتیجہ ہے۔

مثال 1 : ثابت کرو کہ اگر $z = -\frac{1}{2} + (\sqrt{3}/2)i$ تو $z^3 = 1$

حل : z کو مثلثاتی شکل میں رکھنے سے ہمیں حاصل ہوگا

$$z = \cos 120^\circ + i\sin 120^\circ.$$

اس طرح

$$\begin{aligned}z^3 &= (\cos 120^\circ + i\sin 120^\circ)^3 \\ &= \cos 3(120^\circ) + i\sin 3(120^\circ) \\ &= \cos 360^\circ + i\sin 360^\circ = 1.\end{aligned}$$

مساوات (16-17) کا ایک اہم استعمال ملتف اعداد کے جذر (قیمتیں) نکالنے میں کیا جاتا ہے۔
اس بحث میں ہماری توجہ اس طرف ہونا چاہیے کہ مثبت r کے لیے علامتی نشان $\sqrt[n]{r}$ ، r کے صدر n - ویں جذر کی نمائندگی کرتا ہے یعنی صرف r کا وہی n - واں جذر جو مثبت اور حقیقی ہو۔

مثال 2 : $-2 - 2\sqrt{3}\,i$ کے تین جذر الکعب نکالو۔

حل : ہم r اور θ کی ایسی قیمتیں نکالنا چاہتے ہیں کہ

$$[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^3 = -2 - 2\sqrt{3}\,i.$$

اگر ہم مسئلہ 16-3 کو استعمال کریں اور $-2 - 2\sqrt{3}\,i$ کو مثلثاتی شکل میں ظاہر کریں تو یہ ہو جائے گا۔

$$r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta) = 4(\cos 240° + i\sin 240°).$$

جب دو ملتف اعداد برابر ہوتے ہیں تو اُن کے مقیاس بھی برابر ہوتے ہیں اور اُن کے محیط یا تو برابر ہوتے ہیں یا اُن میں $360°$ کے عدد صحیح اضعاف کا فرق ہوتا ہے۔ اس لیے

$$r^3 = 4 \quad \text{اور} \quad 3\theta = 240° + k\,360°,$$

یا

$$r = \sqrt[3]{4} \quad \text{اور} \quad \theta = 80° + k\,120°,$$

جبکہ k کوئی بھی مثبت یا منفی عدد صحیح ہے یا صفر۔ اس لیے $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ہوگا

$\sqrt[3]{4}(\cos 80° + i\sin 80°)$, کے لیے $k = 0$,

$\sqrt[3]{4}(\cos 200° + i\sin 200°)$, کے لیے $k = 1$,

$\sqrt[3]{4}(\cos 320° + i\sin 320°)$, کے لیے $k = 2$.

یہ تینوں قیمتیں علاحدہ علاحدہ ہیں۔ اور یہ $-2 - 2\sqrt{3}\,i$ کے تین مختلف جذر الکعب کو ظاہر کرتے ہیں۔ k کی کسی اور عدد صحیح قیمت کے لیے یہ عبارت ان تینوں قیمتوں میں سے کسی ایک میں تحویل ہو جائے گی، اس لیے صرف تین ہی جذر الکعب ہوں گے۔ کسی بھی ملتف عدد کے تین اور صرف تین ہی جذر الکعب ہوں گے، چار اور صرف چار ہی چہارم جذر ہوں گے اور عمومی طور پر n اور صرف n ہی n - ویں جذر ہوں گے۔
اگر جوابات کو $x + yi$ کی شکل میں تحویل کرنا مطلوب ہو تو ہم جدول کی مدد سے $\sqrt[3]{4}$ کی قیمت اور $80°$ ، $200°$ اور $320°$ کے تفاعلوں کی قیمتیں دریافت کر سکتے ہیں۔
ایسے جذر سے متعلق عمومی مسئلہ اب واضح ہونا چاہیے۔

مسئلہ 16-4 : کسی بھی ملتف عدد $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ اور کسی بھی مثبت عددِ صحیح n کے لیے

$$\sqrt[n]{r}(\cos\theta_k + i\sin\theta_k), \qquad (16\text{-}20)$$

جس میں $\theta_k = \dfrac{\theta + k360^\circ}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots (n-1),$

$r(\cos\theta + i\sin\theta)$ کے واضح n ، n ویں جذر کی نمائندگی کرتا ہے۔

ثبوت : یہ ثابت کرنے کے لیے کہ مساوات (16-20) k کی ہر قیمت کے لیے $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ کا ایک n - واں جذر ہے۔ ہم اس پر n قوت نما کا اضافہ کرنے کے لیے صرف مساوات (16-17) کی مدد لیتے ہیں :

$$\begin{aligned}[\sqrt[n]{r}(\cos\theta_k + i\sin\theta_k)]^n &= r(\cos n\theta_k + i\sin n\theta_k)\\ &= r[\cos(\theta + k360^\circ) + i\sin(\theta + k360^\circ)]\\ &= r(\cos\theta + i\sin\theta).\end{aligned}$$

ہمیں یہ بھی نوٹ کرنا چاہیے کہ مساوات (16-20) میں دیے ہوئے n ملتف اعداد k کی n مستقل قیمتوں کے لیے جدا جدا ہیں کیوں کہ ان میں سے کسی بھی دو کے محیط 360° کے اضعاف سے ممیز نہیں ہیں۔

مساوات (16-20) کا استعمال ہمیں کسی بھی ملتف عدد کے n ، n - ویں جذر براہِ راست بدل کے طریقے سے نکالنے کے ذرائع مہیا کر دے گا۔

سوالات

سوال 1 تا 7 تک کی مندرجہ ذیل عبارات میں سے ہر ایک کو $x + yi$ کی شکل میں لکھو :

1. $[2(\cos 15^\circ + i\sin 15^\circ)]^6$
2. $[3(\cos 120^\circ + i\sin 120^\circ)]^5$
3. $[2(\cos 315^\circ + i\sin 315^\circ)]^3$
4. $(\cos 36^\circ + i\sin 36^\circ)^{10}$
5. $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)^5$
6. $(1-i)^8$
7. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)^{200}$

سوال 8 سے 15 تک میں مطلوبہ جذر نکالو اور اُن کو گرافی طریقے پر ظاہر کرو :

8. $4 + 4\sqrt{3}i$ کے جذر المربع
9. $\sqrt{-16i}$ کے جذر المربع
10. 1 کے جذر المکعب
11. $\sqrt[3]{-8}$ کے جذر المکعب
12. $-4 - 4\sqrt{3}i$ کے جذر المربع
13. $8(\cos 300^\circ + i\sin 300^\circ)$ کے جذر المکعب
14. $16(\cos 120^\circ + i\sin 120^\circ)$ کے جذر المربع
15. 1 کے دسویں جذر — اس کی شکل کا شکل 14-6 سے موازنہ کرو۔

سوال 16 تا 19 میں دی گئی مساوات کے جذر کو $x + yi$ کی شکل میں ظاہر کرو اور اُن کی گرافی طریقے پر نمائندگی کرو :

16. $z^6 = 64$
17. $z^4 = 1$
18. $z^3 + i = 0$
19. $z^5 + 32 = 0$

ڈگریاں	ریڈین	Sine	Tangent	Cotangent	Cosine		
0° 00′	.0000	.0000	.0000		1.0000	1.5708	90° 00′
10′	.0029	.0029	.0029	343.77	1.0000	1.5679	30′
20′	.0058	.0058	.0058	171.89	1.0000	1.5650	40′
30′	.0087	.0087	.0087	114.59	1.0000	1.5621	30′
40′	.0116	.0116	.0116	85.940	.9999	1.5592	20′
50′	.0145	.0145	.0145	68.750	.9999	1.5563	10′
1° 00′	.0175	.0175	.0175	57.290	.9998	1.5533	89° 00′
10′	.0204	.0204	.0204	49.104	.9998	1.5504	50′
20′	.0233	.0233	.0233	42.964	.9997	1.5475	40′
30′	.0262	.0262	.0262	38.188	.9997	1.5446	30′
40′	.0291	.0291	.0291	34.368	.9996	1.5417	20′
50′	.0320	.0320	.0320	31.242	.9996	1.5388	10′
2° 00′	.0349	.0349	.0349	28.636	.9994	1.5359	88° 00′
10′	.0378	.0378	.0378	26.432	.9993	1.5330	50′
20′	.0407	.0407	.0407	24.542	.9992	1.5301	40′
30′	.0436	.0436	.0437	22.904	.9990	1.5272	30′
40′	.0465	.0465	.0466	21.470	.9989	1.5243	20′
50′	.0495	.0494	.0495	20.206	.9988	1.5213	10′
3° 00′	.0524	.0523	.0524	19.081	.9986	1.5184	87° 00′
10′	.0553	.0552	.0553	18.075	.9985	1.5155	50′
20′	.0582	.0581	.0582	17.169	.9983	1.5126	40′
30′	.0611	.0610	.0612	16.350	.9981	1.5097	30′
40′	.0640	.0640	.0641	15.605	.9980	1.5068	20′
50′	.0669	.0669	.0670	14.924	.9978	1.5039	10′
4° 00′	.0698	.0698	.0699	14.301	.9976	1.5010	86° 00′
10′	.0727	.0727	.0729	13.727	.9974	1.4981	50′
20′	.0756	.0756	.0758	13.197	.9971	1.4953	40′
30′	.0785	.0785	.0787	12.706	.9969	1.4923	30′
40′	.0814	.0814	.0816	12.251	.9967	1.4893	20′
50′	.0844	.0843	.0846	11.826	.9964	1.4864	10′
5° 00′	.0873	.0872	.0875	11.430	.9962	1.4835	85° 00′
10′	.0902	.0901	.0904	11.059	.9959	1.4806	50′
20′	.0931	.0929	.0934	10.712	.9957	1.4777	40′
30′	.0960	.0958	.0963	10.385	.9954	1.4748	30′
40′	.0989	.0987	.0992	10.078	.9951	1.4719	20′
50′	.1018	.1016	.1022	9.7882	.9948	1.4690	10′
6° 00′	.1047	.1045	.1051	9.5144	.9945	1.4661	84° 00′
10′	.1076	.1074	.1080	9.2553	.9942	1.4632	50′
20′	.1105	.1103	.1110	9.0098	.9939	1.4603	40′
30′	.1134	.1132	.1139	8.7769	.9936	1.4573	30′
40′	.1164	.1161	.1169	8.5555	.9932	1.4544	20′
50′	.1193	.1190	.1198	8.3450	.9929	1.4515	10′
7° 00′	.1222	.1219	.1228	8.1443	.9925	1.4486	83° 00′
10′	.1251	.1248	.1257	7.9530	.9922	1.4457	50′
20′	.1280	.1276	.1287	7.7704	.9918	1.4428	40′
30′	.1309	.1305	.1317	7.5958	.9914	1.4399	30′
40′	.1338	.1334	.1346	7.4287	.9911	1.4370	20′
50′	.1367	.1363	.1376	7.2687	.9907	1.4341	10′
8° 00′	.1396	.1392	.1405	7.1154	.9903	1.4312	82° 00′
10′	.1425	.1421	.1435	6.9682	.9899	1.4283	50′
20′	.1454	.1449	.1465	6.8269	.9894	1.4254	40′
30′	.1484	.1478	.1495	6.6912	.9890	1.4224	30′
40′	.1513	.1507	.1524	6.5606	.9886	1.4195	20′
50′	.1542	.1536	.1554	6.4348	.9881	1.4166	10′
9° 00′	.1571	.1564	.1584	6.3138	.9877	1.4137	81° 00′
		Cosine	Cotangent	Tangent	Sine	ریڈین	ڈگریاں

ڈگریاں	ریڈین	Sine	Tangent	Cotangent	Cosine		
0° 00′	.1571	.1564	.1564	6.3138	.9877	1.4137	01° 00′
10′	.1600	.1593	.1614	6.1970	.9872	1.4108	50′
20′	.1629	.1622	.1644	6.0844	.9868	1.4079	40′
30′	.1658	.1650	.1673	5.9758	.9863	1.4050	30′
40′	.1687	.1679	.1703	5.8703	.9858	1.4021	20′
50′	.1716	.1708	.1733	5.7694	.9853	1.3992	10′
10° 00′	.1745	.1736	.1763	5.6713	.9848	1.3963	80° 00′
10′	.1774	.1765	.1793	5.5764	.9843	1.3934	50′
20′	.1804	.1794	.1823	5.4845	.9838	1.3904	40′
30′	.1833	.1822	.1853	5.3955	.9833	1.3875	30′
40′	.1862	.1851	.1883	5.3093	.9827	1.3846	20′
50′	.1891	.1880	.1914	5.2257	.9822	1.3817	10′
11° 00′	.1920	.1908	.1944	5.1446	.9816	1.3788	79° 00′
10′	.1949	.1937	.1974	5.0658	.9811	1.3759	50′
20′	.1978	.1965	.2004	4.9894	.9805	1.3730	40′
30′	.2007	.1994	.2035	4.9152	.9799	1.3701	00′
40′	.2036	.2022	.2065	4.8430	.9793	1.3672	20′
50′	.2065	.2051	.2095	4.7729	.9787	1.3643	10′
12° 00′	.2094	.2079	.2126	4.7046	.9781	1.3614	78° 00′
10′	.2123	.2108	.2156	4.6382	.9775	1.3584	50′
20′	.2153	.2136	.2186	4.5736	.9769	1.3555	40′
30′	.2182	.2164	.2217	4.5107	.9763	1.3526	30′
40′	.2211	.2193	.2247	4.4494	.9757	1.3497	20′
50′	.2240	.2221	.2278	4.3897	.9750	1.3468	10′
13° 00′	.2269	.2250	.2309	4.3315	.9744	1.3439	77° 00′
10′	.2298	.2278	.2339	4.2747	.9737	1.3410	50′
20′	.2327	.2306	.2370	4.2193	.9730	1.3381	40′
30′	.2356	.2334	.2401	4.1653	.9724	1.3352	30′
40′	.2385	.2363	.2432	4.1126	.9717	1.3323	20′
50′	.2414	.2391	.2462	4.0611	.9710	1.3294	10′
14° 00′	.2443	.2419	.2493	4.0108	.9703	1.3265	76° 00′
10′	.2473	.2447	.2524	3.9617	.9696	1.3235	50′
20′	.2502	.2476	.2555	3.9136	.9689	1.3206	40′
30′	.2531	.2504	.2586	3.8667	.9681	1.3177	30′
40′	.2560	.2532	.2617	3.8208	.9674	1.3148	20′
50′	.2589	.2560	.2648	3.7760	.9667	1.3119	10′
15° 00′	.2618	.2588	.2679	3.7321	.9659	1.3090	75° 00′
10′	.2647	.2616	.2711	3.6891	.9652	1.3061	50′
20′	.2676	.2644	.2742	3.6470	.9644	1.3032	40′
30′	.2705	.2672	.2773	3.6059	.9636	1.3003	30′
40′	.2734	.2700	.2805	3.5656	.9628	1.2974	20′
50′	.2763	.2728	.2836	3.5261	.9621	1.2945	10′
16° 00′	.2793	.2756	.2867	3.4874	.9613	1.2915	74° 00′
10′	.2822	.2784	.2899	3.4495	.9605	1.2886	50′
20′	.2851	.2812	.2931	3.4124	.9596	1.2857	40′
30′	.2880	.2840	.2962	3.3759	.9588	1.2828	30′
40′	.2909	.2868	.2994	3.3402	.9580	1.2799	20′
50′	.2938	.2896	.3026	3.3052	.9572	1.2770	10′
17° 00′	.2967	.2924	.3057	3.2709	.9563	1.2741	73° 00′
10′	.2996	.2952	.3089	3.2371	.9555	1.2712	50′
20′	.3025	.2979	.3121	3.2041	.9546	1.2683	40′
30′	.3054	.3007	.3153	3.1716	.9537	1.2654	30′
40′	.3083	.3035	.3185	3.1397	.9528	1.2625	20′
50′	.3113	.3062	.3217	3.1084	.9520	1.2595	10′
18° 00′	.3142	.3090	.3249	3.0777	.9511	1.2566	72° 00′
		Cosine	Cotangent	Tangent	Sine	ریڈین	ڈگریاں

ڈگریاں	ریڈین	Sine	Tangent	Cotangent	Cosine	ریڈین	ڈگریاں
18° 00′	.3142	.3090	.3249	3.0777	.9511	1.2566	72° 00′
10′	.3171	.3118	.3281	3.0475	.9502	1.2537	50′
20′	.3200	.3145	.3314	3.0178	.9492	1.2508	40′
30′	.3229	.3173	.3346	2.9887	.9483	1.2479	30′
40′	.3258	.3201	.3378	2.9600	.9474	1.2450	20′
50′	.3287	.3228	.3411	2.9319	.9465	1.2421	10′
19° 00′	.3316	.3256	.3443	2.9042	.9455	1.2392	71° 00′
10′	.3345	.3283	.3476	2.8770	.9446	1.2363	50′
20′	.3374	.3311	.3508	2.8502	.9436	1.2334	40′
30′	.3403	.3338	.3541	2.8239	.9426	1.2305	30′
40′	.3432	.3365	.3574	2.7980	.9417	1.2275	20′
50′	.3462	.3393	.3607	2.7725	.9407	1.2246	10′
20° 00′	.3491	.3420	.3640	2.7475	.9397	1.2217	70° 00′
10′	.3520	.3448	.3673	2.7228	.9387	1.2188	50′
20′	.3549	.3475	.3706	2.6985	.9377	1.2159	40′
30′	.3578	.3502	.3739	2.6746	.9367	1.2130	30′
40′	.3607	.3529	.3772	2.6511	.9356	1.2101	20′
50′	.3636	.3557	.3805	2.6279	.9346	1.2072	10′
21° 00′	.3665	.3584	.3839	2.6051	.9336	1.2043	69° 00′
10′	.3694	.3611	.3872	2.5826	.9325	1.2014	50′
20′	.3723	.3638	.3906	2.5605	.9315	1.1985	40′
30′	.3752	.3665	.3939	2.5386	.9304	1.1956	30′
40′	.3782	.3692	.3973	2.5172	.9293	1.1926	20′
50′	.3811	.3719	.4006	2.4960	.9283	1.1897	10′
22° 00′	.3840	.3746	.4040	2.4751	.9272	1.1868	68° 00′
10′	.3869	.3773	.4074	2.4545	.9261	1.1839	50′
20′	.3898	.3800	.4108	2.4342	.9250	1.1810	40′
30′	.3927	.3827	.4142	2.4142	.9239	1.1781	30′
40′	.3956	.3854	.4176	2.3945	.9228	1.1752	20′
50′	.3985	.3881	.4210	2.3750	.9216	1.1723	10′
23° 00′	.4014	.3907	.4245	2.3559	.9205	1.1694	67° 00′
10′	.4043	.3934	.4279	2.3369	.9194	1.1665	50′
20′	.4072	.3961	.4314	2.3183	.9182	1.1636	40′
30′	.4102	.3987	.4348	2.2998	.9171	1.1606	30′
40′	.4131	.4014	.4383	2.2817	.9159	1.1577	20′
50′	.4160	.4041	.4417	2.2637	.9147	1.1548	10′
24° 00′	.4189	.4067	.4452	2.2460	.9135	1.1519	66° 00′
10′	.4218	.4094	.4487	2.2286	.9124	1.1490	50′
20′	.4247	.4120	.4522	2.2113	.9112	1.1461	40′
30′	.4276	.4147	.4557	2.1943	.9100	1.1432	30′
40′	.4305	.4173	.4592	2.1775	.9088	1.1403	20′
50′	.4334	.4200	.4628	2.1609	.9075	1.1374	10′
25° 00′	.4363	.4226	.4663	2.1445	.9063	1.1345	65° 00′
10′	.4392	.4253	.4699	2.1283	.9051	1.1316	50′
20′	.4422	.4279	.4734	2.1123	.9038	1.1286	40′
30′	.4451	.4305	.4770	2.0965	.9026	1.1257	30′
40′	.4480	.4331	.4806	2.0809	.9013	1.1228	20′
50′	.4509	.4356	.4841	2.0655	.9001	1.1199	10′
26° 00′	.4538	.4384	.4877	2.0503	.8988	1.1170	64° 00′
10′	.4567	.4410	.4913	2.0353	.8975	1.1141	50′
20′	.4596	.4436	.4950	2.0204	.8962	1.1112	40′
30′	.4625	.4462	.4986	2.0057	.8949	1.1083	30′
40′	.4654	.4488	.5022	1.9912	.8936	1.1054	20′
50′	.4683	.4514	.5059	1.9768	.8923	1.1025	10′
27° 00′	.4712	.4540	.5095	1.9626	.8910	1.0996	63° 00′
		Cosine	Cotangent	Tangent	Sine	ریڈین	ڈگریاں

ڈگریاں	ریڈین	Sine	Tangent	Cotangent	Cosine		
27° 00′	.4712	.4540	.5095	1.9626	.8910	1.0996	63° 00′
10′	.4741	.4566	.5132	1.9486	.8897	1.0996	50′
20′	.4771	.4592	.5169	1.9347	.8884	1.0997	40′
30′	.4800	.4617	.5206	1.9210	.8870	1.0998	30′
40′	.4829	.4643	.5243	1.9074	.8857	1.0879	20′
50′	.4859	.4669	.5280	1.8940	.8843	1.0850	10′
28° 00′	.4887	.4695	.5317	1.8807	.8829	1.0821	62° 00′
10′	.4916	.4720	.5354	1.8676	.8810	1.0792	50′
20′	.4945	.4746	.5392	1.8546	.8802	1.0763	40′
30′	.4974	.4772	.5430	1.8418	.8788	1.0734	30′
40′	.5003	.4797	.5467	1.8291	.8774	1.0705	20′
50′	.5032	.4823	.5506	1.8165	.8760	1.0676	10′
29° 00′	.5061	.4540	.5543	1.8040	.8746	1.0647	61° 00′
10′	.5091	.4874	.5581	1.7917	.8732	1.0617	50′
20′	.5120	.4899	.5619	1,7796	.8718	1.0588	40′
30′	.5149	.4924	.5658	1.7675	.8704	1.0559	30′
40′	.5178	.4950	.5696	1.7556	.8689	1.0530	20′
50′	.5207	.4975	.5735	1.7437	.8675	1.0501	10′
30° 00′	.5236	.5000	.5774	1.7321	.8660	1.0472	60° 00′
10′	.5256	.5025	.5812	1.7205	.8646	1.0443	50′
20′	.5294	.5050	.5851	1.7090	.8631	1.0414	40′
30′	.5323	.5075	.5890	1.6977	.8616	1.0385	30′
40′	.5352	.5100	.5930	1.6864	.8601	1.0356	20′
50′	.5381	.5125	.5969	1.6753	.8587	1.0327	10′
31° 00′	.5411	.5150	.6009	1.6643	.8572	1.0297	59° 00′
10′	.5440	.5175	.6048	1.6534	.8557	1.0268	50′
20′	.5469	.5200	.6088	1.6426	.8542	1.0239	40′
30′	.5498	.5225	.6128	1.6319	.8526	1.0210	30′
40′	.5527	.5250	.6168	1.6212	.8511	1.0181	20′
50′	.5556	.5275	.6208	1.6107	.8496	1.0152	10′
32° 00′	.5585	.5299	.6249	1.6003	.8480	1.0123	58° 00′
10′	.5614	.5324	.6289	1.5890	.8465	1.0094	50′
20′	.5643	.5348	.6330	1.5798	.8450	1.0065	40′
30′	.5672	.5373	.6371	1.5697	.8434	1.0239	30′
40′	.5701	.5398	.6412	1.5597	.8418	1.0007	20′
50′	.5730	.5422	.6453	1.5497	.8403	.9977	10′
33° 00′	.5760	.5446	.6494	1.5399	.8387	.9948	57° 00′
10′	.5789	.5471	.6536	1.5301	.8371	.9919	50′
20′	.5818	.5495	.6577	1.5204	.8355	.9890	40′
30′	.5847	.5519	.6619	1.5108	.8339	.9861	30′
40′	.5876	.5544	.6661	1.5013	.8323	.9832	20′
50′	.5905	.5568	.6703	1.4919	.8307	.9803	10′
34° 00′	.5934	.5592	.6745	1.4826	.8290	.9774	56° 00′
10′	.5963	.5616	.6787	1.4733	.8274	.9745	50′
20′	.5992	.5640	.6830	1.4641	.8258	.9716	40′
30′	.6021	.5664	.6873	1.4550	.8241	.9687	30′
40′	.6050	.5688	.6916	1.4460	.8225	.9657	20′
50′	.6080	.5712	.6959	1.4370	.8208	.9628	10′
35° 00′	.6109	.5736	.7002	1.4281	.8192	.9599	55° 00′
10′	.6138	.5760	.7046	1.4193	.8175	.9570	50′
20′	.6167	.5783	.7089	1.4106	.8158	.9541	40′
30′	.6196	.5807	.7133	1.4019	.8141	.9512	30′
40′	.6225	.5831	.7177	1.3934	.8124	.9483	20′
50′	.6254	.5854	.7221	1.3848	.8107	.9454	10′
36° 00′	.6283	.5878	.7265	1.3764	.8090	.9425	54° 00′
		Cosine	Cotangent	Tangent	Sine	ریڈین	ڈگریاں

ڈگریاں	ریڈین	Sine	Tangent	Cotangent	Cosine	ریڈین	ڈگریاں
36° 00′	.6283	.5878	.7265	1.3764	.8090	.9425	54° 00′
10′	.6312	.5901	.7310	1.3680	.8073	.9396	00′
20′	.6341	.5925	.7355	1.3597	.8056	.9367	40′
30′	.6370	.5948	.7400	1.3514	.8039	.9338	30′
40′	.6400	.5972	.7445	1.3432	.8021	.9308	20′
50′	.6429	.5995	.7490	1.3351	.8004	.9279	10′
37° 00′	.6458	.6018	.7536	1.3270	.7986	.9250	53° 00′
10′	.6487	.6041	.7581	1.3190	.7969	.9221	50′
20′	.6516	.6065	.7627	1.3111	.7951	.9192	40′
30′	.6545	.6088	.7673	1.3032	.7934	.9163	30′
40′	.6574	.6111	.7720	1.2954	.7916	.9134	20′
50′	.6603	.6134	.7766	1.2876	.7898	.9105	10′
38° 00′	.6632	.6157	.7813	1.2799	.7880	.9076	52° 00′
10′	.6661	.6180	.7860	1.2723	.7862	.9047	50′
20′	.6690	.6202	.7907	1.2647	.7844	.9018	40′
30′	.6720	.6225	.7954	1.2572	.7826	.8988	30′
40′	.6749	.6248	.8002	1.2497	.7808	.8959	20′
50′	.6778	.6271	.8050	1.2423	.7790	.8930	10′
39° 00′	.6807	.6293	.8098	1.2349	.7771	.8901	51° 00′
10′	.6836	.6316	.8146	1.2276	.7753	.8872	50′
20′	.6865	.6338	.8195	1.2203	.7735	.8843	40′
30′	.6894	.6361	.8243	1.2131	.7716	.8814	30′
40′	.6923	.6383	.8292	1.2059	.7698	.8785	20′
50′	.6952	.6406	.8342	1.1988	.7679	.8756	10′
40° 00′	.6981	.6428	.8391	1.1918	.7660	.8727	50° 00′
10′	.7010	.6450	.8441	1.1847	.7642	.8698	50′
20′	.7039	.6472	.8491	1.1778	.7623	.8668	40′
30′	.7069	.6494	.8541	1.1708	.7604	.8639	50′
40′	.7098	.6517	.8591	1.1640	.7585	.8610	20′
50′	.7127	.6539	.8642	1.1571	.7566	.8581	10′
41° 00′	.7156	.6561	.8693	1.1504	.7547	.8552	49° 00′
10′	.7185	.6583	.8744	1.1436	.7528	.8523	50′
20′	.7214	.6604	.8796	1.1369	.7509	.8494	40′
30′	.7243	.6626	.8847	1.1303	.7490	.8465	30′
40′	.7272	.6648	.8899	1.1237	.7470	.8436	20′
50′	.7301	.6670	.8952	1.1171	.7451	.8407	10′
42° 00′	.7330	.6691	.9004	1.1106	.7431	.8378	48° 00′
10′	.7359	.6713	.9057	1.1041	.7412	.8348	50′
20′	.7389	.6734	.9110	1.0977	.7392	.8319	40′
30′	.7418	.6756	.9163	1.0913	.7373	.8290	30′
40′	.7447	.6777	.9217	1.0850	.7353	.8261	20′
50′	.7476	.6799	.9271	1.0786	.7333	.8232	10′
43° 00′	.7505	.6820	.9325	1.0724	.7314	.8203	47° 00′
10′	.7534	.6841	.9380	1.0661	.7294	.8174	50′
20′	.7563	.6862	.9435	1.0599	.7274	.8145	40′
30′	.7592	.6884	.9490	1.0538	.7254	.8116	30′
40′	.7621	.6905	.9545	1.0477	.7234	.8087	20′
50′	.7650	.6926	.9601	1.0416	.7214	.8058	10′
44° 00′	.7679	.6947	.9657	1.0355	.7193	.8029	46° 00′
10′	.7706	.6967	.9713	1.0295	.7173	.7999	50′
20′	.7738	.6988	.9770	1.0235	.7153	.7970	40′
30′	.7767	.7009	.9827	1.0176	.7133	.7941	30′
40′	.7796	.7030	.9884	1.0117	.7112	.7912	20′
50′	.7825	.7050	.9942	1.0058	.7092	.7883	10′
45° 00′	.7854	.7071	1.0000	1.0000	.7071	.7854	45° 00′
		Cosine	Cotangent	Tangent	Sine	ریڈین	ڈگریاں

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	.0000	.0043	.0086	.0128	.0170	.0212	.0253	.0294	.0334	.0374
1.1	.0414	.0453	.0492	.0531	.0569	.0607	.0645	.0682	.0719	.0755
1.2	.0792	.0828	.0864	.0899	.0934	.0969	.1004	.1038	.1072	.1106
1.3	.1139	.1173	.1206	.1239	.1271	.1303	.1335	.1367	.1399	.1430
1.4	.1461	.1492	.1523	.1553	.1584	.1614	.1644	.1673	.1703	.1732
1.5	.1761	.1790	.1818	.1847	.1875	.1903	.1931	.1959	.1987	.2014
1.6	.2041	.2068	.2095	.2122	.2148	.2175	.2201	.2227	.2253	.2279
1.7	.2304	.2330	.2355	.2380	.2405	.2430	.2455	.2480	.2504	.2529
1.8	.2553	.2577	.2601	.2625	.2648	.2672	.2695	.2718	.2742	.2765
1.9	.2788	.2810	.2833	.2856	.2878	.2900	.2923	.2945	.2967	.2989
2.0	.3010	.3032	.3054	.3075	.3096	.3118	.3139	.3160	.3181	.3201
2.1	.3222	.3243	.3263	.3284	.3304	.3324	.3345	.3365	.3385	.3404
2.2	.3424	.3444	.3464	.3483	.3502	.3522	.3541	.3560	.3579	.3598
2.3	.3617	.3636	.3655	.3674	.3692	.3711	.3729	.3747	.3766	.3784
2.4	.3802	.3820	.3838	.3856	.3874	.3892	.3909	.3927	.3945	.3962
2.5	.3979	.3997	.4014	.4031	.4048	.4065	.4082	.4099	.4116	.4133
2.6	.4150	.4166	.4183	.4200	.4216	.4232	.4249	.4265	.4281	.4298
2.7	.4314	.4330	.4346	.4362	.4378	.4393	.4409	.4425	.4440	.4456
2.8	.4472	.4487	.4502	.4518	.4533	.4548	.4564	.4579	.4594	.4609
2.9	.4624	.4639	.4654	.4669	.4683	.4698	.4713	.4728	.4742	.4757
3.0	.4771	.4786	.4800	.4814	.4829	.4843	.4857	.4871	.4886	.4900
3.1	.4914	.4928	.4942	.4955	.4969	.4983	.4997	.5011	.5024	.5038
3.2	.5051	.5065	.5079	.5092	.5105	.5119	.5132	.5145	.5159	.5172
3.3	.5185	.5198	.5211	.5224	.5237	.5250	.5263	.5276	.5289	.5302
3.4	.5315	.5328	.5340	.5353	.5366	.5378	.5391	.5403	.5416	.5428
3.5	.5441	.5453	.5465	.5478	.5490	.5502	.5514	.5527	.5539	.5551
3.6	.5563	.5575	.5587	.5599	.5611	.5623	.5635	.5647	.5658	.5670
3.7	.5682	.5694	.5705	.5717	.5729	.5740	.5752	.5763	.5775	.5786
3.8	.5798	.5809	.5821	.5832	.5843	.5855	.5866	.5877	.5888	.5899
3.9	.5911	.5922	.5933	.5944	.5955	.5966	.5977	.5988	.5999	.6010
4.0	.6021	.6031	.6042	.6053	.6064	.6075	.6085	.6096	.6107	.6117
4.1	.6128	.6138	.6149	.6160	.6170	.6180	.6191	.6201	.6212	.6222
4.2	.6232	.6243	.6253	.6263	.6274	.6284	.6294	.6304	.6314	.6325
4.3	.6335	.6345	.6355	.6365	.6375	.6385	.6395	.6405	.6415	.6425
4.4	.6435	.6444	.5454	.6464	.6474	.6484	.6493	.6503	.6513	.6522
4.5	.6532	.6542	.6551	.6561	.6571	.6580	.6590	.6599	.6609	.6618
4.6	.6628	.6637	.6646	.6656	.6665	.6675	.6684	.6693	.6702	.6712
4.7	.6721	.6730	.6739	.6749	.6758	.6767	.6776	.6785	.6794	.6803
4.8	.6812	.6821	.6830	.6839	.6848	.6857	.6866	.6875	.6884	.6893
4.9	.6902	.6911	.6920	.6928	.6937	.6946	.6955	.6964	.6972	.6981
5.0	.6990	.6998	.7007	.7016	.7024	.7033	.7042	.7050	.7059	.7067
5.1	.7076	.7084	.7093	.7101	.7110	.7118	.7126	.7135	.7143	.7152
5.2	.7160	.7168	.7177	.7185	.7193	.7202	.7210	.7218	.7226	.7235
5.3	.7243	.7251	.7259	.7267	.7275	.7284	.7292	.7300	.7308	.7316
5.4	.7324	.7332	.7340	.7348	.7356	.7364	.7372	.7380	.7388	.7396
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5.5	.7404	.7412	.7419	.7427	.7435	.7443	.7451	.7459	.7466	.7474
5.6	.7482	.7490	.7497	.7505	.7513	.7520	.7528	.7536	.7543	.7551
5.7	.7559	.7566	.7574	.7582	.7589	.7597	.7604	.7612	.7619	.7627
5.8	.7634	.7642	.7649	.7657	.7664	.7672	.7679	.7686	.7694	.7701
5.9	.7709	.7716	.7723	.7731	.7738	.7745	.7752	.7760	.7767	.7774
6.0	.7782	.7789	.7796	.7803	.7810	.7818	.7825	.7832	.7839	.7846
6.1	.7853	.7860	.7868	.7875	.7882	.7889	.7896	.7903	.7910	.7917
6.2	.7924	.7931	.7938	.7945	.7952	.7959	.7966	.7973	.7980	.7987
6.3	.7993	.8000	.8007	.8014	.8021	.8028	.8035	.8041	.8048	.8055
6.4	.8062	.8069	.8075	.8082	.8089	.8096	.8102	.8109	.8116	.8122
6.5	.8129	.8136	.8142	.8149	.8156	.8162	.8169	.8176	.8182	.8189
6.6	.8195	.8202	.8209	.8215	.8222	.8228	.8235	.8241	.8248	.8254
6.7	.8261	.8267	.8274	.8280	.8287	.8293	.8299	.8306	.8312	.8319
6.8	.8325	.8331	.8338	.8344	.8351	.8357	.8363	.8370	.8376	.8382
6.9	.8388	.8395	.8401	.8407	.8414	.8420	.8426	.8432	.8439	.8445
7.0	.8451	.8457	.8463	.8470	.8476	.8482	.8488	.8494	.8500	.8506
7.1	.8513	.8519	.8525	.8531	.8537	.8543	.8549	.8555	.8561	.8567
7.2	.8573	.8579	.8585	.8591	.8597	.8603	.8609	.8615	.8621	.8627
7.3	.8634	.8639	.8645	.8651	.8657	.8663	.8669	.8675	.8681	.8686
7.4	.8692	.8698	.8704	.8710	.8716	.8722	.8727	.8733	.8739	.8745
7.5	.8751	.8756	.8762	.8768	.8774	.8779	.8785	.8791	.8797	.8802
7.6	.8808	.8814	.8820	.8825	.8831	.8837	.8842	.8848	.8854	.8859
7.7	.8865	.8871	.8876	.8882	.8887	.8893	.8899	.8904	.8910	.8915
7.8	.8921	.8927	.8932	.8938	.8943	.8949	.8954	.8960	.8965	.8971
7.9	.8976	.8982	.8987	.8993	.8998	.9004	.9009	.9015	.9020	.9025
8.0	.9031	.9036	.9042	.9047	.9053	.9058	.9063	.9069	.9074	.9079
8.1	.9085	.9090	.9096	.9101	.9106	.9112	.9117	.9122	.9128	.9133
8.2	.9138	.9143	.9149	.9154	.9159	.9165	.9170	.9175	.9180	.9186
8.3	.9191	.9196	.9201	.9206	.9212	.9217	.9222	.9227	.9232	.9238
8.4	.9243	.9248	.9253	.9258	.9263	.9269	.9274	.9279	.9284	.9289
8.5	.9294	.9299	.9304	.9309	.9315	.9320	.9325	.9330	.9335	.9340
8.6	.9345	.9350	.9355	.9360	.9365	.9370	.9375	.9380	.9385	.9390
8.7	.9395	.9400	.9405	.9410	.9415	.9420	.9425	.9430	.9435	.9440
8.8	.9445	.9450	.9465	.9460	.9465	.9469	.9474	.9479	.9484	.9489
8.9	.9494	.9499	.9504	.9509	.9513	.9518	.9523	.9528	.9533	.9538
9.0	.9542	.9547	.9552	.9557	.9562	.9566	.9571	.9576	.9581	.9586
9.1	.9590	.9595	.9600	.9605	.9609	.9614	.9619	.9624	.9628	.9633
9.2	.9638	.9643	.9647	.9652	.9657	.9661	.9666	.9671	.9675	.9680
9.3	.9685	.9689	.9694	.9699	.9703	.9708	.9713	.9717	.9722	.9727
9.4	.9731	.9736	.9741	.9745	.9750	.9754	.9759	.9763	.9768	.9773
9.5	.9777	.9782	.9786	.9791	.9795	.9800	.9805	.9809	.9814	.9818
9.6	.9823	.9827	.9832	.9836	.9841	.9845	.9850	.9854	.9859	.9863
9.7	.9868	.9872	.9877	.9881	.9886	.9890	.9894	.9899	.9903	.9908
9.8	.9912	.9917	.9921	.9926	.9930	.9934	.9939	.9943	.9948	.9952
9.9	.9956	.9961	.9965	.9969	.9974	.9978	.9983	.9987	.9991	.9996
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

ڈگریاں	$\log_{10}$ Sine	$\log_{10}$ Tangent	$\log_{10}$ Cotangent	$\log_{10}$ Cosine	
0° 00′					90° 00′
10′	.4637 − 3	.4637 − 3	2.5363	.0000	50′
20′	.7648 − 3	.7648 − 3	2.2352	.0000	40′
30′	.9408 − 3	.9409 − 3	2.0591	.0000	30′
40′	.0658 − 2	.0658 − 2	1.9342	.0000	20′
50′	.1627 − 2	.1627 − 2	1.8373	.0000	10′
1° 00′	.2419 − 2	.2419 − 2	1.7581	.9999 − 1	89° 00′
10′	.3089 − 2	.3089 − 2	1.6911	.9999 − 1	50′
20′	.3668 − 2	.3669 − 2	1.6331	.9999 − 1	40′
30′	.4179 − 2	.4181 − 2	1.5819	.9999 − 1	30′
40′	.4637 − 2	.4638 − 2	1.5362	.9998 − 1	20′
50′	.5050 − 2	.5053 − 2	1.4947	.9998 − 1	10′
2° 00′	.5428 − 2	.5431 − 2	1.4569	.9997 − 1	88° 00′
10′	.5776 − 2	.5779 − 2	1.4221	.9997 − 1	50′
20′	.6097 − 2	.6101 − 2	1.3899	.9996 − 1	40′
30′	.6397 − 2	.6401 − 2	1.3599	.9996 − 1	30′
40′	.6677 − 2	.6682 − 2	1.3318	.9995 − 1	20′
50′	.6940 − 2	.6945 − 2	1.3055	.9995 − 1	10′
3° 00′	.7188 − 2	.7194 − 2	1.2806	.9994 − 1	87° 00′
10′	.7423 − 2	.7429 − 2	1.2571	.9993 − 1	50′
20′	.7645 − 2	.7652 − 2	1.2348	.9993 − 1	40′
30′	.7857 − 2	.7865 − 2	1.2136	.9992 − 1	30′
40′	.8059 − 2	.8067 − 2	1.1933	.9991 − 1	20′
50′	.8251 − 2	.8261 − 2	1.1739	.9990 − 1	10′
4° 00′	.8436 − 2	.8446 − 2	1.1554	.9989 − 1	86° 00′
10′	.8613 − 2	.8624 − 2	1.1376	.9989 − 1	50′
20′	.8783 − 2	.8795 − 2	1.1205	.9988 − 1	40′
30′	.8946 − 2	.8960 − 2	1.1040	.9987 − 1	30′
40′	.9104 − 2	.9118 − 2	1.0882	.9986 − 1	20′
50′	.9256 − 2	.9272 − 2	1.0728	.9985 − 1	10′
5° 00′	.9403 − 2	.9420 − 2	1.0580	.9983 − 1	85° 00′
10′	.9545 − 2	.9563 − 2	1.0437	.9982 − 1	50′
20′	.9682 − 2	.9701 − 2	1.0299	.9981 − 1	40′
30′	.9816 − 2	.9836 − 2	1.0164	.9980 − 1	30′
40′	.9945 − 2	.9966 − 2	1.0034	.9979 − 1	20′
50′	.0070 − 1	.0093 − 1	.9907	.9977 − 1	10′
6° 00′	.0192 − 1	.0216 − 1	.9784	.9976 − 1	84° 00′
10′	.0311 − 1	.0336 − 1	.9664	.9975 − 1	50′
20′	.0426 − 1	.0453 − 1	.9547	.9973 − 1	40′
30′	.0539 − 1	.0567 − 1	.9433	.9972 − 1	30′
40′	.0648 − 1	.0678 − 1	.9322	.9971 − 1	20′
50′	.0754 − 1	.0786 − 1	.9214	.9969 − 1	10′
7° 00′	.0859 − 1	.0891 − 1	.9109	.9968 − 1	83° 00′
10′	.0961 − 1	.0995 − 1	.9005	.9966 − 1	50′
20′	.1060 − 1	.1096 − 1	.8904	.9964 − 1	40′
30′	.1157 − 1	.1194 − 1	.8806	.9963 − 1	30′
40′	.1252 − 1	.1291 − 1	.8709	.9961 − 1	20′
50′	.1345 − 1	.1386 − 1	.8615	.9959 − 1	10′
8° 00′	.1436 − 1	.1478 − 1	.8522	.9958 − 1	82° 00′
10′	.1525 − 1	.1569 − 1	.8431	.9956 − 1	50′
20′	.1612 − 1	.1658 − 1	.8342	.9954 − 1	40′
30′	.1697 − 1	.1745 − 1	.8255	.9952 − 1	30′
40′	.1781 − 1	.1831 − 1	.8169	.9950 − 1	20′
50′	.1863 − 1	.1915 − 1	.8085	.9948 − 1	10′
9° 00′	.1943 − 1	.1997 − 1	.8003	.9946 − 1	81° 00′
	$\log_{10}$ Cosine	$\log_{10}$ Cotangent	$\log_{10}$ Tangent	$\log_{10}$ Sine	ڈگریاں

ڈگریاں	$\log_{10}$ Sine	$\log_{10}$ Tangent	$\log_{10}$ Cotangent	$\log_{10}$ Cosine	
9° 00′	.1943 − 1	.1997 − 1	.8003	.9946 − 1	81° 00′
10′	.2022 − 1	.2078 − 1	.7922	.9944 − 1	50′
20′	.2100 − 1	.2158 − 1	.7842	.9942 − 1	40′
30′	.2176 − 1	.2236 − 1	.7764	.9940 − 1	30′
40′	.2251 − 1	.2313 − 1	.7687	.9938 − 1	20′
50′	.2324 − 1	.2389 − 1	.7611	.9936 − 1	10′
10° 00′	.2397 − 1	.2463 − 1	.7537	.9934 − 1	80° 00′
10′	.2468 − 1	.2536 − 1	.7464	.9931 − 1	50′
20′	.2538 − 1	.2609 − 1	.7391	.9929 − 1	40′
30′	.2606 − 1	.2680 − 1	.7320	.9927 − 1	30′
40′	.2674 − 1	.2750 − 1	.7250	.9924 − 1	20′
50′	.2740 − 1	.2819 − 1	.7181	.9922 − 1	10′
11° 00′	.2806 − 1	.2887 − 1	.7113	.9919 − 1	79° 00′
10′	.2870 − 1	.2953 − 1	.7047	.9917 − 1	50′
20′	.2934 − 1	.3020 − 1	.6980	.9914 − 1	40′
30′	.2997 − 1	.3085 − 1	.6915	.9912 − 1	30′
40′	.3058 − 1	.3149 − 1	.6851	.9909 − 1	20′
50′	.3119 − 1	.3212 − 1	.6788	.9907 − 1	10′
12° 00′	.3179 − 1	.3275 − 1	.6725	.9904 − 1	78° 00′
10′	.3238 − 1	.3336 − 1	.6664	.9901 − 1	50′
20′	.3296 − 1	.3397 − 1	.6603	.9899 − 1	40′
30′	.3353 − 1	.3458 − 1	.6542	.9896 − 1	30′
40′	.3410 − 1	.3517 − 1	.6483	.9893 − 1	20′
50′	.3466 − 1	.3576 − 1	.6424	.9890 − 1	10′
13° 00′	.3521 − 1	.3634 − 1	.6366	.9887 − 1	77° 00′
10′	.3575 − 1	.3691 − 1	.6309	.9884 − 1	50′
20′	.3629 − 1	.3748 − 1	.6252	.9881 − 1	40′
30′	.3682 − 1	.3804 − 1	.6196	.9878 − 1	30′
40′	.3734 − 1	.3859 − 1	.6141	.9875 − 1	20′
50′	.3786 − 1	.3914 − 1	.6086	.9872 − 1	10′
14° 00′	.3837 − 1	.3968 − 1	.6032	.9869 − 1	76° 00′
10′	.3887 − 1	.4021 − 1	.5979	.9866 − 1	50′
20′	.3937 − 1	.4074 − 1	.5926	.9863 − 1	40′
30′	.3986 − 1	.4127 − 1	.5873	.9859 − 1	30′
40′	.4035 − 1	.4178 − 1	.5822	.9856 − 1	20′
50′	.4083 − 1	.4230 − 1	.5770	.9853 − 1	10′
15° 00′	.4130 − 1	.4281 − 1	.5719	.9849 − 1	75° 00′
10′	.4177 − 1	.4331 − 1	.5669	.9846 − 1	50′
20′	.4223 − 1	.4381 − 1	.5619	.9843 − 1	40′
30′	.4269 − 1	.4430 − 1	.5570	.9839 − 1	30′
40′	.4314 − 1	.4479 − 1	.5521	.9836 − 1	20′
50′	.4360 − 1	.4527 − 1	.5473	.9832 − 1	10′
16° 00′	.4403 − 1	.4575 − 1	.5425	.9828 − 1	74° 00′
10′	.4447 − 1	.4622 − 1	.5378	.9825 − 1	50′
20′	.4491 − 1	.4669 − 1	.5331	.9821 − 1	40′
30′	.4533 − 1	.4716 − 1	.5284	.9817 − 1	30′
40′	.4576 − 1	.4762 − 1	.5238	.9814 − 1	20′
50′	.4618 − 1	.4808 − 1	.5192	.9810 − 1	10′
17° 00′	.4659 − 1	.4853 − 1	.5147	.9806 − 1	73° 00′
10′	.4700 − 1	.4898 − 1	.5102	.9802 − 1	50′
20′	.4741 − 1	.4943 − 1	.5057	.9798 − 1	40′
30′	.4781 − 1	.4987 − 1	.5013	.9794 − 1	30′
40′	.4821 − 1	.5031 − 1	.4969	.9790 − 1	20′
50′	.4861 − 1	.5075 − 1	.4925	.9786 − 1	10′
18° 00′	.4900 − 1	.5118 − 1	.4882	.9782 − 1	72° 00′
	$\log_{10}$ Cosine	$\log_{10}$ Cotangent	$\log_{10}$ Tangent	$\log_{10}$ Sine	ڈگریاں

ڈگریاں	Log₁₀ Sine	Log₁₀ Tangent	Log₁₀ Cotangent	Log₁₀ Cosine	
18° 00′	.4900 −1	.5118 −1	.4882	.9782 −1	72° 00′
10′	.4939 −1	.5161 −1	.4839	.9778 −1	50′
20′	.4977 −1	.5203 −1	.4797	.9774 −1	40′
30′	.5015 −1	.5245 −1	.4755	.9770 −1	30′
40′	.5052 −1	.5287 −1	.4713	.9765 −1	20′
50′	.5090 −1	.5329 −1	.4671	.9761 −1	10′
19° 00′	.5126 −1	.5370 −1	.4630	.9757 −1	71° 00′
10′	.5163 −1	.5411 −1	.4589	.9753 −1	50′
20′	.5199 −1	.5451 −1	.4549	.9748 −1	40′
30′	.5235 −1	.5491 −1	.4509	.9743 −1	30′
40′	.5270 −1	.5531 −1	.4469	.9739 −1	20′
50′	.5306 −1	.5571 −1	.4429	.9734 −1	10′
20° 00′	.5341 −1	.5611 −1	.4389	.9730 −1	70° 00′
10′	.5375 −1	.5650 −1	.4350	.9725 −1	50′
20′	.5409 −1	.5689 −1	.4311	.9721 −1	40′
30′	.5443 −1	.5727 −1	.4273	.9716 −1	30′
40′	.5477 −1	.5766 −1	.4234	.9711 −1	20′
50′	.5510 −1	.5804 −1	.4196	.9706 −1	10′
21° 00′	.5543 −1	.5842 −1	.4158	.9702 −1	69° 50′
10′	.5576 −1	.5879 −1	.4121	.9697 −1	30′
20′	.5609 −1	.5917 −1	.4083	.9692 −1	40′
30′	.5641 −1	.5954 −1	.4046	.9687 −1	30′
40′	.5673 −1	.5991 −1	.4009	.9682 −1	20′
50′	.5704 −1	.6028 −1	.3972	.9677 −1	10′
22° 00′	.5736 −1	.6064 −1	.3936	.9672 −1	68° 00′
10′	.5767 −1	.6100 −1	.3900	.9667 −1	50′
20′	.5798 −1	.6136 −1	.3864	.9661 −1	40′
30′	.5828 −1	.6172 −1	.3828	.9656 −1	30′
40′	.5859 −1	.6208 −1	.3792	.9651 −1	20′
50′	.5889 −1	.6243 −1	.3757	.9646 −1	10′
23° 00′	.5919 −1	.6279 −1	.3721	.9640 −1	67° 00′
10′	.5948 −1	.6314 −1	.3686	.9635 −1	50′
20′	.5978 −1	.6348 −1	.3652	.9629 −1	40′
30′	.6007 −1	.6383 −1	.3617	.9624 −1	30′
40′	.6036 −1	.6417 −1	.3583	.9618 −1	20′
50′	.6065 −1	.6452 −1	.3548	.9613 −1	10′
24° 00′	.6093 −1	.6486 −1	.3514	.9607 −1	66° 00′
10′	.6121 −1	.6520 −1	.3480	.9602 −1	50′
20′	.6149 −1	.6553 −1	.3447	.9596 −1	40′
30′	.6177 −1	.6587 −1	.3413	.9590 −1	30′
40′	.6205 −1	.6620 −1	.3380	.9584 −1	20′
50′	.6232 −1	.6654 −1	.3346	.9579 −1	10′
25° 00′	.6259 −1	.6687 −1	.3313	.9573 −1	65° 00′
10′	.6286 −1	.6720 −1	.3280	.9567 −1	50′
20′	.6313 −1	.6753 −1	.3248	.9561 −1	40′
30′	.6340 −1	.6785 −1	.3215	.9555 −1	30′
40′	.6366 −1	.6817 −1	.3183	.9549 −1	20′
50′	.6392 −1	.6850 −1	.3150	.9543 −1	10′
26° 00′	.6418 −1	.6882 −1	.3118	.9537 −1	64° 00′
10′	.6444 −1	.6914 −1	.3086	.9530 −1	50′
20′	.6470 −1	.6946 −1	.3054	.9524 −1	40′
30′	.6495 −1	.6977 −1	.3023	.9518 −1	30′
40′	.6521 −1	.7009 −1	.2991	.9512 −1	20′
50′	.6546 −1	.7040 −1	.2960	.9505 −1	10′
27° 00′	.6570 −1	.7072 −1	.2928	.9499 −1	63° 00′
	Log₁₀ Cosine	Log₁₀ Cotangent	Log₁₀ Tangent	Log₁₀ Sine	ڈگریاں

ڈگریاں	Log₁₀ Sine	Log₁₀ Tangent	Log₁₀ Cotangent	Log₁₀ Cosine	
27° 00′	.6570 −1	.7072 −1	.2928	.9499 −1	63° 00′
10′	.6595 −1	.7103 −1	.2897	.9492 −1	50′
20′	.6620 −1	.7134 −1	.2866	.9486 −1	40′
30′	.6644 −1	.7165 −1	.2835	.9479 −1	30′
40′	.6668 −1	.7196 −1	.2804	.9473 −1	20′
50′	.6692 −1	.7226 −1	.2774	.9466 −1	10′
28° 00′	.6716 −1	.7257 −1	.2743	.9459 −1	62° 00′
10′	.6740 −1	.7287 −1	.2713	.9453 −1	50′
20′	.6763 −1	.7317 −1	.2683	.9446 −1	40′
30′	.6787 −1	.7348 −1	.2652	.9439 −1	30′
40′	.6810 −1	.7378 −1	.2622	.9432 −1	20′
50′	.6833 −1	.7408 −1	.2592	.9425 −1	10′
29° 00′	.6856 −1	.7438 −1	.2562	.9418 −1	61° 00′
10′	.6878 −1	.7467 −1	.2533	.9411 −1	50′
20′	.6901 −1	.7497 −1	.2503	.9404 −1	40′
30′	.6923 −1	.7526 −1	.2474	.9397 −1	30′
40′	.6946 −1	.7556 −1	.2444	.9390 −1	20′
50′	.6968 −1	.7585 −1	.2415	.9383 −1	10′
30° 00′	.6990 −1	.7614 −1	.2386	.9375 −1	60° 00′
10′	.7012 −1	.7644 −1	.2356	.9368 −1	50′
20′	.7033 −1	.7673 −1	.2327	.9361 −1	40′
30′	.7055 −1	.7701 −1	.2299	.9353 −1	30′
40′	.7076 −1	.7730 −1	.2270	.9346 −1	20′
50′	.7097 −1	.7759 −1	.2241	.9338 −1	10′
31° 00′	.7118 −1	.7788 −1	.2212	.9331 −1	59° 00′
10′	.7139 −1	.7816 −1	.2184	.9323 −1	50′
20′	.7160 −1	.7845 −1	.2155	.9315 −1	40′
30′	.7181 −1	.7873 −1	.2127	.9308 −1	30′
40′	.7201 −1	.7902 −1	.2098	.9300 −1	20′
50′	.7222 −1	.7930 −1	.2070	.9292 −1	10′
32° 00′	.7242 −1	.7958 −1	.2042	.9284 −1	58° 00′
10′	.7262 −1	.7986 −1	.2014	.9276 −1	50′
20′	.7282 −1	.8014 −1	.1986	.9268 −1	40′
30′	.7302 −1	.8042 −1	.1958	.9260 −1	30′
40′	.7322 −1	.8070 −1	.1930	.9252 −1	20′
50′	.7342 −1	.8097 −1	.1903	.9244 −1	10′
33° 00′	.7361 −1	.8125 −1	.1875	.9236 −1	57° 00′
10′	.7380 −1	.8153 −1	.1947	.9228 −1	50′
20′	.7400 −1	.8180 −1	.1820	.9219 −1	40′
30′	.7419 −1	.8208 −1	.1792	.9211 −1	30′
40′	.7438 −1	.8235 −1	.1766	.9203 −1	20′
30′	.7457 −1	.8263 −1	.1737	.9194 −1	10′
34° 00′	.7476 −1	.8290 −1	.1710	.9186 −1	56° 00′
10′	.7494 −1	.8317 −1	.1683	.9177 −1	50′
20′	.7513 −1	.8344 −1	.1656	.9169 −1	40′
30′	.7531 −1	.8371 −1	.1629	.9160 −1	30′
40′	.7550 −1	.8398 −1	.1602	.9151 −1	20′
50′	.7568 −1	.8425 −1	.1575	.9142 −1	10′
25° 00′	.7586 −1	.8452 −1	.1548	.9134 −1	55° 00′
10′	.7604 −1	.8479 −1	.1521	.9125 −1	00′
20′	.7622 −1	.8506 −1	.1494	.9116 −1	40′
30′	.7640 −1	.8533 −1	.1467	.9107 −1	30′
40′	.7657 −1	.8559 −1	.1441	.9098 −1	20′
50′	.7675 −1	.8586 −1	.1414	.9089 −1	10′
36° 00′	.7692 −1	.8613 −1	.1387	.9080 −1	54° 00′
	Log₁₀ Cosine	Log₁₀ Cotangent	Log₁₀ Tangent	Log₁₀ Sine	ڈگریاں

ڈگریاں	Log₁₀ Sine	Log₁₀ Tangent	Log₁₀ Cotangent	Log₁₀ Cosine	
36° 00′	.7692 −1	.8813 −1	.1187	.9080 −1	54° 00′
10′	.7710 −1	.8839 −1	.1161	.9070 −1	50′
20′	.7727 −1	.8866 −1	.1134	.9061 −1	40′
30′	.7744 −1	.8892 −1	.1108	.9052 −1	30′
40′	.7761 −1	.8918 −1	.1082	.9042 −1	20′
50′	.7778 −1	.8945 −1	.1055	.9033 −1	10′
37° 00′	.7795 −1	.8971 −1	.1029	.9023 −1	53° 00′
10′	.7811 −1	.8997 −1	.1003	.9014 −1	50′
20′	.7828 −1	.9024 −1	.0976	.9004 −1	40′
30′	.7844 −1	.9050 −1	.0950	.8995 −1	30′
40′	.7861 −1	.9076 −1	.0924	.8985 −1	30′
50′	.7877 −1	.9102 −1	.0898	.8975 −1	10′
38° 00′	.7893 −1	.9128 −1	.0872	.8965 −1	53° 00′
10′	.7910 −1	.9154 −1	.0846	.8955 −1	50′
20′	.7926 −1	.9180 −1	.0820	.8945 −1	40′
30′	.7941 −1	.9206 −1	.0794	.8935 −1	30′
40′	.7957 −1	.9232 −1	.0768	.8925 −1	20′
50′	.7973 −1	.9258 −1	.0742	.8915 −1	10′
39° 00′	.7989 −1	.9284 −1	.0716	.8905 −1	51° 00′
10′	.8004 −1	.9110 −1	.0690	.8895 −2	50′
20′	.8020 −1	.9135 −1	.0665	.8884 −1	40′
30′	.8035 −1	.9161 −1	.0639	.8874 −1	30′
40′	.8050 −1	.9187 −1	.0813	.8864 −1	20′
50′	.8066 −1	.9213 −1	.0788	.8853 −1	10′
40° 00′	.8081 −1	.9238 −1	.0762	.8843 −1	50° 00′
10′	.8096 −1	.9264 −1	.0736	.8832 −1	50′
20′	.8111 −1	.9289 −1	.0711	.8821 −1	40′
30′	.8125 −1	.9315 −1	.0685	.8810 −1	30′
40′	.8140 −1	.9341 −1	.0659	.8800 −1	20′
50′	.8155 −1	.9366 −1	.0634	.8789 −1	10′
41° 00′	.8169 −1	.9392 −1	.0608	.8778 −1	49° 00′
10′	.8184 −1	.9417 −1	.0583	.8767 −1	50′
20′	.8198 −1	.9443 −1	.0557	.8756 −1	40′
30′	.8213 −1	.9468 −1	.0532	.8745 −1	30′
40′	.8227 −1	.9494 −1	.0506	.8733 −1	20′
50′	.8241 −1	.9519 −1	.0481	.8722 −1	10′
42° 00′	.8255 −1	.9544 −1	.0456	.8711 −1	48° 00′
10′	.8269 −1	.9570 −1	.0430	.8699 −1	50′
20′	.8283 −1	.9595 −1	.0405	.8688 −1	40′
30′	.8297 −1	.9621 −1	.0379	.8676 −1	30′
40′	.8311 −1	.9646 −1	.0354	.8665 −1	20′
50′	.8324 −1	.9671 −1	.0329	.8653 −1	10′
43° 00′	.8338 −1	.9697 −1	.0303	.8641 −1	47° 00′
10′	.8351 −1	.9722 −1	.0278	.8629 −1	50′
20′	.8365 −1	.9747 −1	.0253	.8618 −1	40′
30′	.8378 −1	.9772 −1	.0228	.8606 −1	30′
40′	.8391 −1	.9798 −1	.0202	.8594 −1	20′
50′	.8405 −1	.9823 −1	.0177	.8582 −1	10′
44° 00′	.8418 −1	.9848 −1	.0152	.8569 −1	46° 00′
10′	.8431 −1	.9874 −1	.0126	.8557 −1	50′
20′	.8444 −1	.9899 −1	.0101	.8545 −1	40′
30′	.8457 −1	.9924 −1	.0076	.8532 −1	30′
40′	.8469 −1	.9949 −1	.0051	.8520 −1	20′
50′	.8482 −1	.9975 −1	.0025	.8507 −1	10′
45° 00′	.8495 −1	.0000	.0000	.8495 −1	45° 00′
	Log₁₀ Cosine	Log₁₀ Cotangent	Log₁₀ Tangent	Log₁₀ Sine	ڈگریاں

جدول چہارم۔ قوتیں اور جذر

عدد	مربع	جذر المربع	مکعب	جذر المکعب	عدد	مربع	جذر المربع	مکعب	جذر المکعب
1	1	1.000	1	1.000	51	2,601	7.141	132,651	3.708
2	4	1.414	8	1.260	52	2,704	7.211	140,608	3.733
3	9	1.732	27	1.442	53	2,809	7.280	148,877	3.756
4	16	2.000	64	1.587	54	2,916	7.348	157,464	3.780
5	25	2.236	125	1.710	55	3,025	7.416	166,375	3.803
6	36	2.449	216	1.817	56	3,136	7.483	175,616	3.826
7	49	2.646	343	1.913	57	3,249	7.550	185,193	3.849
8	64	2.828	512	2.000	58	3,364	7.616	195,112	3.871
9	81	3.000	729	2.080	59	3,481	7.681	205,379	3.893
10	100	3.162	1,000	2.154	60	3,600	7.746	216,000	3.915
11	121	3.317	1,331	2.224	61	3,721	7.810	226,981	3.936
12	144	3.464	1,728	2.289	62	3,844	7.874	238,328	3.958
13	169	3.606	2,197	2.351	63	3,969	7.937	250,047	3.979
14	196	3.742	2,744	2.410	64	4,096	8.000	262,144	4.000
15	225	3.873	3,375	2.466	65	4,225	8.062	274,625	4.021
16	256	4.000	4,096	2.520	66	4,356	8.124	287,496	4.041
17	289	4.123	4,913	2.571	67	4,489	8.185	300,763	4.062
18	324	4.243	5,832	2.621	68	4,624	8.246	314,432	4.082
19	361	4.359	6,859	2.668	69	4,761	8.307	328,509	4.102
20	400	4.472	8,000	2.714	70	4,900	8.367	343,000	4.121
21	441	4.583	9,261	2.759	71	5,041	8.426	357,911	4.141
22	484	4.690	10,648	2.802	72	5,184	8.485	373,248	4.160
23	529	4.796	12,167	2.844	73	5,329	8.544	389,017	4.179
24	576	4.899	13,824	2.884	74	5,476	8.602	405,224	4.198
25	625	5.000	15,625	2.924	75	5,625	8.660	421,875	4.217
26	676	5.099	17,576	2.962	76	5,776	8.718	438,976	4.236
27	729	5.196	19,683	3.000	77	5,929	8.775	456,533	4.254
28	784	5.292	21,952	3.037	78	6,084	8.832	474,552	4.273
29	841	5.385	24,389	3.072	79	6,241	8.888	493,039	4.291
30	900	5.477	27,000	3.107	80	6,400	8.944	512,000	4.309
31	961	5.568	29,791	3.141	81	6,561	9.000	531,441	4.327
32	1,024	5.657	32,768	3.175	82	6,724	9.055	551,368	4.344
33	1,089	5.745	35,937	3.208	83	6,889	9.110	571,787	4.362
34	1,156	5.831	39,304	3.240	84	7,056	9.165	592,704	4.380
35	1,225	5.916	42,875	3.271	85	7,225	9.220	614,125	4.397
36	1,296	6.000	46,656	3.302	86	7,396	9.274	636,056	4.414
37	1,369	6.083	50,653	3.332	87	7,569	9.327	658,503	4.431
38	1,444	6.164	54,872	3.362	88	7,744	9.381	681,472	4.448
39	1,521	6.245	59,319	3.391	89	7,921	9.434	704,969	4.465
40	1,600	6.325	64,000	3.420	90	8,100	9.487	729,000	4.481
41	1,681	6.403	68,921	3.448	91	8,281	9.539	753,571	4.498
42	1,764	6.481	74,088	3.476	92	8,464	9.592	778,688	4.514
43	1,849	6.557	79,507	3.503	93	8,649	9.644	804,357	4.531
44	1,936	6.633	85,184	3.530	94	8,836	9.695	830,584	4.547
45	2,025	6.708	91,125	3.557	95	9,025	9.747	857,375	4.563
46	2,116	6.782	97,336	3.583	96	9,216	9.798	884,736	4.579
47	2,209	6.856	103,823	3.609	97	9,409	9.849	912,673	4.595
48	2,304	6.928	110,592	3.634	98	9,604	9.899	941,192	4.610
49	2,401	7.000	117,649	3.659	99	9,801	9.950	970,299	4.626
50	2,500	7.071	125,000	3.684	100	10,000	10.000	1,000,000	4.642

طاق نمبر شمار والے منتخب سوالات کے جوابات

باب ۱

دفعہ 1-1

3. $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}\}$; $\{x \mid 1/x$ ایک شماری عدد ہے اور 10 سے کم $\}$

5. $\{6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48\}$; $\{x \mid x$, 6 کا ایک مضرب ہے اور 50 سے کم $\}$

7. $\{x \mid x^2$ ایک شماری عدد ہے اور 6 سے کم $\}$

9. $\{x \mid 3x - 2$ ایک شماری عدد ہے اور 6 سے کم $\}$

17. (a) اُسی جسامت کا. برابر (b) اُسی جسامت کا. نابرابر
(c) یکساں جسامت کا. برابر (d) یکساں جسامت کا نہیں
(e) یکساں جسامت کا. برابر (f) اُسی جسامت کا نہیں

دفعہ 1-2

3. (a) غیر صادق (b) صادق نہیں (c) صادق
(d) غیر صادق (e) صادق (f) صادق نہیں
(g) صادق (h) صادق (i) غیر صادق

7. $Y = \{1, 2\}$ یا $\{1, 3\}$ یا $\{1\}$

9. (a) $\{a, b, c, d\}$
(b) $\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$, $\{a, c, d\}$, $\{b, c, d\}$
(c) $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{a, d\}$, $\{b, c\}$, $\{b, d\}$, $\{c, d\}$
(d) $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{d\}$
(e) $\emptyset$

11. (a) صادق (b) غیر صادق (c) صادق
(d) غیر صادق (e) صادق (f) غیر صادق
(g) صادق نہیں (h) صادق (i) صادق نہیں (j) صادق نہیں

13. اگر $a \in A$ تو $a \in B$ اور اگر $b \in B$ تو $b \in A$

دفعہ 1-3

1. (a) $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ (b) $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ (c) $\{6, 7\}$
(d) U (e) $\emptyset$ (f) $\{4, 5\}$
(g) A (h) $\emptyset$ (i) U
(j) D (k) $\{0, 1, 6, 7, 8, 9\}$ (l) $\{0, 1, 2, 3, 8, 9\}$
(m) $\{6, 7, 8, 9\}$ (n) U (o) $\emptyset$

3. (a) $X \cup U = X$

9. (a) A اور B غیر مشترک یا A یا $B = \emptyset$

دفعہ 1-4 (1)

1. (a) نہیں (b) نہیں

3. (a) ضرب کے تحت بند (b) دونوں میں سے کسی کے تحت بھی بند نہیں (c) ضرب کے تحت بند

5. (a) نہیں (b) ہاں

دفعہ 1-4 (2)

1. 1, 2, 3, 4, 6, 12 اجزا ہیں 12 کے؛
1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60, 120 اجزا ہیں 120 کے

3. (a) I (b) $\emptyset$

5. سٹ جو اعداد صحیح اضعاف $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ پر مشتمل ہے۔

7. (a) نہیں (b) نہیں

9. (a) 41, 43, 47, 53, 61 (b) 113, 131, 151
(c) ہاں (d) $\overline{41^2}$ نہیں

دفعہ 1-5

1. (a) $\frac{8}{9}$ (b) $\frac{41}{99}$
(c) $-\frac{1473}{100}$ (d) $\frac{9}{7}$

3. (a) 0.6666... (b) 0.571428571428...
(c) 0.03125 (d) 0.0588235294117647...

5. (b) $\frac{44}{11}$ (c) $\frac{44}{11}$
(d) $\frac{3}{8}$ (e) $\frac{1}{7}$

باب 2

دفعہ 2-2 (1)

1. دو سٹوں کا اجتماع ایک سٹ ہے؛ دو سٹوں کا تقاطع ایک سٹ ہے۔ 5. ہاں، نہیں 7. نہیں

دفعہ 2-2 (2)

1. $A5$ 3. $A5$ 5. $A5$ 7. $A6$

.9 A3 اور A6 .11 .16 .13 .16 .15 .15
.17 A3 ، A1 ، A6 .19 A1، .15، .13، A6
.23 $a + 0 = a$ (موضوعہ 5)، $a \cdot 1 = a$ (موضوعہ 5)

باب 3

دفعہ 3-1

1. $3a + b - 1$, $a + 5b - 7$
3. $6x + 6y - z$, $2x + 3z$
5. $-8x - 11y$, $12x - y$
7. $-2x - 4y$
9. $-6x - 9y - 4$
11. $16x - 3y - 9$
13. $13x - 10y$
15. $a^2 - (b^2 - 2bc + c^2)$
17. $4x^2 - (4y^2 + 4y + 1)$
19. $(c - a)x$, $-(a - c)x$
21. $(a + b)x$, $-(-a - b)x$
23. 7
25. 17
27. 5
29. 35

دفعہ 3-2

1. a^9
3. $3x^{12}$
5. y^{24}
7. a^{20}
9. $125c^3$
11. $32a^{15}$
13. a^{r+s+t}
15. $2^n x^{n^2}$
17. $2x^2 + x - 15$
19. $16x^2 - 4y^2$
21. $r^3 - r^2s - rs^2 + s^3$
23. $x^3 + y^3$
25. $2x^4 - 3x^3 - 10x^2 + 6x + 8$
27. $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$
29. $x^6 - 8y^6$
31. $a^{2n+1} - a^{2n} - 7a^{n+1} + 7a^n + 10a - 10$
33. $x^{4n} - 2x^{2n}y^{2n} + y^{4n}$
35. $x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4$

دفعہ 3-3 (1)

1. $3y^2 - 2x^2$
3. $2x^2/y - 3x^3$
5. $3x - 4y + 6x^2y^3$
7. $x^2 - 7x + 10 \equiv (x - 2)(x - 5)$
9. $3x^2 - 13x + 4 \equiv (3x - 1)(x - 4)$
11. $2x^3 - 7x^2 + 11x - 4 \equiv (x^2 - 3x + 4)(2x - 1)$
13. $x^2y - 6x^3 - 12xy^2 - 6y^3 \equiv (-3x^2 - 4xy - 12y^2)(2x - 3y) - 42y^3$
15. $4x^3 + 5 + 4x^2 - 13x \equiv (2x^2 - 3x + 1)(2x + 5)$
17. $5x^3 - 2x^2 + 3x - 4 \equiv (5x + 8)(x^2 - 2x + 1) + (14x - 12)$
19. $x^6 - y^6 \equiv (x^5 + x^4y + x^3y^2 + x^2y^3 + xy^4 + y^5)(x - y)$

دفعہ 3-3 (2)

1. $Q = 3x + 7$, $R = 17$
3. $Q = x^2 - 4x + 8$, $R = -7$
5. (a) $Q = x^3 - 3x - 10$, $R = -28$
   (b) $Q = x^2 - 3x^2 - 4$, $R = -4$
7. (a) $Q = 3x^3 + 6x^2 + 12x + 17$, $R = 14$
   (b) $Q = 3x^3 - 6x^2 + 12x - 31$, $R = 42$
9. $x^3 - 2x^2 + 3x - 4 \equiv (x^2 + x + 6)(x - 3) + 14$
11. $x^4 - 5x^3 + x^2 - 6 \equiv (x^3 - 4x^2 - 3x - 3)(x - 1) - 9$

دفعہ 3-4

1. $6ax - 8ay$
3. $-21x^3y - 28xy^2$
5. $4x^2 - 9y^2$
7. $x^4 - 16y^4$

9. $4x^2 + 28xy + 49y^2$
11. $x^2 - 7x + 10$
13. $x^2y^4 - 2xy^2z^2w + z^4w^2$
15. $28x^2 - 9xy - 9y^2$
17. $4x^2 + 12xy + 9y^2 - 9$
19. $x^2 + 4y^2 + z^2 - 4xy - 2xz + 4yz$
21. $x^3 + 8$
23. $x^2 + 6xy + 9y^2 - 4z^2 + 16zw - 16w^2$
25. $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2ab + 2ac - 2ad - 2bc + 2bd - 2cd$
27. $4(x + 2y)^2 + 2(x + 2y) - 12$
29. $8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3$

وفعہ 3-5 (1)

1. $4(x - 5)$
3. $3y(y - 3)$
5. $xyz^2(yz - 3x + 5y^2)$
7. $(2x + 5)(3y - 4x)$
9. $2x(x + 3y)(z - 3x)$
11. $(3 - a)(3 + a)$
13. $(15a^4 - 8b)(15a^4 + 8b)$
15. $x(xy^2 - 5d^3)(xy^2 + 5d^3)$
17. $(x + 2y - z)(x + 2y + z)$
19. $(a + b + c + d)(a + b - c - d)$
21. $[9(4x - 3y) + 5(3z + w)][9(4x - 3y) - 5(3z + w)]$
23. $(x - 4)^2$
25. $(3xy + 11)^2$
27. $5(z - 3w)^2$
29. $(7 - x)^2$
31. $(a - 2)(a^2 + 2a + 4)$
33. $(2x^{2a} + 3y^m)(4x^{4a} - 6x^{2a}y^m + 9y^{2m})$
35. $(x - 5y)(19x^2 - 10xy + 7y^2)$
37. $(x - 4)(x - 3)$
39. $(ab - 5)(ab + 4)$
41. $(7x - 2)(5x - 2)$
43. $(3a - 4)(2a + 5)$
45. $(x + y - 5)(x + y - 2)$
47. $(4x + 2y - 5)(2x + y + 2)$
49. $2(2a + 2b + c + d)(3a + 3b - 5c - 5d)$

وفعہ 3-5 (2)

1. $(a + b)(x - y)$
3. $(x - 2)(x^2 + 4)$
5. $(a - 3)(2 - b^2)$
7. $(x - 1 + y)(x - 1 - y)$
9. $(2x + y - 2)(2x - y + 2)$
11. $(x + y + z - w)(x + y - z + w)$
13. $(x + 2y - 3)(x + 2y + 2)$
15. $(x^2 - xy - 3y^2)(x^2 + xy - 3y^2)$
17. $(a^2 - 2ab + 3b^2)(a^2 + 2ab + 3b^2)$
19. $(a^4 + b^4)(a^2 + b^2)(a + b)(a - b)$
21. $(x - z)(x + 2y + z)$
23. $3(z - x)(x + 2y + z)$

وفعہ 3-6

1. $\frac{4}{9}$
3. $\frac{a^2x^2}{y^2}$
5. $\frac{a}{x + y}$
7. $\frac{x + 1}{x}$
9. $\frac{x + 4}{x - 4}$
11. $\frac{y + 2}{y + 5}$
13. $\frac{3a + 1}{2a - 1}$
15. $\frac{2(3 - x)}{x + 5}$
17. $\frac{x + 6}{x^2 + 6x + 36}$
19. $\frac{x^2 + 2xy + y^2}{x^2 + y^2}$

دفعہ 3-7

1. $\frac{6}{5}$
3. $\frac{(3x-4y)(3x+4y)}{12xy}$
5. $\frac{23-2x}{18}$
7. $\frac{2x^2-y^2}{x-y}$
9. $\frac{x-y}{5x-3}$
11. $\frac{5yz-4xz+3xy}{xyz}$
13. $\frac{5(1-x)}{3(x-4)}$
15. $\frac{2x^2-9x-9}{(2x-3)(x-5)(x-6)}$
17. $\frac{4a^2+9a+29}{a^3-27}$
19. $-\frac{5}{(x+2)(x+3)}$
21. $\frac{8y^4-28y^3+21y^2+27y-35}{(2y-3)^2(y+1)}$
23. $\frac{xz-x^2+xy-y^2+yz-z^2}{(x-y)(y-z)(z-x)}$

دفعہ 3-8 (1)

1. $\frac{20}{21}$
3. $\frac{1}{6}$
5. $\frac{3}{10}$
7. $\frac{15x}{4y}$
9. $\frac{40x^3}{81}$
11. $\frac{x}{x^2+xy+y^2}$
13. $\frac{1}{x+3}$
15. y
17. 1
19. $-\frac{2+3x}{x^2(x+1)}$

دفعہ 3-8 (2)

1. $-\frac{57}{5}$
3. $\frac{x}{z}$
5. $\frac{2y+5x}{2y-5x}$
7. $x-1$
9. $(3x+2y)(y-2x)$

دفعہ 3-9

1. 8
3. $\frac{3y^4}{x^2}$
5. $\frac{2x^5}{3y^5}$
7. $\frac{cd(a+b)}{ab}$
9. $\frac{(a+b)^2}{ab}$
11. $x^{mn}y^{2m}$

دفعہ 3-10

1. 5
3. $\frac{4}{7}$
5. $\frac{1}{9}$
7. $\frac{1}{64}$
9. 81
11. $\sqrt[20]{x}$
13. $\sqrt[20]{x}$
15. $\sqrt[20]{x}$
17. $\frac{1}{64xy^5}$

19. $\frac{5x^2}{3y}$ 21. $a + 2\sqrt{ab} + b$ 23. $x + y$

25. $x^2 + \frac{2x}{y} + \frac{1}{y^2}$

3-11 وقفہ

1. $2\sqrt{2}$ 3. $\frac{5}{2}$ 5. $-5\sqrt[3]{5}$
7. $3xy^2\sqrt{3xy}$ 9. $3x^2y\sqrt[3]{3xy^2}$ 11. $5\sqrt{35}/21$
13. $b\sqrt{a^2 + c^2}$ 15. $\sqrt{3xy}/y^2$ 17. $xy\sqrt[3]{27x^3y^2}/9$
19. $\sqrt{5}$ 21. $\sqrt[3]{45x}/3x$ 23. $x\sqrt{13xz}/y$

3-12 وقفہ

1. $4\sqrt{3}$ 3. $11\sqrt{2}$
5. $-\sqrt{x + y}$ 7. $(ac^2 + b^3c + a^4b^2)\sqrt{abc}$
9. $32\sqrt{3}/3$ 11. 5, 2

3-13 وقفہ

1. $\sqrt{65}$ 3. $2\sqrt[3]{13}$
5. $(x - y)\sqrt{x + y}$ 7. $(x + y)\sqrt{x^2 - xy + y^2}$
9. $2\sqrt[3]{3}$ 11. $2(\sqrt{3} + \sqrt{7})$
13. -2 15. $-13 - \sqrt{15}$
17. $(3 - \sqrt{5})/2$ 19. $\frac{8}{9}$
21. $\sqrt[3]{9}/3$ 23. $\sqrt[4]{3a^2b^2}/b$
25. $\sqrt{15}/10$ 27. $\sqrt[3]{4}$
29. $(5\sqrt{7} + 5\sqrt{3})/4$ 31. $\frac{x^2 - x\sqrt{y}}{x^2 - y}$
33. $-(57 + 13\sqrt{21})/12$ 35. $2(4 + 2\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9})/5$
37. $(2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} - \sqrt{30})/12$

باب 4

4-2 وقفہ

1. $-6.5, -5, -1, 0, 0.333, \frac{1}{3}, \sqrt{4}, 2.3, 2^3$

5. $(0), (-1), (1), \left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$

7.
± 3	(c)	$\pm\sqrt{5}$	(b)	± 2	(a)
4	(f)	7, −3	(e)	$\pm\frac{1}{3}$	(d)
6, −2	(i)	6, −4	(h)	9, −3	(g)
8, 2	(l)	کوئی نہیں	(k)	کوئی نہیں	(j)

15. دو

دفعہ 4-3

1. (a) کمترین بالائی حد 3 — ، اعظم زیریں کوئی نہیں (b) کمترین بالائی حد کوئی نہیں، اعظم زیریں حد $\sqrt{2}$
(c) کمترین بالائی حد 1 ، اعظم زیریں حد 3 —
(d) کمترین بالائی حد کوئی نہیں ، اعظم زیریں حد 0

دفعہ 4-4

3. (a) (3, 2)
(b) (−4, 6)
(c) (5, 0)

5. II, IV, III, I, II, IV

7. (a) (8, 4), (4, −4), (−4, 4)
(b) (−1, 6), (3, −2), (−3, −4)

11. (a) $(-1, \frac{5}{2})$
(b) $(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$
(c) (−1, 0)

دفعہ 4-5

1. (a) $\sqrt{34}$ (b) $\sqrt{106}$ (c) $3\sqrt{2}/4$ (d) 13 (e) 8 (f) $\sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2}$

7. ہاں ؛ نہیں

9. $(2\sqrt{3}, -1-4\sqrt{3})$ یا $(-2\sqrt{3}, -1+4\sqrt{3})$

11. $(\pm a\sqrt{2}/2, 0)$ اور $(0, \pm a\sqrt{2}/2)$

13. $(1, 0), (0, -1), (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}), (-\frac{1}{2}, \sqrt{3}/2)$

دفعہ 4-6

1. (a) $(x-3)^2+(y-1)^2=25$ (b) $(x-4)^2+(y+2)^2=9$ (c) $(x+1)^2+(y-3)^2=9$ (d) $(x-2)^2+(y+4)^2=25$

3. (a) تمام نقاط دائرہ پر
(b) تمام نقاط یا تو دائرہ کے اندر یا دائرہ پر
(c) تمام نقاط دائرہ کے باہر یا اُس پر
(d) نقطہ (3, −1)
(e) کوئی نقاط نہیں۔

.5 $4r\sqrt{2}$

.7 $2\pi,\ \pi/2,\ \pi/3$

باب 5

دفعہ 5-1

.1 (a) علاقہ، تمام حقیقی اعداد؛ سعت، تمام حقیقی اعداد۔

(b) علاقہ، تمام غیر منفی حقیقی اعداد؛ سعت، تمام غیر منفی حقیقی اعداد۔

(c) علاقہ، تمام حقیقی اعداد؛ سعت، تمام غیر منفی حقیقی اعداد۔

(d) علاقہ، تمام حقیقی اعداد 2 اور 2− کے درمیان بہ شمول دونوں؛ سعت، تمام حقیقی اعداد 0 اور 2 کے درمیان بہ شمول دونوں۔

(e) علاقہ، تمام حقیقی اعداد جو 1 سے بڑے ہوں یا 1 کے برابر ہوں؛ سعت، تمام غیر منفی حقیقی اعداد۔

(f) علاقہ، سوائے 1 کے تمام حقیقی اعداد؛ سعت، تمام حقیقی اعداد سوائے 1− کے۔

(g) علاقہ، تمام حقیقی اعداد سوائے 1 اور 1− کے؛ سعت، تمام حقیقی اعداد۔

(h) علاقہ، تمام حقیقی اعداد؛ سعت، تمام حقیقی اعداد جو 2− سے بڑے ہوں یا 2− کے برابر ہوں۔

(a) علاقہ، 1, 2, 3 ؛ سعت 2, 3, 4

(b) علاقہ، 1, 2 ؛ سعت 2, 3, 4

(c) علاقہ، R ؛ سعت R

(d) علاقہ، R ؛ سعت R

(e) علاقہ، تمام حقیقی اعداد جو 1 سے کم ہوں یا اس کے برابر ہوں؛ سعت R

(f) علاقہ R، سعت تمام حقیقی اعداد جو 1 سے کم یا اس کے برابر ہوں۔

(g) علاقہ، تمام حقیقی اعداد جو 1− اور 5 کے درمیان ہوں بہ شمول دونوں؛ سعت تمام حقیقی اعداد جو 0 اور 6 کے درمیان ہوں بہ شمول دونوں۔

(h) علاقہ، R ; سعت R

(i) علاقہ R، سوائے 7 کے ; سعت R سوائے 3 کے۔

(j) علاقہ، تمام حقیقی اعداد -1 اور 1 کے درمیان بہ شمول دونوں ; سعت، تمام حقیقی اعداد -1 اور 1 کے درمیان بہ شمول دونوں۔

.5 0, 0, −2, 10
.7 1, 2, 32, $\frac{1}{32}$
.9 0, 1, 2, −2
.11 6, −3, 4
.13 $A = \pi x^2$, $x \to \pi x^2$
.15 0, 12, 16, 12, 0
.17 1, 0, −1, 0, 0, 1

دفعہ 5-2

1. $-\frac{5}{2}$
3. 0
5. 2, 5
7. 1
9. 1
11. 0, ± 1

باب 6

دفعہ 6-2

1. +
3. +
5. +
7. −
9. −
11. +
13. +
15. −
17. I ، IV
19. III ، IV
21. I ، IV
23. IV
25. II
27. $\sin\theta = \frac{4}{5}$, $\cos\theta = \frac{3}{5}$
29. $\sin\theta = \frac{3}{5}$, $\cos\theta = -\frac{4}{5}$
31. $\sin\theta = -\frac{15}{17}$, $\cos\theta = -\frac{8}{17}$
33. $\sin\theta = -1$, $\cos\theta = 0$
35. $\sin\theta = 0$, $\cos\theta = 1$
37. $\sin\theta = -\frac{3}{5}$, $\tan\theta = \frac{3}{4}$
39. $\cos\theta = -\sqrt{5}/3$, $\tan\theta = -2/\sqrt{5}$
41. $\sin\theta = -\sqrt{11}/6$, $\tan\theta = -\sqrt{11}/5$
43. $\cos\theta = -\frac{4}{5}$, $\tan\theta = \frac{3}{4}$
45. $\sin\theta = \pm 2/\sqrt{13}$, $\cos\theta = \pm 3/\sqrt{13}$
47. $\cos\theta = \pm\sqrt{95}/12$, $\tan\theta = \pm 7/\sqrt{95}$
49. $\sin\theta = -\frac{15}{17}$, $\cos\theta = -\frac{8}{17}$
51. $\sin\theta = -\frac{15}{17}$, $\cos\theta = -\frac{8}{17}$

دفعہ 6-3

.1 ایک ہی ہیں۔

.3 (a) $\sin\theta = 0$, $\cos\theta = -1$ (b) $\sin\theta = -1$, $\cos\theta = 0$ (c) $\sin\theta = 1$, $\cos\theta = 0$

(d) $\sin\theta = 0$, $\cos\theta = 1$ (e) $\sin\theta = 0$, $\cos\theta = -1$ (f) $\sin\theta = 0$, $\cos\theta = 1$
(g) $\sin\theta = 1$, $\cos\theta = 0$ (h) $\sin\theta = 0$, $\cos\theta = 1$ (i) $\sin\theta = 0$, $\cos\theta = -1$

.13 (a) $\sqrt{2}$, (b) 2

6-4 دفعہ

11. (a) 1, (b) 1 13. $-\sqrt{3}$ 15. $\frac{5}{2} - \sqrt{3}$
17. -1 19. 2 21. $\pi/6$, $5\pi/6$
23. $\pi/6$, $7\pi/6$ 25. $3\pi/4$, $7\pi/4$ 27. $\pi/4$, $3\pi/4$
29. $5\pi/6$, $11\pi/6$

6-6 دفعہ

1. $1/\sin\theta$ 3. $\pm\sqrt{1 - \sin^2\theta}$
5. $\pm \sin\theta/\sqrt{1 - \sin^2\theta}$ 7. $1/\cos\theta$
9. $\pm\sqrt{1 - \cos^2\theta}$ 11. $\pm\sqrt{1 - \cos^2\theta}/\cos\theta$
13. $\sin\theta = \pm \tan\theta/\sqrt{1 + \tan^2\theta}$, $\cos\theta = \pm 1/\sqrt{1 + \tan^2\theta}$
$\cot\theta = 1/\tan\theta$, $\sec\theta = \pm\sqrt{1 + \tan^2\theta}$, $\csc\theta = \pm\sqrt{1 + \tan^2\theta}/\tan\theta$
15. $1/(1 - \cos^2\theta)$

6-9 دفعہ

.1 $\sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$, $\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$, $\tan\frac{5\pi}{12} = 2 + \sqrt{3}$

.3 $\cos\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$, $\tan\frac{7\pi}{12} = -(2 + \sqrt{3})$

.5 (a) $\frac{56}{65}$ (b) $-\frac{33}{65}$
(c) $-\frac{56}{33}$ (d) $-\frac{16}{65}$
(e) $\frac{63}{65}$ (f) $-\frac{16}{63}$

.7 (a) II
(b) IV

.9 $\sin(\alpha + \beta) = -\frac{304}{425}$, $\cos(\alpha + \beta) = \frac{297}{425}$

.11 $\frac{\sqrt{3}\tan\theta + 1}{\sqrt{3} - \tan\theta}$

.13 $\frac{1 - \tan\theta}{1 + \tan\theta}$

.15 $\frac{2}{\sqrt{3}\sin\theta - \cos\theta}$

.17 $\dfrac{\sin\theta - \cos\theta}{\sqrt{2}}$

.29 $13\sin(\theta+\theta_1)$ جہاں $\sin\theta_1 = \frac{12}{13}$ اور $\cos\theta_1 = \frac{5}{13}$

.31 $5\sin(\theta+\theta_1)$ جہاں $\sin\theta_1 = -\frac{3}{5}$ اور $\cos\theta_1 = \frac{4}{5}$

.33 $\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$

دفعہ 6-10

1. $-\sin 0.2793$
3. $-\sin 0.7156$
5. $-\cot 0.3005$
7. $\cos 0.0873$
9. $-\cot 0.2443$
11. $-\sin 0.4292$
13. $-\sin 0.7124$
15. $-\sin 0.2832$
27. π

دفعہ 6-11

3. $\sin 7\pi/12 = \sqrt{2+\sqrt{3}}/2$
   $\cos 7\pi/12 = -\sqrt{2-\sqrt{3}}/2$
   $\tan 7\pi/12 = -(2+\sqrt{3})$
5. (a) $-\frac{120}{169}$, (b) $-\frac{119}{169}$
   (c) $\frac{120}{119}$ (d) $3/\sqrt{13}$
   (e) $2/\sqrt{13}$ (f) $\frac{3}{2}$
7. $\dfrac{3+4\cos 2\theta+\cos 4\theta}{8}$

دفعہ 6-12

1. $(\sin 8\theta - \sin 2\theta)/2$
3. $(\sin 12\theta - \sin 2\theta)/2$
5. $(\sin 7\theta + \sin 3\theta)/2$
7. $[\sin(3\theta/2) - \sin(2\theta)]/2$
9. $2\sin(\pi/6)\cos(\pi/18)$
11. $2\cos(\pi/2)\cos(5\pi/18)$
13. $2\sin 6\theta\cos 2\theta$
15. $2\cos(5\theta/4)\sin(5\theta/12)$

دفعہ 6-13

3. $11\pi/60 = \pi/12 + \pi/10$, $13\pi/60 = 5\pi/12 - \pi/5$,
   $7\pi/30 = \pi/3 - \pi/10$
5. (a) 0.4566 (b) 0.9261 (c) 2.2286 (d) 0.1679
   (e) −0.9903 (f) 1.1571 (g) −0.9681 (h) −0.9528

باب 7

دفعہ 7-1

.1 -2
.3 $\frac{8}{9}$
.5 -3
.7 -7
.9 $\frac{11}{5}$
.11 -5
.13 $-\frac{19}{5}$
.15 $\pi/3, 2\pi/3$
.17 0.3217, 3.4633
.19 0.2195, 2.3985, 3.3611, 5.5401

.21 $\frac{c}{a-b}$ .23 $2A/h$ .25 $\frac{l-a}{n-1}$

.27 $\frac{Sr+a-S}{r}$ .29 $\frac{2S-an}{n}$ .31 $\frac{a\tan\theta_1}{\tan\theta_2-\tan\theta_1}$

.41 18 سال .43 45,000 ڈالر .45 $1\frac{1}{2}$ گھنٹہ

دفعہ 7-2

.1 10, 13, 16; $t_0 = 25$, $S_0 = 117$

.3 1, −2, −5; $t_{15} = -32$, $S_{15} = -165$

.5 $t_{12} = 46$, $S_{12} = 288$

.7 $d = \frac{8}{51}$, $t_{14} = \frac{34}{7}$

.9 $t_1 = -\frac{31}{28}$, $t_{14} = \frac{151}{28}$

.11 $n = 7$, $S_7 = 147$

.13 8, 9, 10

.15 187,026

.17 2, 5, 8, 11

.19 $-3\frac{1}{2}$, −7, $-\frac{3}{2}$

.21 (a) −4; (b) $\frac{17}{15}$

.25 27 اعداد؛ $S = 2835$

.27 1092 دفعہ

.29 1610 فٹ

.31 5075 ڈالر

دفعہ 7-3

.1 اقل 4 جبکہ $x = -3$

.3 اقل $-\frac{121}{8}$ جبکہ $x = -\frac{5}{4}$

.5 اقل $-\frac{169}{24}$ جبکہ $x = \frac{17}{12}$

.7 اقل 2 جبکہ $x = -3$

.9 8, 8

.11 40 فٹ، 40 فٹ

دفعہ 7-4

(i):

.1 −1, −5 .3 $\frac{3}{2}$, 4 .5 $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{2}$ .7 کوئی نہیں

.9 $\pm\frac{3}{5}$

.11 $\pi/6, 5\pi/6, 7\pi/6, 11\pi/6$

.13 $\frac{10}{3}$, $-\frac{5}{2}$

.15 $\pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4$

.17 $-\frac{5}{3}$, 2

.19 $\pi/3, \pi/2, 3\pi/2, 5\pi/3$

$\pi/2,\ 7\pi/6,\ 11\pi/6$ .23

$-a \pm b$ .21

$-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{3}$ .25

دفعہ 7-4 (2)

1. $\frac{3}{2},\ -4$

3. $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

5. $0,\ \pi/3,\ 5\pi/3$

7. $a,\ b$

9. $1,\ \frac{c-a}{a-b}$

11. $3\pi/4,\ 7\pi/4,\ 0.5880,\ 3.7295$

13. $1,\ -5/4$

15. $0.3142,\ 0.9425,\ 2.1991,\ 2.8275$
$3.4558,\ 4.0841,\ 5.3407,\ 5.9691$

17. $\frac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 2gs}}{g}$

19. -3

21. $\frac{3}{5}$ یا $\frac{5}{3}$

23. 1

25. اگر $\frac{-27 + \sqrt{909}}{2}$

دفعہ 7-5 (1)

.1 $x > 9$

.3 $t < 7$

.5 $x > 9$ یا $x < -11$

.7 $-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$

.9 $x > -1 + \sqrt{13}$ یا $x < -1 - \sqrt{13}$

.11 کوئی حقیقی قیمتیں نہیں۔

.13 > 5 یا $x < 0$

.15 $3 < x < 5$

.17 $-\frac{1}{2} \le x \le \frac{7}{2}$

.19 $x \le -26$ یا $x \ge -22$

.21 $\frac{7\pi}{4} < \theta \le 2\pi$ یا $\frac{3\pi}{4} < \theta < \frac{5\pi}{4}$ یا $0 \le \theta < \frac{\pi}{4}$

.23 $\pi < \theta < 2\pi$

.25 $\frac{4\pi}{3} < \theta < 2\pi$

.27 $0 \le \theta < \frac{7\pi}{6}$ یا $\frac{11\pi}{6} < \theta < 2\pi$

.29 تمام قیمتیں

.31 $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{5\pi}{4}$

دفعہ 7-6

.1 تمام صفروں کی حاصل جمع ہیں $-6,\ -1,\ -\frac{9}{2},\ \frac{11}{2},\ \frac{17}{6},\ \frac{5}{2},\ -6,\ \frac{5}{3}$

.3 تمام صفروں کے حاصل ضرب ہیں $5,\ -6,\ -6,\ \frac{15}{2},\ \frac{5}{6},\ -4,\ 11,\ \frac{4}{3}$
$x^2 + x - 20 = 0$

.5 $12x^2 + x - 6 = 0$

.7 $x^2 - 4x + 1 = 0$
.9 $8x^2 + 12x + 1 = 0$
.11 $5x^2 - 8x - 4 = 0$
.13 $2x^2 + 5x - 3 = 0$
.15 $36x^2 + 24x - 5 = 0$
.17 $8x^2 - 5x - 1 = 0$
.19 $k = -1$
.21 $k = 1$
23 $k = \frac{43}{12}$
.25 $k = -5$
.27 $k = 0$
.29 k کی تمام قیمتیں
.31 $-8 < x < 8$
.33 $k = \frac{21}{4}$
.35 $k > \frac{3}{2}$ یا $k < -1$

دفعہ 7-7

.1 $\pm 2, \pm\sqrt{7}$
.3 $\pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{2}$
.5 حقیقی جذر -2 ، 1
.7 $-64, 8$
.9 $5, 2, \frac{7 \pm \sqrt{53}}{2}$
.11 $1, 0$
.13 $-\frac{23}{9}$
.15 $5, -5/2, \frac{5 \pm \sqrt{57}}{4}$

دفعہ 7-8

.1 $\frac{1}{2}$
.3 $7, 1$
.5 16
.7 -5
.9 6
.11 $2.09, \quad 6.05$ (تقریباً)
.13 $0, \pi/2$
.15 $3\pi/4, \quad 5.99$ (تقریباً)

دفعہ 7-9

.1 $z = \frac{kx}{y}$
.3 $z = 6xy$
.5 $C = kd$
.7 $.1 = kx^2$
.9 $y = 2x/3$
.11 90
.13 570π مربع انچ
.15 72, ارگ
.17 2 فٹ
.19 10 سے ضرب کرکے۔

دفعہ 7-10

.1 $x = 2, y = -1$
.3 $x = 3, y = 5$
.5 $x = \frac{3}{5}, y = \frac{3}{2}$
.7 $\alpha = \pi/6, 5\pi/6$
$\beta = 0$
.9 $\alpha = \pi/6, 11\pi/6$
$\beta = \pi/6, 7\pi/6$
.11 $x = 5, y = -2$
.13 $x = \frac{a^3 + a^2b + 3ab^2 + b^3}{a^2 + b^2}$
$y = \frac{a^3 - a^2b + ab^2 + b^3}{a^2 + b^2}$
.15 $x = \frac{a}{\tan k_2 - \tan k_1}$
$y = \frac{a \tan k_1}{\tan k_2 - \tan k_1}$

.17 $x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha$, $y' = y\cos\alpha - x\sin\alpha$ .20 $\frac{81}{56}$

.31 150 منٹ فی گھنٹہ، 10 منٹ فی گھنٹہ .33 12 گھنٹہ، 15 گھنٹہ

.35 $(-1, 2), (2, 5), (3, -1)$

.37 $(\frac{19}{7}, \frac{8}{7}), (\frac{30}{7}, \frac{4}{7}), (\frac{23}{7}, -\frac{10}{7}), (\frac{11}{7}, -\frac{6}{7})$

.39 (a) $y = -\frac{x}{3} + \frac{11}{3}$ (b) $y = -\frac{3}{10}x + \frac{4}{5}$.

دفعہ 7-11

.1 $x = 1, y = 2, z = 3$ .3 $x = 3, y = -1, z = 4$

.5 $x = \frac{1}{2}, y = -\frac{3}{2}, z = \frac{1}{2}$ .7 $x = 5, y = 6, z = 7$

.9 $x = 3, y = 4, z = 0$ .11 $\{(-1, 2, 3)\}$

.13 10 نکل، 10 ڈائم، 5 کوارٹر

.15 $x^2 + y^2 - x - 7y + 6 = 0$ .17 $x = y + 2z - 1$

دفعہ 7-12

.1 $x = 0, 2$; $y = 0, 16$

.3 کوئی حقیقی قیمتیں نہیں۔

.5 $x = \frac{3 \pm \sqrt{7}}{2}, y = \frac{5 \mp \sqrt{7}}{2}$

.7 $\{(2, 1), (-8/5, -1/5)\}$

.9 $\left\{\left(\frac{-2 + 2\sqrt{5}}{3}, 1 + \sqrt{5}\right), \left(\frac{-2 - 2\sqrt{5}}{3}, 1 - \sqrt{5}\right)\right\}$

.11 $b = \pm a\sqrt{1 + m^2}$

.13 23, 32

.15 7, 4

باب 8

دفعہ 8-1 (1)

.1 -2 .3 3 .5 1 .11 $x = 1$

.15 حقیقی، برابر، غیر حقیقی

دفعہ 8-1 (2)

1. 5

3. 0

15. $\frac{4x + 3y - 17}{2}$ 17. $9x - 5y - 2 = 0$ 19. $x = -1, y = 4$

دفعہ 8-2

.1 صف اور کالم ادل بدل کر دیے گئے ہیں۔

3. دو کالم متماثل ہیں۔ 5. 1008

9. $x = a, b$ 11. $x = 3, 1$

دفعہ 8-3

1. -110 3. -484 5. 0

دفعہ 8-4

3. $x = -4, y = -3, z = 2, w = 1$
7. $f(x) = 2x^2 - 5x + 4$

باب 9

دفعہ 9-1 (1)

1. $R = 17$ 3. $R = -7$ 5. (a) -6 (b) 57
7. 9. نہیں 11. ہاں

دفعہ 9-1 (2)

1. 2، ایک ز 3، دو ز 4− رتبین 3. 7− واحد ز $\frac{1}{2}$ رتبین
5. $\frac{1}{2}$− رتبہا ز 3 رچار 7. بالائی حد 3 زیریں حد 4−
9. بالائی حد 3 زیریں حد 2− 11. بالائی حد 3 زیریں حد 3−
13. بالائی حد 2 زیریں حد 1− 15. بالائی حد 2 زیریں حد 3−

دفعہ 9-2

5. 2 رجفت ز تنہا 1، اور 2 کے بیچ ز واحد 5− اور 6− کے درمیان۔
7. واحد 3− پر ز دوہرا، 0 اور 1 کے بیچ۔
9. مفرد 2− اور 3− کے بیچ۔

دفعہ 9-4

1. $-2, 3, \frac{1}{2}$
3. 1, 3, 5, 7
5. 1, 2, 3, -5
7. $-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$
9. 1, 1, 1, 1
11. $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \pm\sqrt{-1}$
13. $\pi/6, 5\pi/6, 7\pi/6, 11\pi/6, 3\pi/2$
15. $\pi/6, 5\pi/6, 7\pi/6, 11\pi/6, 3\pi/4, 7\pi/4$

دفعہ 9-5

1. 0.75
3. 0.45
5. 1.36, 1.69
7. $-0.62, 1.62$
9. 1.817
11. 1.189
13. (a) 0.9549 (b) 0.8765 (c) 0.7957 (d) 0.4480
(e) 0.8183 (f) 0.7815 (g) -0.8932 (h) 0.1419

باب 10

دفعہ 10-1

1. $y = 5x - 6$ محیط R؛ مقلوب $y = (x + 6)/5$ محیط R

3. $y = x^2 - 4x$ محیط $x > 2$؛ مقلوب $y = 2 + \sqrt{x + 4}$ محیط $x > -4$،
$y = 2 - \sqrt{x + 4}$ محیط $x > -4$؛ مقلوب $x < 2$ محیط

5. $y = (x^2 - 1)/x^2$ محیط $x > 0$؛ مقلوب $y = 1/\sqrt{1 - x}$ محیط $x < 1$،
$y = 1/(-\sqrt{1 - x})$ محیط $x < 1$؛ مقلوب $x < 0$ محیط

7. اس بات پر منحصر ہے کہ n آیا جفت ہے یا طاق۔

9. $y = \sqrt{x^2 - 4}$ محیط $x > 2$؛ مقلوب $y = \sqrt{x^2 + 4}$ محیط $x > 0$،
$y = -\sqrt{x^2 + 4}$ محیط $x > 0$؛ مقلوب $x < -2$ محیط

11. $y = x/(x^2 - 1)$ محیط $x > 0$ اور $x \neq 1$؛ مقلوب $y = (1 + \sqrt{1 + 4x^2})/2x$،
$y = (1 - \sqrt{1 + 4x^2})/2x$ محیط $x < 0$ اور $x \neq -1$؛ مقلوب

دفعہ 10-3

3. $\pm 2\pi/3 + 2n\pi$
5. $n\pi$
7. $\pm \pi/4 + 2n\pi$
9. $\pi/2$
11. $-\pi/2$
13. $(-1)^n(0.4189) + n\pi$
15. $\pm 0.8901 + 2n\pi$
17. 1.4719
21. $\frac{1}{3} \arctan (y/3)$
23. $\frac{1}{2} \operatorname{arcsec} (y/2)$
27. $\frac{1}{4}(4 + \cos 3y)$
29. $\tan (y + 2)$
31. $\dfrac{\cos (2y - \pi/12) - 1}{2}$

دفعہ 10-4

1. $\pm \frac{3}{5}$
3. $\pm \frac{1}{6}$
5. $\sqrt{11}/6$
7. u
9. $\pm \sqrt{1 - u^2}/u$
11. $\pi/7$
13. $\pi/18$
15. $2\pi/5$
17. 0
19. $uv \pm \sqrt{(1 - u^2)(1 - v^2)}$
21. $\pm \frac{3}{5}$
23. 1 یا $-\frac{7}{8}$
25. $-\frac{16}{63}$
27. $(24\sqrt{5} - 14)/75$
37. $2n\pi \pm (\pi/2 - \theta)$
39. $n\pi + \theta$
41. 1
43. 0
45. 0

باب 11

دفعہ 11-1

1. 4
3. 120
5. 240
7. 1920
9. 60
11. (a) 56, (b) 64

دفعہ 11-2

1. 504
3. 585
5. (a) 5040, (b) 144

7. 5040 9. 103,680 11. 1440
13. 468,000 15. 3780 17. 360
19. $n = 8$

دفعہ 11-3

1. (a) 35, (b) 45, (c) 210 3. 12,650
5. 84,456 7. 18,375
9. 560 11. 384C(36, 6)
13. (a) 36, (b) 84 15. 126
17. (a) 28, (b) 56, (c) 247 19. $n = 7$

دفعہ 11-4

1. $a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$
3. $32x^5 + 80x^4y^2 + 80x^3y^4 + 40x^2y^6 + 10xy^8 + y^{10}$
5. $625x^4 - 500x^3y^2 + 150x^2y^4 - 20xy^6 + y^8$
7. $x^3 + 6x^{5/3}y^{1/3} + 15x^{4/3}y^{2/3} + 20xy + 15x^{2/3}y^{4/3} + 6x^{1/3}y^{5/3} + y^2$
9. $x^2 - \frac{15x^{8/5}}{y^2} + \frac{90x^{6/5}}{y^4} - \frac{270x^{4/5}}{y^6} + \frac{405x^{2/5}}{y^8} - \frac{243}{y^{10}}$
11. $\frac{x^{24}}{4096} + \frac{3x^{22}}{256y^2} + \frac{33x^{20}}{128y^4} + \frac{55x^{18}}{16y^6} + \cdots$
13. $x^{11/3} - \frac{11x^{10/3}}{y^{1/3}} + \frac{55x^3}{y^{2/3}} - \frac{165x^{8/3}}{y} + \cdots$
15. $1 + kx + \frac{k(k-1)}{2}x^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}x^3 + \cdots$
17. $59{,}136x^6y^6$ 19. $\frac{35y^8}{8}$
21. $-414{,}720x^7$ 23. $(7/2)x^6$

دفعہ 11-5

1. $1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$ 3. $1 + \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} + \frac{5x^3}{16} + \cdots$
5. 0.9803 7. 1.005 9. 5.745 11. 4.932
13. $\frac{21}{4}$, $\frac{85}{32}$, $\frac{71}{15}$

باب 13

دفعہ 13-2

1. 64, 256, 1024; $t_n = 16{,}384$, $S_8 = 21{,}845$
3. -1, 5, -25; $t_n = 125$, $S_7 = 13{,}021/125$
5. $t_n = 486$. $S_6 = 728$
7. $r = 3$, t_n -4; $t_n = 9$. t 16
9. $t_1 = \frac{36}{121}$; $t_n = \frac{4}{1089}$
11. $n = 6$; $S = -126$
13. $t_1 = \frac{625}{16}$, $\frac{125}{8}$, $\frac{25}{4}$

.15 $n = 9$ .17. $\pm\frac{8}{4}, \frac{3}{2}, \pm 1$

.19 $\pm\sqrt{ab}$ .23 $\frac{1}{81}$ فٹ ؛ $26\frac{78}{81}$ فٹ

.25 1583 ڈالر .27 دوسرا

دفعہ 13-3

.1 $\frac{3}{2}$ .3 $\frac{64}{5}$ .5 $4 + 2\sqrt{2}$

.7 $\frac{1}{30}$ .9 $\frac{8}{9}$ .11 $\frac{64}{11}$

.13 $r = \frac{1}{2}$ .15 $16[2 + \sqrt{2}]$ .17 240 فٹ

دفعہ 13-4

1. $\log_3 27 = 3$ 3. $\log_4 1 = 0$ 5. $\log_8 16 = \frac{4}{3}$
7. $\log_{10} 0.001 = -3$ 9. $\log_4 4 = 1$ 11. $36^{1/2} = 6$
13. $x = 2$ 15. $x = -1$ 17. $u = 25$
19. $x = 14$ 21. $a = \frac{27}{8}$ 27. $\log_b \frac{a+2}{a-3}$
29. $\log_a \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{y^2}}$ 31. $\log_a x^5(x-1)^6$ 33. $4 \log_{10} 60.3$
35. $3 \log_{10} 54.3 + \log_{10} 67 - \log_{10} 93.9 - 2 \log 32.5$

دفعہ 13-5 (1)

1. 0.4099 3. 0.8401 5. 0.6730 7. 0.8373
9. 0.5153 11. 0.8858 13. 2.43 15. 4.12
17. 8.74 19. 1.851 21. 8.374 23. 3.213

دفعہ 13-5 (2)

.1 ممیز 1 ؛ اعشاریہ لوگارتم 0.3782

.3 ممیز -3 ؛ اعشاریہ لوگارتم 0.5728

.5 ممیز 5 ؛ اعشاریہ لوگارتم 0.8723

.7 ممیز -4 ؛ اعشاریہ لوگارتم 0.2715

.9 2.5172 .11 3.6747 .13 $8.8623 - 10$

.15 6650 .17 267.2 19 0.003653

دفعہ 13-6

1. 32000 3. 34.6 5. 158,800 7. 0.5152
9. 2.642 11. 0.1313 13. 8.52 15. 0.923

دفعہ 13-7

(سب سوال کتاب کے آخر میں دیے گئے چار مقامی جدولوں سے حل کیے گئے ہیں)

.1 (a) 295.80 ڈالر (b) 297.10 ڈالر

(c) 297.10 ڈالر [زیادہ صحیح جدول کے استعمال (b) سے بڑا] (d) 298.30 ڈالر

.3 (a) 11.9 سال .5 $r = 0.3467$ .7 (a) -0.2746

(b) 11.55 سال (b) 0.002

دفعہ 13-8

1. 3.808
3. 2.493
5. 1.947
7. 0.5824
9. 7.052×10^{13}
11. 26.6
13. 2.33
17. 5
19. 3.155
21. 6.14
23. 0.402
25. $\log_e (1 \pm \sqrt{2})$
27. $\frac{8}{11}$
29. $\frac{1}{297}$

باب 14

دفعہ 14-1

.1 محیط 5، دور 1 .3 محیط 3، دور 6

.5 محیط 1.5، دور $4\pi/3$ .7 محیط 2، دور 8π

.9 محیط 0.5، دور $2\pi/3$ .11 محیط 100، دور 200 (تقریباً)

دفعہ 14-3

.1 محیط 2، دور 2π، فیز ہٹاؤ (ہیئتی منتقلی) $\pi/6$

.3 محیط 5، دور π، فیز ہٹاؤ $\pi/16$

.5 محیط 1، دور 2π، فیز ہٹاؤ 0.25

.7 محیط 1، دور 2π، فیز ہٹاؤ 1.176

.9 محیط 17، دور 2π، فیز ہٹاؤ 0.4900

.11 محیط $\sqrt{29}$، دور 2π، فیز ہٹاؤ 1.1903

.13 دور، 2π .15 دور، 4π .17 دور، 2π

دفعہ 14-4

.1 P_e کا ایک x-محور ہے۔ $x = a \cos \omega t$

3. ہاں؛ دور π $E = 8 \sin 120\pi t$ .5 $I = 0.001 \sin 800\pi t$ .7

دفعہ 14-5

1. محیط a

3. $A_0 = 80$, $A_1 = 0.5$, $A_2 = 1.44$, $\alpha_1 = 0.53$, $\alpha_2 = 2.16$

باب 15

دفعہ 15-1

5. سوال 2 : (a) $\frac{1}{6}$ (b) $\frac{3}{8}$ (c) $-\frac{5}{6}$ (d) $-\frac{3}{8}$
(e) $\frac{2}{3}$ (f) $\frac{3}{4}$ (g) 2 (h) $-\frac{1}{3}$

سوال 3 : (a) $\frac{1}{12}$ (b) $\frac{1}{3}$ (c) $\frac{1}{6}$ (d) $\frac{3}{8}$
(e) $-\frac{3}{4}$ (f) $-\frac{5}{12}$ (g) $\frac{3}{27}$ (h) $-\frac{5}{2}$

7. (a) 0.4712 (b) 2.7285 (c) 0.8203
(d) 3.3080 (e) 4.4186 (f) −6.6116

9. (a) 47°41′ (b) 33°53′ (c) 51°
(d) 151° (e) 81°21′ (f) 85°17′
(g) 104°47′ (h) 42°22′ (i) 212°37′
(j) 206°12′ (k) 37°38′ (l) 4°20′

11. $\frac{3}{2}$ ریڈین 85°57′

13. 120°, 30°, 172°30′, 108°30′

15. 60 ریڈین

دفعہ 15-2

1. −1 3. $-\frac{1}{4}$ 5. 30°, 150° 7. 30°, 210°
9. 135°, 315° 11. 45°, 135° 13. 150°, 330°
15. (a) sin 2 = 0.9088 > sin 2° = 0.0349
(b) cos 4 = − 0.6539 < cos 4° = 0.9976
(c) tan 1 = 1.5597 > tan 1° = 0.0175

17. (a) −sin 16° (b) −cos 33°
(c) −sin 41° (d) −sin 16°
(e) −cot 24° (f) cos 8°
(g) cos 5° (h) sin 15°

19. (a) 0.2476 (b) 1.3111
(c) 0.8760 (d) 0.8949
(e) 0.3872 (f) 0.3035
(g) 0.9026 (h) −0.9465

23. (a) 25°10′ (b) 48°20′ (c) 27°40′ (d) 57°40′
(e) 12°10′ (f) 75°50′ (g) 20°20′ (h) 38°20′

33. 54.1 35. 43,000

دفعہ 15-5

1. (a) $\beta = 52°40'$, $b = 319$, $c = 401$
(b) $\beta = 27°20'$, $a = 1540$, $c = 1730$
(c) $\alpha = 29°40'$, $\beta = 60°20'$, $c = 6.63$

(d) $\alpha = 44°40'$, $\beta = 45°20'$, $a = 67.6$
(e) $\alpha = 38°50'$, $a = 0.522$, $b = 0.648$
(f) $\beta = 52°20'$, $b = 71.0$, $c = 89.7$
(g) $\alpha = 33°30'$, $\beta = 56°30'$, $c = 68.7$
(h) $\alpha = 48°35'$, $a = 2448$, $b = 2160$
(i) $\alpha = 59°36'$, $\beta = 30°24'$, $b = 3185$
(j) $\alpha = 23°10'$, $\beta = 66°50'$, $c = 8.320$
(k) $\alpha = 27°3'$, $b = 1.619$, $c = 1.818$
(l) $\alpha = 42°37'$, $a = 66.74$, $c = 98.58$
(m) $\alpha = 42°30'$, $\beta = 47°30'$, $a = 3274$
(n) $\beta = 65°13'$, $a = 147.0$, $c = 350.8$

3. 313, 19°0′ فٹ
5. 474 مربع انچ
7. 55°
9. 10.02 انچ، 7.075 انچ، 7.075 انچ
11. 172 فٹ
13. 78.8 فٹ
15. 2770 فٹ
17. 6.30 میل A سے، 9.09 میل B سے
19. 3195 فٹ جنوب، 3485 فٹ مغرب
21. (a) $v = 5$, $\theta = 53°$
(b) $v = 50$, $\theta = 63°$
(c) $v = 32.9$, $\theta = 119°30'$
(d) $v = 858.2$, $\theta = 296°27'$
23. 56°، 22 فٹ فی سیکنڈ
25. 47°0′ شمال مغرب
27. (a) $f = 43$, $\theta = 122°$
(b) $f = 8250$, $\theta = 21°10'$
(c) $f = 3000$, $\theta = 255°$

وقفہ 15-7

1. (a) $\gamma = 38°$, $b = 103$, $c = 102$
(b) $\alpha = 40°26'$, $a = 36.27$, $b = 55.35$
(c) $\beta = 13°52'$, $a = 270{,}400$, $c = 321{,}000$
(d) $\alpha = 112°16'$, $a = 30.72$, $c = 26.56$

3. نہیں
5. (a) $\alpha_1 = 91°50$, $\gamma_1 = 40°30'$, $a_1 = 95.0$
$\alpha_2 = 10°50'$, $\gamma_2 = 130°30'$, $a_2 = 17.9$
(b) $\beta = 127°40'$, $\gamma = 7°10'$, $b = 55.0$
(c) $\alpha = 17°49'$, $\gamma = 14°24'$, $c = 11.96$
(d) $\alpha = 76°42'$, $\beta = 46°0'$, $a = 6.067$
7. (a) $\beta = 31°19'$, $\gamma = 90°23'$, $a = 28.35$
(b) $\alpha = 45°50'$, $\beta = 76°30'$, $c = 545$

9. (a) $\alpha = 41°, \beta = 56°, \gamma = 83°$
(b) $\alpha = 30°, \beta = 63°, \gamma = 87°$

15. 48.52 انچ, 29.80 انچ

17. 60 میل، 100 میل

19. 25.5 فٹ

21. 79°20′ مغرب شمال

23. 148 میل فی گھنٹہ جنوب 63° مشرق

باب 16

دفعہ 16-1

15. $(0, -1)$ 17. $(6, 8)$ 19. $(-1, 1)$ 21. $(3, 11)$
23. $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ 25. $(1, 0)$

دفعہ 16-2

1. (a) $6 + 4i$
(b) $-2 + 6i$
3. (a) $\frac{3}{17} + \frac{22}{17}i$
(b) $\frac{13}{17} + \frac{19}{17}i$
11. $-15i/2$
13. $-(4i + 10)/29$
15. $3, -i$
17. $3i, 4i$

دفعہ 16-3

1. $x^3 - 7x^2 + 17x - 15 = 0$
3. $2x^3 + 19x^2 + 42x - 26 = 0$
5. $3x^3 - 17x^2 + 27x + 11 = 0$
7. $4, \pm 3i$
9. $2, 3 \pm \sqrt{2}\,i$

دفعہ 16-4

1. (a) $2(\cos 0° + i \sin 0°)$
(b) $2(\cos 180° + i \sin 180°)$
(c) $3(\cos 90° + i \sin 90°)$
(d) $\cos 270° + i \sin 270°$
(e) $2\sqrt{2}(\cos 315° + i \sin 315°)$
(f) $2\sqrt{2}(\cos 135° + i \sin 135°)$
(g) $\cos 120° + i \sin 120°$
(h) $\cos 240° + i \sin 240°$
3. (a) $6i$ (b) $-4\sqrt{3} - 4i$
(c) $12i$ (d) 8
5. (a) $\sqrt{3} + i$
(b) $-1 + \sqrt{3}\,i$

دفعہ 16-5

1. $64i$
3. $-4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}\,i$
5. $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$
7. 1
9. $-2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\,i,\ 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}\,i$
11. $1 + \sqrt{3}\,i,\ -2,\ 1 - \sqrt{3}\,i$
13. $\sqrt{3} + i,\ -1 + \sqrt{3}\,i,\ -\sqrt{3} - i,\ 1 - \sqrt{3}\,i$
15. $(\cos 36° + i \sin 36°),\ (\cos 72° + i \sin 72°), \ldots$
17. $1, i, -1, -i$
19. $\frac{\sqrt{5}+1}{2} + \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}\,i,\quad \frac{1-\sqrt{5}}{2} + \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}\,i,\quad -2,$
$\frac{1-\sqrt{5}}{2} - \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}\,i,\quad \frac{\sqrt{5}+1}{2} - \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}\,i$